Octavian G. Mustafa

Integrarea Asimptotică a Ecuaţiilor Diferenţiale Ordinare în Cazul Neautonom

Trei articole

Publicaţiile DAL
Craiova

Fişier prelucrat în data de [November 19, 2015]

Avertisment

Acest eseu nu a fost raportat vreunui referent. În consecinţă, conţinutul său trebuie considerat "ca atare."

Autorul vă aşteaptă comentariile la adresa lui de e-mail[1] şi vă mulţumeşte anticipat pentru efortul depus.

Fiecare proiect de la *Publicaţiile DAL* trebuie considerat "şantier" dacă nu este declarat altfel. Versiunea sa este cea a datei de pe pagina cu titlul.

Craiova, Mai 18, 2015 *O.G.M.*

[1] `octawian@yahoo.com`

Prefaţă

Lucrarea de faţă constituie traducerea a trei articole ştiinţifice dedicate integrării asimptotice a ecuaţiilor diferenţiale ordinare.

O parte din chestiunile detaliate aici au fost prezentate studenţilor înrolaţi în programul de studii masterale al Universităţii din Craiova.

O variantă a acestui material a fost tipărită la Editura Sitech din Craiova, în anul 2006 (**ISBN** 978-973-746-250-3). Mici corecturi şi actualizări bibliografice ale acestei variante au fost efectuate până în prezent.

Craiova, [November 19, 2015] *O.G.M.*

Cuprins

Capitolul 1
Existenţa globală a soluţiilor cu comportament prescris pentru ecuaţiile neliniare de ordinul al II-lea

Rezumat În acest capitol este studiată alura asimptotică a soluţiilor ecuaţiei diferenţiale neliniare $u'' + f(t,u,u') = 0$ atunci când neliniaritatea f satisface anumite condiţii de monotonie. Se stabileşte existenţa globală ”în viitor” a soluţiilor care se comportă aidoma unor funcţii liniare la infinit. În plus, sunt introduse condiţii viabile care asigură existenţa soluţiilor cu comportament prescris, mai precis $u(t) = at + o(t)$ şi $u(t) = at + b + o(1)$ când $t \to \infty$, unde *a*, *b* sunt constante reale *date*. Demonstraţiile se bazează pe teoria punctului fix în spaţii de funcţii construite în raport cu fiecare din problemele investigate.

Sursă Mustafa, O.G., Rogochenko, Y.V.: Global existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for second-order nonlinear differential equations. Nonlinear Anal. **51**, 339–368 (2002)

1.1 Introducere

Considerăm ecuaţia diferenţială neliniară

$$u'' + f(t,u,u') = 0, \qquad t \geq t_0, \tag{1.1}$$

cerând ca neliniaritatea f să satisfacă anumite condiţii de monotonie ce urmează să fie specificate. Fără a mai menţiona în continuare, se presupune că funcţia $f(t,u,v)$ este continuă în domeniul $D = \{(t,u,v) : t \in [t_0,+\infty),\ u,v \in \mathbb{R}\}$, unde $t_0 \geq 1$. Se va subînţelege, de asemeni, că toate ecuaţiile şi inegalităţile referitoare la t au loc pentru orice $t \geq t_0$ dacă nu intervine o specificare suplimentară. Simbolurile ”o” şi ”O” au semnificaţia obişnuită când $t \to \infty$ şi vom folosi notaţia $\mathbb{R}_+ \stackrel{\text{def}}{=} (0,+\infty)$.

Ec. (1.1) este utilizată în modelarea matematică a diferitelor sisteme fizice, chimice şi biologice, atrăgând în mod constant interesul cercetătorilor. Numeroase lucrări apărute în ultimele trei decade sunt dedicate existenţei locale şi globale a soluţiilor ec. (1.1) ori a unuia din numeroasele sale cazuri particulare, unicităţii soluţiilor, prelungibilităţii (continuării) lor, comportamentului asimptotic al soluţiilor (incluzând problematica mărginirii, comportamentului prescris, oscilaţiilor şi neoscilabilităţii), stabilităţii, etc.

Problema găsirii unor condiţii viabile în care toate soluţiile continuabile ale ec. (1.1) să tindă către soluţiile ecuaţiei $u'' = 0$ este strâns legată de studiul existenţei *soluţiilor neoscilatorii*, adică soluţiilor neconstante şi continuabile care au eventual semn constant (vezi, de exemplu, Hartman şi Wintner [22], Hille [26], Moore şi Nehari [35], Nehari [37], Wong [47] împreună cu referinţele lor) şi, în particular, de chestiunea existenţei aşa numitelor *soluţii propriu neoscilatorii*, adică soluţiilor neoscilante cu cel puţin un zero, introduse în lucrarea lui Nehari [37].

O cercetare amănunţită a lucrărilor citate privind neoscilabilitatea relevă faptul că o soluţie neoscilantă $u(t)$ a ec. (1.1) ori a unuia dintre cazurile sale particulare va avea, de exemplu, unul dintre tipurile următoare de comportament asimptotic:

(a) există limitele

$$\lim_{t\to\infty}(u(t)-t)=0 \qquad \text{şi} \qquad \lim_{t\to\infty}u'(t)$$

(Hille [26]);

(b) orice soluţie neoscilatorie $u(t)$ este fie mărginită fie verifică $u(t) \backsim \beta t$ pentru t mare, unde $\beta \neq 0$ (Nehari [37]);

(c) există limita

$$\lim_{t\to\infty}\frac{u(t)}{t}=\alpha>0$$

(Moore şi Nehari [35], Wong [47]);

(d) există soluţii $u_1(t)$ şi $u_2(t)$ cu proprietatea că $u_1(t) \to 1$, $u_2(t) \sim t$, $u_1'(t) = o(t^{-1})$, $u_2'(t) \to 1$ (Hartman şi Wintner [22]).

Asemenea rezultate sugerează că în multe cazuri toate ori măcar o parte semnificativă dintre soluţiile neoscilante ale ec. (1.1) se comportă asemeni funcţiilor liniare netriviale $at+b$ când $t \to \infty$ şi evidenţiază importanţa unui studiu al acestui tip de comportament asimptotic.

Se cuvine menţionat că investigarea soluţiilor cu comportament ”pseudo-liniar” la infinit (fenomen denumit ”Proprietatea (L)” în [38]) este, de asemeni, în strânsă legătură cu problematica existenţei soluţiilor monotone (vezi, de exemplu, [2, 21, 23, 24]) şi a soluţiilor aproape constante la infinit (vezi [1, 2, 19]).

Dintre numeroasele rezultate privind existenţa diferitelor clase de ecuaţii liniare şi neliniare cu proprietatea (L) doresc să menţionez lucrările de pionierat ale lui Bellman [2], Bihari [5], Fubini [17] şi Sansone [41]. Recent, o serie de lucrări ale lui Cohen [8], Constantin [10], Kusano şi Trench [30, 31], Meng [34], S. Rogovchenko şi Y. Rogovchenko [38], Rogovchenko [39], Rogovchenko şi Villari [40], Tong [44], Trench [45] continuă investigaţia privind comportamentul de tip ”pseudo-liniar” al soluţiilor pentru varii clase de ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul al II-lea. Cititorul poate consulta lucrarea recentă a lui S. Rogovchenko şi Y. Rogovchenko [38] pentru multe alte detalii şi referinţe la literatura de specialitate.

Aşa cum au arătat Kusano şi Trench [31, p. 381], aproape toate rezultatele privind existenţa soluţiilor cu comportament asimptotic prescris pentru ecuaţii neliniare sunt date *”local”* lângă infinit, în sensul că soluţiilor căutate li se stabileşte existenţa numai pentru t suficient de mare. Doar puţine lucrări (vezi, de exemplu, [30] – [32], [37], [42]) oferă condiţii globale ce implică existenţa soluţiilor pe intervalul dat $[t_0,\infty)$. Este binecunoscut faptul că în marea majoritate a cazurilor e necesar să se impună condiţii adiţionale privind ecuaţia diferenţială pentru a fi garantată existenţa globală (continuarea la infinit) a soluţiilor. În cele ce urmează revedem pe scurt câteva din rezultatele importante în această privinţă.

Rezultatul clasic (vezi, de exemplu, Brauer şi Nohel [7] sau Deo şi Raghavendra [15]) privind existenţa nelocală a soluţiilor ec. (1.1) cere condiţia Lipschitz pentru $f(t,u,v)$:

$$|f(t,u_1,v_1)-f(t,u_2,v_2)|\leq L_a\left(|u_1-u_2|+|v_1-v_2|\right)$$

cu un L_a constant în banda

$$S_a=\{(t,u,v):|t|\leq a,\,|u|\,,|v|<\infty\}$$

pentru toţi $a>0$.

Altă teoremă standard (vezi Gallavotti [18], cf. de asemeni LaSalle şi Lefschetz [33]) cere ca $f(t,u,v)$ să fie o aplicaţie continuu diferenţiabilă ce verifică

$$|f(t,u,v)|\leq\gamma(t)\left(|u|+|v|\right)+\beta(t),$$

unde β şi γ sunt funcţii pozitive şi continuu diferenţiabile.

Binecunoscuta condiţie Bernstein-Nagumo de existenţă globală (vezi Bernstein [3], Nagumo [36], Hartman [20]) presupune ca pentru orice $M>0$ să existe o funcţie pozitivă continuă, $\varphi_M(s)$, definită pe $[0,\infty)$ astfel ca

$$|f(t,u,v)|\leq\varphi_M(|v|)$$

pentru orice $(t,u,v)\in[a,b]\times[-M,M]\times\mathbb{R}$ şi ca φ_M să satisfacă

$$\int_0^\infty\frac{s\,ds}{\varphi_M(s)}=+\infty.$$

O serie de teoreme cu caracter general privind extensia la infinit a soluţiilor ec. (1.1) au fost obţinute în termeni de funcţii Liapunov pe baza unor ecuaţii de comparaţie adecvate (vezi, de exemplu, Constantin [9], Conti [11], Corduneanu [12], Kato şi Strauss [28], LaSalle şi Lefschetz [33] şi Strauss [43]). Presupunând că există funcţia diferenţiabilă $V(t,u,v)$, de la Ω la $\mathbb{R}$, verificând inegalitatea

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial x}v+\frac{\partial V}{\partial y}f\leq\omega(t,V),\quad(t,u,v)\in\Omega,$$

şi anumite condiţii adiţionale, se poate deduce că, dacă ecuaţia de comparaţie

$$z'=\omega(t,z)$$

are toate soluţiile globale în viitor, aceeaşi proprietate va caracteriza şi ec. (1.1). Mai mult, a fost demonstrat de către Kato şi Strauss [28] că existenţa globală în viitor a soluţiilor ec. (1.1) implică existenţa unei funcţii Liapunov local Lipschitz $V : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

În sfârşit, menţionez că, dacă $f(t,u,v)$ este pozitivă, continuă şi nedescrescătoare în fiecare din ultimele două variabile, atunci soluţiile ec. (1.1) pot fi continuate indefinit la dreapta (cf. Kusano et al. [29, pp. 149-150]). Acest din urmă rezultat ar părea să slujească mai bine intereselor noastre dacă nu ar necesita pozitivitatea lui f care este, în general vorbind, o condiţie mult prea restrictivă.

Tema existenţei globale a soluţiilor cu comportament asimptotic prescris a fost dezvoltată recent de Kusano şi Trench într-o serie de lucrări [30] – [32] legate de mai multe clase de ecuaţii diferenţiale neliniare. Aceştia au folosit teorema Schauder-Tikhonov pentru a demonstra existenţa globală a soluţiilor fără a cere condiţii adiţionale de felul acelora menţionate anterior. Iată unul dintre rezultatele cheie adaptat după [31].

Conform Kusano şi Trench [31], fie ecuaţia diferenţială neliniară

$$u'' + a_1(t)u' + a_2(t)u + f(t,u,u') = 0, \quad t \geq t_0,$$

privită ca o perturbare a ecuaţiei liniare

$$z'' + a_1(t)z' + a_2(t)z = 0, \quad t \geq t_0.$$

Să presupunem că $f : [t_0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface inegalitatea

$$|f(t,u,v)| \leq F(t,|u|,|v|),$$

unde $F : [t_0,\infty) \times \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ este continuă, nedescrescătoare în fiecare din ultimele două variabile şi verifică una dintre următoarele ipoteze:

(H1) pentru (t,u,v) fixat, $\lambda^{-1}F(t,\lambda u,\lambda v)$ este nedescrescătoare în λ dacă $\lambda > 0$ şi

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \lambda^{-1}F(t,\lambda u,\lambda v) = 0;$$

(H2) pentru (t,u,v) fixat, $\lambda^{-1}F(t,\lambda u,\lambda v)$ este necrescătoare în λ dacă $\lambda > 0$ şi

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda^{-1}F(t,\lambda u,\lambda v) = 0.$$

Teorema 1 (cf. [31, Corolarul 1]) *Presupunem că*

$$\int_{t_0}^{\infty} tF(t,M,Mt)dt < \infty, \quad M > 0. \tag{1.2}$$

Fie μ un număr pozitiv arbitrar şi c o constantă dată. Atunci ec. (1.1) are o soluţie u_1 definită pe $[t_0,\infty)$ astfel ca

$$\begin{aligned} |u_1(t) - c| &< \mu\,|c|, \\ |u_1'(t)| &\leq \mu\,|c|\,t^{-1}. \end{aligned}$$

Dacă în loc de (1.2) avem

$$\int_{t_0}^{\infty} F(t, Mt, M)dt < \infty, \quad M > 0,$$

atunci ec. (1.1) are o soluţie u_2 definită pe $[t_0, \infty)$ astfel ca

$$|u_2(t) - ct| < \mu\, |c|\, t,$$
$$|u_2'(t)| \le \mu\, |c|\,,$$

în ipoteza că $|c|$ este suficient de mic dacă avem (H1) *sau suficient de mare dacă avem* (H2).

Una din caracteristicile importante ale metodei ce va fi prezentată în capitolul de faţă este că nu sunt necesare condiţii adiţionale vizavi de existenţa globală în viitor a soluţiilor. Aceasta face rezultatul comparabil cu concluziile obţinute de Kusano şi Trench [31]. Oricum, atât forma cât şi substanţa teoremelor ce urmează sunt diferite de [31] şi se apropie de rezultatele obţinute recent de S. Rogovchenko şi Y. Rogovchenko [38]. Iată câteva concluzii din [38].

Teorema 2 [38, Teoremele 3 şi 6] *Presupunem că există funcţiile continue h_1, ..., h_5, g_1, ..., $g_4 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel ca una dintre inegalităţile următoare să aibă loc:*

$$|f(t,u,v)| \le h_1(t) g_1\left(\frac{|u|}{t}\right) + h_2(t) g_2(|v|) + h_3(t) \tag{1.3}$$

sau

$$|f(t,u,v)| \le h_4(t) g_3\left(\frac{|u|}{t}\right) g_4(|v|) + h_5(t), \tag{1.4}$$

unde, pentru $s > 0$, funcţiile $g_1(s), \ldots, g_4(s)$ sunt pozitive, nedescrescătoare şi funcţiile $h_1(s), \ldots, h_5(s)$ satisfac condiţia

$$\int_{t_0}^{\infty} h_i(s)ds = H_i < +\infty, \qquad i = 1, ..., 5. \tag{1.5}$$

Pentru $x \ge t_0$, introducem funcţiile

$$G_1(x) = \int_{t_0}^{x} \frac{ds}{g_1(s) + g_2(s)} \qquad \text{şi} \qquad G_2(x) = \int_{t_0}^{x} \frac{ds}{g_3(s) g_4(s)}.$$

Dacă (1.3) *are loc şi $G_1(+\infty) = +\infty$, orice soluţie continuabilă $u(t)$ a ec.* (1.1) *va avea reprezentarea asimptotică $u(t) = at + o(t)$ când $t \to +\infty$, unde $a \in \mathbb{R}$.*

Aceeaşi concluzie are loc dacă (1.4) *este satisfăcută şi $G_2(+\infty) = +\infty$.*

Comportamentul asimptotic al soluţiilor ec. (1.1) când condiţia $G_i(+\infty) = +\infty$ nu este îndeplinită a fost studiat de Dannan [14], S. Rogovchenko şi Y. Rogovchenko [38] şi Waltman [46]. Aceştia au demonstrat că fiecare soluţie continuabilă $u(t)$ a ec. (1.1) cu data iniţială $u(t_0) = u_0$, $u'(t_0) = u_1$ conţinută, de exemplu, în regiunea $|u_0| + |u_1| \le K$ a planului fazelor (u, u') pentru un anumit K, posedă comportamentul pseudo-liniar căutat [14, 38]. Trebuie menţionat că această constantă K depinde de forma particulară a ecuaţiei putând fi în multe situaţii calculată uşor. Rezultatele obţinute în această privinţă diferă esenţial prin natura regiunilor din planul (u,u') în care comportamentul asimptotic căutat este observat (cf., de exemplu, regiunile din S. Rogovchenko şi Y. Rogovchenko [38] ori Waltman [46]).

Menţionez, de asemeni, rezultatul stabilit de Hallam [19] într-un caz particular al ec. (1.1). Acesta priveşte existenţa soluţiilor $u(t)$ care au alura asimptotică $u(t) = at + b + o(1)$ când $t \to +\infty$, unde constantele reale a, b sunt date *a priori*. Neliniaritatea folosită verifică condiţiile Teoremei 2.

Capitolul de faţă este dedicat existenţei globale a soluţiilor ec. (1.1) care prezintă alură pseudo-liniară la infinit. Scopul principal este de a demonstra un rezultat mai general ca Teorema 2, omiţând cuvântul "*continuabil*" din enunţ. Astfel, existenţa globală a soluţiilor ec. (1.1) având comportamentul asimptotic dorit va fi obţinută în mod direct în ipotezele Teoremei 2 via teoria punctului fix. Vor fi stabilite, de asemeni, două teoreme noi ce garantează existenţa soluţiilor ec. (1.1) cu alură asimptotică *a priori*: sau $u(t) = at + o(t)$ sau $u(t) = at + b + o(1)$ când $t \to \infty$, unde a, b sunt constante reale date. Cazul particular al claselor de ecuaţii pentru care condiţia $G_1(+\infty) = +\infty$ (ori $G_2(+\infty) = +\infty$) nu are loc va fi investigat printr-o analiză similară.

1.2 Rezultatele principale

1.2.1 Enunţuri

Primul rezultat întăreşte Teorema 2 deoarece concluzia acesteia devine valabilă nu doar pentru soluţiile continuabile ale ec. (1.1) ci pentru *toate* soluţiile cu data iniţială $u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u_1$, unde (u_0, u_1) este o pereche arbitrară de numere reale.

Teorema 3 *Presupunem că există funcţiile continue h, p_1, $p_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel încât să aibă loc inegalitatea*

$$|f(t,u,v)| \le h(t)\left[p_1\left(\frac{|u|}{t}\right) + p_2(|v|)\right], \tag{1.6}$$

unde funcţiile $p_1(s)$, $p_2(s)$ sunt pozitive, nedescrecătoare iar funcţia $h(s)$ verifică condiţia

$$\int_{t_0}^{\infty} h(s)ds = H < +\infty. \tag{1.7}$$

În plus, admitem că $G(+\infty) = +\infty$, unde, pentru $x \ge t_0$,

$$G(x) = \int_{t_0}^{x} \frac{ds}{p_1(s) + p_2(s)}. \tag{1.8}$$

Atunci, pentru orice u_0, $u_1 \in \mathbb{R}$ problema de valori iniţiale

$$\begin{cases} u'' + f(t,u,u') = 0, & t \geq t_0, \\ u(t_0) = u_0, & u'(t_0) = u_1, \end{cases} \tag{1.9}$$

are cel puţin o soluţie $u(t)$ în $[t_0,+\infty)$ cu reprezentarea asimptotică $u(t) = at + o(t)$ când $t \to +\infty$, unde a este o constantă reală.

Rezultatul următor este dual Teoremei 3 şi stabileşte pentru toate numerele reale a existenţa unei soluţii $u(t)$ a ec. (1.1) cu alura $u(t) = at + o(t)$. Practic, se determină cât de ”mare” este mulţimea valorilor a.

Teorema 4 *Presupunem satisfăcute condiţiile* (1.6), (1.7) *şi $G(+\infty) = +\infty$.*
Atunci, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există cel puţin o soluţie $u(t)$ a ec. (1.1) *în $[t_0,+\infty)$ cu reprezentarea asimptotică $u(t) = at + o(t)$ când $t \to +\infty$.*

Rezultatul următor priveşte soluţiile ec. (1.1) al căror comportament asimptotic poate fi dat mai în detaliu.

Teorema 5 *Presupunem satisfăcute condiţiile* (1.6) *şi $G(+\infty) = +\infty$ şi înlocuim restricţia* (1.7) *cu*

$$\int_{t_0}^{\infty} sh(s)ds = H_* < +\infty.$$

Atunci, pentru fiecare pereche u_0, u_1 de numere reale problema de valori iniţiale (1.9) *are cel puţin o soluţie $u(t)$ în $[t_0,+\infty)$ cu reprezentarea asimptotică $u(t) = at + b + o(1)$ când $t \to +\infty$, unde a, b sunt constante reale.*

În sfârşit, rezultatul următor este dual Teoremei 5 în sensul că perechea de constante reale a, b este *prescrisă*.

Teorema 6 *Presupunem că ipotezele Teoremei* 5 *sunt satisfăcute.*
Atunci, pentru orice a, $b \in \mathbb{R}$, există o soluţie $u(t)$ a ec. (1.1) *în $[t_0,+\infty)$ care are reprezentarea asimptotică $u(t) = at + b + o(1)$ când $t \to +\infty$.*

1.2.2 Generalitatea condiţiilor

La prima vedere ipotezele Teoremei 3 sunt un caz particular al celor din Teorema 2. Însă aceasta nu este adevărat. Introducem clasele $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ şi $\mathscr{C}$ de ecuaţii (1.1) ale căror neliniarităţi satisfac unul dintre seturile de condiţii:

$$\begin{aligned} \mathscr{C}_1 &= \{f(t,u,v) | f \in C(D), f \text{ verifică (1.3),(1.5) şi } G_1(+\infty) = +\infty\}, \\ \mathscr{C}_2 &= \{f(t,u,v) | f \in C(D), f \text{ verifică (1.4),(1.5) şi } G_2(+\infty) = +\infty\}, \\ \mathscr{C} &= \{f(t,u,v) | f \in C(D), f \text{ verifică (1.6),(1.7) şi } G(+\infty) = +\infty\}. \end{aligned}$$

Afirmăm că clasele de ecuaţii $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{C}_2$ se ”scufundă” în clasa de ecuaţii $\mathscr{C}$. Pentru a stabili aceasta este nevoie de următorul rezultat.

Lema 1 *Presupunem că funcţia $g(s)$ este continuă, pozitivă şi nedescrescătoare în $(0,+\infty)$. Presupunem, de asemeni, că satisface relaţia*

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{g(s)} = +\infty.$$

Atunci, pentru orice $k > 0$ avem

$$\int_{t_0}^{\infty} \frac{ds}{k+g(s)} = +\infty.$$

Demonstraţie. Definim funcţia $m(s)$ prin

$$m(s) \overset{\texttt{def}}{=} \frac{g(s)}{k+g(s)}, \qquad s \geq t_0.$$

Se observă că $g(s)$ este nedescrescătoare dacă şi numai dacă $m(s)$ este nedescrescătoare. Mai mult,

$$\lim_{s\to+\infty} g(s) = +\infty \qquad \text{dacă şi numai dacă} \qquad \lim_{s\to+\infty} m(s) = 1.$$

Aşadar, concludem că valoarea limitei

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{k+g(s)} = l \tag{1.10}$$

este pozitivă, independent de valoarea limitei $\lim_{s\to+\infty} g(s)$.

Conform (1.10), pentru $t_1 > t_0$ suficient de mare, avem

$$\int_{t_1}^{\infty} \frac{ds}{k+g(s)} \geq \frac{l}{2} \int_{t_1}^{\infty} \frac{ds}{g(s)}.$$

Concluzia este imediată. □

Propoziţia 1 *Fie $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2$ şi $\mathscr{C}$ clasele deja definite. Atunci,*
(i) $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}$;
(ii) $\mathscr{C}_2 \subset \mathscr{C}$.

Demonstraţie. Stabilim numai partea (ii) a Propoziţiei, partea (i) demonstrându-se similar. Presupunem că $f \in \mathscr{C}_2$. Fie funcţiile

$$h(t) = h_4(t) + h_5(t) \qquad \text{şi} \qquad p_1(s) = p_2(s) = g_3(s)g_4(s) + 1.$$

Desigur, condiţia $G(+\infty) = +\infty$ rezultă din Lema 1, presupunerea (1.5) implică (1.7) iar faptul că funcţiile $p_1(s)$, $p_2(s)$ sunt pozitive şi nedescrescătoare este imediat. Apoi, pentru orice s_1, $s_2 \geq 0$ avem

$$h_4(t)g_3(s_1)g_4(s_2) + h_5(t) \leq h(t)(g_3(s_1)g_4(s_2) + 1)$$

şi

$$g_3(s_1)g_4(s_2) \le g_3(s_1)g_4(s_1) + g_3(s_2)g_4(s_2).$$

În fapt, dacă $s_1 \le s_2$ atunci $g_3(s_1) \le g_3(s_2)$ şi, în consecinţă, $g_3(s_1)g_4(s_2) \le g_3(s_2)g_4(s_2)$. Altfel, $g_3(s_1)g_4(s_2) \le g_3(s_1)g_4(s_1)$. Demonstraţia s-a încheiat. □

Să presupunem acum că funcţia $f(t,u,v)$ verifică inegalitatea

$$|f(t,u,v)| \le h(t)p\left(\frac{|u|}{t}, |v|\right), \tag{1.11}$$

unde funcţia $p(s_1,s_2)$ este continuă, pozitivă şi nedescrescătoare în fiecare dintre argumente iar funcţia $h(s)$ este continuă, nenegativă pe $[t_0,+\infty)$ şi verifică (1.7). Pentru $x \ge t_0$, definim funcţia

$$P(x) = \int_{t_0}^{x} \frac{ds}{p(s,s)}$$

şi presupunem că $P(+\infty) = +\infty$.

Fie clasa $\mathscr{C}_3$ de ecuaţii (1.1) a căror neliniaritate satisface setul de condiţii:

$$\mathscr{C}_3 = \{f(t,u,v) | f \in C(D), f \text{ verifică (1.11) şi } P(+\infty) = +\infty\}.$$

Propoziţia 2 *Fie $\mathscr{C}_3$ şi $\mathscr{C}$ clasele introduse anterior. Atunci, $\mathscr{C}_3 \subset \mathscr{C}$.*

Demonstraţie. Introducem funcţiile

$$p_1(s) = p_2(s) = p(s,s).$$

Pentru orice s_1, $s_2 \ge 0$, avem

$$p(s_1,s_2) \le p(s_1,s_1) + p(s_2,s_2),$$

ceea ce implică (1.6). Evident, p_1 şi p_2 sunt nedescrescătoare. Demonstraţia s-a încheiat. □

Observaţia 1 *Din Propoziţiile 1 şi 2 rezultă că clasa de ecuaţii cu neliniarităţi din $\mathscr{C}$ este, într-un anume sens, cea mai mare.*

1.3 Spaţii de funcţii

1.3.1 Spaţii de funcţii şi completitudinea lor

Introducem aici cele trei spaţii de funcţii folosite pentru demonstrarea rezultatelor principale. Primul dintre ele, notat $A(t_0)$, este constituit de mulţimea tuturor funcţiilor continue cu valori reale $u(t)$ definite pe $[t_0,+\infty)$ care au limita finită l_u

la infinit împreună cu operaţiile uzuale cu funcţii numerice. Se ştie (vezi, de exemplu, Kartsatos [27, p. 13]) că spaţiul $A(t_0)$ este complet dacă este înzestrat cu norma ”sup” obişnuită

$$\|u\| = \sup_{t\geq t_0} |u(t)|\,.$$

Cel de-al doilea spaţiu, notat $V(t_0)$, este dat de mulţimea tuturor funcţiilor continuu diferenţiabile cu valori reale $u(t)$ definite pe $[t_0,+\infty)$ cu proprietatea că derivata lor $u'(t)$ are limita finită a_u la infinit. Este înzestrat cu operaţiile uzuale cu funcţii numerice.

Propoziţia 3 *Spaţiul $V(t_0)$ este complet în raport cu norma*

$$\|u\| = \sup_{t\geq t_0} \frac{|u(t)|}{t} + \sup_{t\geq t_0} \left|u'(t)\right|. \tag{1.12}$$

Demonstraţie. Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ un şir Cauchy în $V(t_0)$. Şirul derivatelor $(u_n')_{n\geq 1}$ este şir Cauchy în $A(t_0)$. Notez cu $v(t)$ limita sa uniformă când $n\to+\infty$. Pe baza definiţiei şirului Cauchy în $V(t_0)$ şi a formulei (1.12), se deduce că pentru orice $T>t_0$ şirul $(u_n)_{n\geq 1}$ este şir Cauchy în $C([t_0,T],\mathbb{R})$. Astfel, el are o limită local uniformă când $n\to+\infty$, notată $u(t)$. Pe de altă parte, folosind reprezentarea integrală a lui u_n,

$$u_n(t) = u_n(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_n'(s)ds, \quad t\geq t_0,$$

concludem că u_n are drept limită local uniformă şi pe

$$u(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)ds, \quad t\geq t_0.$$

În consecinţă, $u\in C^1([t_0,+\infty),\mathbb{R})$ şi $u'=v$.

Cum $(a_{u_n})_{n\geq 1}$ este şir Cauchy, un calcul simplu ne conduce la $\lim_{t\to+\infty} v(t) = a$, unde $a = \lim_{n\to+\infty} a_{u_n}$. Astfel, $u\in V(t_0)$, adică completitudinea spaţiului $V(t_0)$ este dovedită. $\square$

Observaţia 2 *Remarc faptul că (1.12) ţine seama de*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t} = a \qquad \textit{dacă} \qquad \lim_{t\to+\infty} u'(t) = a.$$

Cel de-al treilea spaţiu, notat $W(t_0)$, este dat de mulţimea tututot funcţiilor continuu diferenţiabile cu valori reale $u(t)$ definite pe $[t_0,+\infty)$ având proprietatea că

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) = a_u \qquad \text{şi} \qquad \lim_{t\to+\infty}(u(t)-a_u t) = b_u,$$

unde a_u, b_u sunt constante reale. Ca şi $V(t_0)$, acest spaţiu este dotat cu operaţiile uzuale cu funcţii numerice.

Propoziţia 4 *Spaţiul $W(t_0)$ este complet în raport cu norma*

$$\|u\| = \sup_{t \geq t_0} \frac{|u(t)|}{t} + \sup_{t \geq t_0} |u'(t)| + \sup_{t \geq t_0} |u(t) - a_u t| .$$

Demonstraţie. Demonstraţia este similară aceleia a Propoziţiei 3. □

1.3.2 Criterii de compactitate

Criteriul de compactitate pentru submulţimile spaţiului $A(t_0)$ a fost stabilit de Avramescu.

Propoziţia 5 [1, Lema 1] *Presupunem că mulţimea $M \subset A(t_0)$ are următoarele proprietăţi:*

(i) *M este uniform mărginită, adică există constanta $L > 0$ astfel ca*

$$|u(t)| \leq L$$

pentru orice $t \geq t_0$ şi orice $u \in M$;

(ii) *M este echicontinuă, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât*

$$|u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon$$

pentru orice $t_1, t_2 \geq t_0$ cu $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$;

(iii) *M este echiconvergentă, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $Q(\varepsilon) > t_0$ astfel încât*

$$|u(t) - l_u| < \varepsilon$$

pentru orice $t \geq Q(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$.

Atunci, mulţimea M este relativ compactă în $A(t_0)$. Reciproc, dacă mulţimea M este relativ compactă, vor avea loc condiţiile (i), (iii) *şi* (iii).

Criteriile de compactitate pentru submulţimile spaţiilor $V(t_0)$ şi $W(t_0)$ se derivă din Propoziţia 5.

Propoziţia 6 *Presupunem că mulţimea $M \subset V(t_0)$ are următoarele proprietăţi:*

(i) *există constanta $L > 0$ astfel încât*

$$\text{(a)}\ |u'(t)| \leq L \qquad \text{şi} \qquad \text{(b)}\ \frac{|u(t)|}{t} \leq L$$

pentru orice $t \geq t_0$ şi orice $u \in M$;

(ii) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât*

$$\text{(a)}\ |u'(t_1) - u'(t_2)| < \varepsilon \qquad \text{şi} \qquad \text{(b)}\ \left| \frac{u(t_1)}{t_1} - \frac{u(t_2)}{t_2} \right| < \varepsilon$$

pentru orice $t_1, t_2 \geq t_0$ satisfăcând $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$;

(iii) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $Q(\varepsilon) > t_0$ astfel încât*

$$\text{(a) } \left|u'(t) - a_u\right| < \varepsilon \qquad \text{şi} \qquad \text{(b) } \left|\frac{u(t)}{t} - a_u\right| < \varepsilon$$

pentru orice $t \geq Q(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$.

Atunci, mulţimea M este relativ compactă în $V(t_0)$. Reciproc, dacă mulţimea M este relativ compactă, vor avea loc condiţiile (i), (iii) *şi* (iii).

Demonstraţie. Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ un şir în M. Vom arăta că are un subşir convergent în $V(t_0)$. Din (i)(a), (ii)(a) şi (iii)(a) rezultă că şirul derivatelor $(u_n')_{n\geq 1}$ este relativ compact în $A(t_0)$. Aşadar, există un subşir al său, notat tot $(u_n')_{n\geq 1}$, care converge la o funcţie $v(t)$ în $A(t_0)$.

Fie acum subşirul corespunzător $(u_n(t)/t)_{n\geq 1}$. Conform (i)(b), (ii)(b) şi (iii)(b), subşirul $(u_n(t)/t)_{n\geq 1}$ este relativ compact în $A(t_0)$. Notăm cu $u(t)/t$ limita subşirului $(u_n(t)/t)_{n\geq 1}$ când $n \to \infty$. Evident, această limită se găseşte în $A(t_0)$. La fel ca în demonstraţia Propoziţiei 3, deducem că $u \in C^1([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ şi $u' = v$ iar demonstraţia se încheie. $\square$

Propoziţia 7 *Presupunem că mulţimea $M \subset W(t_0)$ are următoarele proprietăţi:*

(i) *există constanta $L > 0$ astfel încât*

$$\text{(a) } \left|u'(t)\right| \leq L \qquad \text{şi} \qquad \text{(b) } |u(t) - a_u t| \leq L$$

pentru orice $t \geq t_0$ şi orice $u \in M$;

(ii) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât*

$$\text{(a) } \left|u'(t_1) - u'(t_2)\right| < \varepsilon \qquad \text{şi} \qquad \text{(b) } |u(t_1) - u(t_2) - a_u(t_1 - t_2)| < \varepsilon$$

pentru orice $t_1, t_2 \geq t_0$ satisfăcând $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$;

(iii) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $Q(\varepsilon) > t_0$ astfel încât*

$$\text{(a) } \left|u'(t) - a_u\right| < \varepsilon \qquad \text{şi} \qquad \text{(b) } |u(t) - a_u t - b_u| < \varepsilon$$

pentru orice $t \geq Q(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$.

Atunci, mulţimea M este relativ compactă în $W(t_0)$. Reciproc, dacă mulţimea M este relativ compactă, vor fi valabile condiţiile (i), (iii) *şi* (iii).

Demonstraţie. Fie $(u_n)_{n\geq 1}$ un şir în M. Din (i)(a), (ii)(a) şi (iii)(a) rezultă că există un subşir al şirului derivatelor $(u_n')_{n\geq 1}$, notat tot $(u_n')_{n\geq 1}$, care converge în $A(t_0)$ la o funcţie $v(t)$. Mai mult, $l_v = a$, unde $a = \lim_{n\to+\infty} a_{u_n}$.

Din (i)(b), (ii)(b) şi (iii)(b) rezultă că subşirul $(u_n(t) - a_{u_n} t)_{n\geq 1}$ este relativ compact în $A(t_0)$. Astfel, există un subşir $(u_n(t) - a_{u_n} t)_{n\geq 1}$ al acestui şir care converge în $A(t_0)$ la o funcţie $w(t)$. Mai mult, $l_w = b$, unde $b = \lim_{n\to+\infty} b_{u_n}$.

Fie funcţia $u(t)$ dată prin $u(t) = w(t) + at$. Un calcul similar celui din demonstraţia Propoziţiei 3 arată că u_n are limita local uniformă $u(t)$ când $n \to +\infty$. Mai mult, obţinem că $u \in C^1([t_0, +\infty), \mathbb{R})$ şi $u' = v$.

În sfârşit, cum pentru orice $\varepsilon > 0$ există numărul natural n_ε astfel ca

$$|u_n(t) - u(t) - t(a_{u_n} - a)| < \varepsilon,$$

pentru orice $t \geq t_0$ şi $n \geq n_\varepsilon$, avem

$$\left| \frac{u_n(t)}{t} - \frac{u(t)}{t} \right| < \varepsilon + |a_{u_n} - a| \,, \tag{1.13}$$

pentru orice $t \geq t_0$ şi $n \geq n_\varepsilon$. În consecinţă, şirul $(u_n(t)/t)_{n \geq 1}$ converge în $A(t_0)$ la funcţia $u(t)/t$. Demonstraţia s-a încheiat. $\square$

1.3.3 O lemă specială

Criteriile de compactitate pentru submulţimile $V(t_0)$, $W(t_0)$ au fost obţinute din criteriul de compactitate pe $A(t_0)$ prin aplicarea iterată a Propoziţiei 5 componentelor normelor din $V(t_0)$, respectiv $W(t_0)$. Pe de altă parte, din (1.13) rezultă că nu este nevoie să aplicăm Propoziţia 5 celei de-a doua componente a normei lui $W(t_0)$. Această observaţie ne sugerează să încercăm relaxarea (simplificarea) ipotezelor Propoziţiei 6. Aşa cum se va vedea în Secţiunea 1.4, ipoteza (iii)(b) din Propoziţia 6 este mai dificil de verificat prin calcul direct. Rezultatul următor stabileşte că ea este consecinţa celorlalte ipoteze.

Lema 2 *Presupunem că mulţimea $M \subset V(t_0)$ are următoarele proprietăţi:*
(i) *există constanta $L > 0$ astfel încât*

$$\left|u'(t)\right| \leq L \qquad \text{şi} \qquad \frac{|u(t)|}{t} \leq L$$

pentru orice $t \geq t_0$ şi orice $u \in M$;
(ii) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $Q(\varepsilon) > t_0$ astfel încât*

$$\left|u'(t) - a_u\right| < \varepsilon$$

pentru orice $t \geq Q(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$.
Atunci, pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $Q_1(\varepsilon) \geq Q(\varepsilon)$ astfel încât

$$\left| \frac{u(t)}{t} - a_u \right| < \varepsilon$$

pentru orice $t \geq Q_1(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$.

Demonstraţie. Fixez $\varepsilon > 0$. Conform (ii), există $Q(\varepsilon/3) > t_0$ astfel ca

$$\left|u'(t) - a_u\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pentru orice $t \geq Q(\varepsilon/3)$ şi orice $u \in M$. Integrând ultima inegalitate de la $Q(\varepsilon/3)$ la t, avem

$$\left(a_u-\frac{\varepsilon}{3}\right)(t-Q(\varepsilon/3))\le u(t)-u(Q(\varepsilon/3))\le\left(a_u+\frac{\varepsilon}{3}\right)(t-Q(\varepsilon/3)),$$

sau, echivalent,

$$\left(a_u-\frac{\varepsilon}{3}\right)-\left(a_u-\frac{\varepsilon}{3}\right)\frac{Q(\varepsilon/3)}{t}+\frac{u(Q(\varepsilon/3))}{t}\le\frac{u(t)}{t}, \tag{1.14}$$

$$\left(a_u+\frac{\varepsilon}{3}\right)-\left(a_u+\frac{\varepsilon}{3}\right)\frac{Q(\varepsilon/3)}{t}+\frac{u(Q(\varepsilon/3))}{t}\ge\frac{u(t)}{t}, \tag{1.15}$$

pentru orice $t\ge Q(\varepsilon/3)$ şi orice $u\in M$.

Din (i) rezultă că pentru orice $u\in M$

$$\frac{|u(Q(\varepsilon/3))|}{Q(\varepsilon/3)}\le L \qquad \text{şi} \qquad |a_u|\le L.$$

Definim $Q_1(\varepsilon)$ prin

$$Q_1(\varepsilon)=\left(\frac{3L}{\varepsilon}+1\right)Q(\varepsilon/3).$$

Atunci, rezultă că

$$\left|a_u\pm\frac{\varepsilon}{3}\right|\frac{Q(\varepsilon/3)}{t}\le\frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{şi} \qquad \frac{|u(Q(\varepsilon/3))|}{t}\le\frac{\varepsilon}{3} \tag{1.16}$$

pentru orice $t\ge Q_1(\varepsilon)$ şi orice $u\in M$.

În sfârşit, conform (1.16), putem scrie inegalităţile (1.14) şi (1.15) după cum urmează:

$$\left(a_u-\frac{\varepsilon}{3}\right)-2\frac{\varepsilon}{3}\le\frac{u(t)}{t}\le\left(a_u+\frac{\varepsilon}{3}\right)+2\frac{\varepsilon}{3},$$

pentru orice $t\ge Q_1(\varepsilon)$ şi orice $u\in M$. Demonstraţia este încheiată. □

1.4 Demonstraţiile rezultatelor principale

1.4.1 Leme auxiliare

În această subsecţiune am colectat pentru uşurinţa cititorului trei leme auxiliare ce vor fi folosite în demonstrarea Teoremelor 3 - 6.

Primul rezultat este o extindere a teoremei denumită *alternativa Leray-Schauder* (cf. Dugundji şi Granas [16, p. 61]) ori *teorema lui Schaefer* (cf. Cronin [13, p. 133]).

Lema 3 *Presupunem că C este o submulţime convexă a spaţiului liniar normat X astfel ca $0\in C$. Fie $\mu\in[0,1]$. Presupunem că $T:C\to C$ este un operator complet continuu. Atunci, sau există $x\in C$ astfel ca*

$$x = \mu T(x)$$

sau mulţimea

$$E(T) = \{x \in C : x = \lambda T x, \quad 0 < \lambda < 1\}$$

este nemărginită.

Al doilea rezultat este o generalizare a inegalităţii integrale clasice datorată lui Bihari [4].

Lema 4 (i) *Fie* $h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ *o funcţie continuă. Presupunem că funcţia* $f \in C([0,+\infty),\mathbb{R})$ *este nenegativă şi satisface una dintre inegalităţile*

$$f(t) \leq K + \int_{t_0}^{t} h(s)g(f(s))ds, \qquad t \geq t_0, \tag{1.17}$$

sau

$$f(t) \leq K + \int_{t}^{T} h(s)g(f(s))ds, \qquad t_0 \leq t \leq T, \tag{1.18}$$

unde $K \geq t_0$ *este o constantă nenegativă iar* $g(s)$ *este a funcţie continuă, pozitivă şi nedescrescătoare astfel ca*

$$G(+\infty) = +\infty \tag{1.19}$$

pentru

$$G(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{ds}{g(s)}.$$

Atunci,

(a) *dacă are loc* (1.17)*, avem pentru orice* $t \geq t_0$ *că*

$$f(t) \leq G^{-1}\left(G(K) + \int_{t_0}^{t} h(s)ds\right); \tag{1.20}$$

(b) *dacă are loc* (1.18)*, avem pentru orice* $t_0 \leq t \leq T$ *că*

$$f(t) \leq G^{-1}\left(G(K) + \int_{t}^{T} h(s)ds\right). \tag{1.21}$$

(ii) *Presupunem că funcţia* $h(s)$ *este integrabilă pe* $[t_0,+\infty)$ *în timp ce* $f(t)$ *are limită finită când* $t \to +\infty$ *şi satisface următoarea inegalitate integrală*

$$f(t) \leq K + \int_{t}^{\infty} h(s)g(f(s))ds, \qquad t \geq t_0.$$

Atunci, avem

$$f(t) \leq G^{-1}\left(G(K) + \int_{t}^{\infty} h(s)ds\right), \qquad t \geq t_0. \tag{1.22}$$

Observaţia 3 *Dacă restricţia (1.19) se omite, inegalităţiile (1.20) – (1.22) vor avea loc cu condiţia ca*

$$\int_{t_0}^{\infty} h(s)ds < \int_{K}^{\infty} \frac{ds}{g(s)}.$$

A treia lemă se deduce uşor din criteriul de compactitate clasic Ascoli-Arzelà (vezi, de exemplu, Bellman [2, p. 71]).

Lema 5 *Presupunem că mulţimea $M \subset C^1([a,b],\mathbb{R})$ satisface următoarele condiţii:*
(i) *există constanta $L > 0$ astfel încât*

$$\left|u'(t)\right| \le L \qquad \text{şi} \qquad |u(t)| \le L$$

pentru orice $t \in [a,b]$ şi orice $u \in M$;
(ii) *pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât*

$$\left|u'(t_1) - u'(t_2)\right| < \varepsilon \qquad \text{şi} \qquad |u(t_1) - u(t_2)| < \varepsilon$$

pentru orice t_1, $t_2 \in [a,b]$ cu $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$.
Atunci, mulţimea M este relativ compactă în $C^1([a,b],\mathbb{R})$.

1.4.2 *Demonstraţii*

Ideea de bază a demonstraţiilor Teoremelor 3–6 este următoare. Mai întâi transformăm toate problemele ataşate ec. (1.1) (*i.e.*, probleme de valori iniţiale, probleme bilocale) în ecuaţii integrale corespunzătoare. Apoi se introduc operatorii integrali în cauză, acţionând pe $V(t_0)$, $W(t_0)$, şi se examinează proprietăţile acestora.

Pentru a aplica fie alternativa Leray-Schauder (Lema 3) fie clasica teoremă Schauder-Tikhonov (vezi, de exemplu, Cronin [13, pp. 131-133] ori Kartsatos [27, p. 22]), trebuie stabilit că operatorii integrali sunt complet continui (compacţi). Demosntraţia acestui fapt se realizează în doi paşi. Mai întâi, arăt că operatorul integral este uniform continuu pe submulţimile mărginite ale spaţiului de funcţii corespunzător. Apoi, demonstrez că imaginea unei mulţimi mărginite prin operatorul integral satisface ipotezele (i) – (iii) ale Propoziţiilor 6 şi 7, fiind, în consecinţă, relativ compactă în spaţiul de funcţii respectiv.

Deoarece demonstraţia Teoremei 4 este cea mai relevantă în această privinţă, mă voi concentra asupra detaliilor ei. La celorlalte rezultate voi puncta elementele distinctive ale demonstraţiilor.

Demonstraţia Teoremei 4. *Pasul 1*. Fixez $b > 0$ şi $\lambda \in (0,1)$. Din (1.7) rezultă că există $t_* = t_*(b,\lambda) > t_0$ astfel ca

$$\int_{t_*}^{\infty} h(s)ds < \lambda \frac{b}{3(p_1(b) + p_2(b))}. \tag{1.23}$$

Aleg numerele reale u_0 şi a astfel încât

$$\frac{|u_0|}{t_*} + 2\,|a| < (1-\lambda)b. \tag{1.24}$$

Consider mulţimea $C = \{u \in V(t_*) : \|u\| \leq b\}$ şi definesc operatorul $T : C \to C$ prin formula

$$\begin{aligned}(Tu)(t) &= u_0 + a(t-t_*) + (t-t_*)\int_{t_*}^{\infty} f(s,u(s),u'(s))ds \\ &\quad - \int_{t_*}^{t}(t-s)f(s,u(s),u'(s))ds, \qquad t \geq t_*.\end{aligned}$$

Din (1.6) rezultă că pentru orice $t \geq t_*$

$$\begin{aligned}\left|(Tu)'(t)\right| &\leq |a| + \int_{t}^{\infty}\left|f(s,u(s),u'(s))\right|ds \\ &\leq |a| + (p_1(b)+p_2(b))\int_{t_*}^{\infty} h(s)ds\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\frac{|(Tu)(t)|}{t} &\leq \frac{|u_0|}{t_*} + |a| + \int_{t_*}^{\infty}\left|f(s,u(s),u'(s))\right|ds \\ &\quad + \int_{t_*}^{t}\left|f(s,u(s),u'(s))\right|ds \\ &\leq \frac{|u_0|}{t_*} + |a| + 2(p_1(b)+p_2(b))\int_{t_*}^{\infty} h(s)ds.\end{aligned}$$

Astfel, obţinem următoarea estimare a normei operatororului T :

$$\begin{aligned}\|Tu\| &\leq \frac{|u_0|}{t_*} + 2\,|a| + 3(p_1(b)+p_2(b))\int_{t_*}^{\infty} h(s)ds \\ &< (1-\lambda)b + \lambda b = b,\end{aligned}$$

ceea ce arată că T este bine definit.

În continuare, avem de demonstrat că operatorul T este continuu şi că mulţimea $T(C)$ este relativ compactă. Pentru aceasta, fixez $\varepsilon > 0$. Conform (1.7) există $t_\varepsilon > t_*$ astfel ca

$$\int_{t_\varepsilon}^{\infty} h(s)ds < \frac{\varepsilon}{9(p_1(b)+p_2(b))}.$$

Deoarece funcţia $f : [t_*,t_\varepsilon] \times [-t_\varepsilon b, t_\varepsilon b] \times [-b,b] \to \mathbb{R}$ este uniform continuă va exista $\eta_\varepsilon > 0$ cu proprietatea că

$$|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| < \frac{\varepsilon}{9t_\varepsilon}$$

pentru orice $t \in [t_*,t_\varepsilon]$, orice u_1, $u_2 \in [-t_\varepsilon b, t_\varepsilon b]$ satisfăcând $|u_1 - u_2| < \eta_\varepsilon$ şi orice v_1, $v_2 \in [-b,b]$ satisfăcând $|v_1 - v_2| < \eta_\varepsilon$.

Un calcul direct conduce la estimările următoare

$$\begin{aligned}
&\big|(Tu)'(t)-(Tv)'(t)\big| \le \int_{t_*}^{\infty}\big|f(s,u(s),u'(s))-f(s,v(s),v'(s))\big|ds\\
&\le \int_{t_*}^{t_\varepsilon}\big|f(s,u(s),u'(s))-f(s,v(s),v'(s))\big|ds+\int_{t_\varepsilon}^{\infty}\big|f(s,u(s),u'(s))\big|ds\\
&\quad+\int_{t_\varepsilon}^{\infty}\big|f(s,v(s),v'(s))\big|ds\\
&\le \frac{\varepsilon}{9t_\varepsilon}(t_\varepsilon-t_*)+2(p_1(b)+p_2(b))\int_{t_\varepsilon}^{\infty}h(s)ds<\frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
&\frac{|(Tu)(t)-(Tv)(t)|}{t} \le \int_{t_*}^{\infty}\big|f(s,u(s),u'(s))-f(s,v(s),v'(s))\big|ds\\
&\quad+\int_{t_*}^{t}\big|f(s,u(s),u'(s))-f(s,v(s),v'(s))\big|ds\\
&\le 2\int_{t_*}^{\infty}\big|f(s,u(s),u'(s))-f(s,v(s),v'(s))\big|ds<2\frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

care sunt valabile pentru orice $t \ge t_\varepsilon$ şi orice u, $v \in C$ satisfăcând $\|u-v\| < \eta_\varepsilon/t_\varepsilon$. Ţinând seama de definiţia normei în $V(t_0)$, concludem că

$$\|Tu-Tv\| \le \varepsilon$$

pentru orice u, $v \in C$ satisfăcând $\|u-v\| < \delta(\varepsilon) = \eta_\varepsilon/t_\varepsilon$. Aşadar, continuitatea operatorului T este stabilită.

Ca să stabilim relativa compactitate a lui $T(C)$ trebuie să arătăm că aceasta satisface ipotezele (i)(a), (i)(b), (ii)(a), (ii)(b) şi (iii)(a) ale Propoziţiei 6. Mai întâi, remarc că cerinţele (i)(a) şi (i)(b) rezultă din $T(C) \subset C$.

Verificarea condiţiilor (ii)(a) şi (ii)(b), pentru orice $t_2 \ge t_1 \ge t_*$ şi orice $u \in C$, conduce la estimările:

$$\begin{aligned}
\big|(Tu)'(t_2)-(Tu)'(t_1)\big| &\le \int_{t_1}^{t_2}\big|f(s,u(s),u'(s))\big|ds\\
&\le [p_1(b)+p_2(b)]\int_{t_1}^{t_2}h(s)ds
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(Tu)(t_2)}{t_2}-\frac{(Tu)(t_1)}{t_1}\right| \le |u_0|\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)+|a|t_*\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)\\
&+t_*\left(\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right)\int_{t_*}^{\infty}\big|f(s,u(s),u'(s))\big|ds\\
&+\left|\int_{t_*}^{t_2}\frac{(t_2-s)}{t_2}f(s,u(s),u'(s))ds-\int_{t_*}^{t_1}\frac{(t_1-s)}{t_1}f(s,u(s),u'(s))ds\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq [|u_0| + |a| t_* + t_*(p_1(b) + p_2(b))H]\,(t_2 - t_1) \\
&\quad + \int_{t_1}^{t_2} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds + \int_{t_1}^{t_2} \frac{s}{t_2} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds \\
&\quad + \int_{t_*}^{t_1} s(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}) \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds \\
&\leq [u_0 + |a| t_* + t_* H(p_1(b) + p_2(b))]\,(t_2 - t_1) \\
&\quad +2 \int_{t_1}^{t_2} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds + (t_2 - t_1) \int_{t_*}^{t_1} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds \\
&\leq [|u_0| + |a| t_* + H(1 + t_*)(p_1(b) + p_2(b))](t_2 - t_1) \\
&\quad +2(p_1(b) + p_2(b)) \int_{t_1}^{t_2} h(s) ds.
\end{aligned}$$

Cerinţele (ii)(a) şi (ii)(b) rezultă deci din aceste estimări şi din condiţia (1.7).

Pentru a verifica ipoteza (iii)(a) din Propoziţia 6, observ că

$$\begin{aligned}
\left|(Tu)'(t) - a\right| &\leq \int_t^\infty \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds \\
&\leq [p_1(b) + p_2(b)] \int_t^\infty h(s) ds
\end{aligned}$$

pentru orice $t \geq t_*$ şi orice $u \in C$ datorită faptului că

$$a_{Tu} = a + \lim_{t \to +\infty} \int_t^\infty f(s,u(s),u'(s)) ds = a$$

pentru orice $u \in C$.

Astfel, toate presupunerile din Propoziţia 6 sunt verificate şi concludem că mulţimea $T(C)$ este relativ compactă. În consecinţă, putem aplica teorema Schauder-Tikhonov, conform căreia operatorul T are un punct fix $u(t)$ în C. Acest punct fix este soluţia problemei bilocale

$$\begin{cases} u'' + f(t,u,u') = 0, & t \geq t_*, \\ u(t_*) = u_0, \\ \lim_{t \to +\infty} u'(t) = a. \end{cases} \tag{1.25}$$

Pasul 2. Notez cu $u(t; u_0, a)$ soluţia problemei (1.25) a cărei existenţă a fost stabilită la Pasul 1. Fie acum problema Cauchy

$$\begin{cases} u'' + f(t,u,u') = 0, & t \geq t_0, \\ u(t_*) = u_0, \\ u'(t_*) = u_1, \end{cases} \tag{1.26}$$

unde u_1 desemnează mărimea $u'(t_*; u_0, a)$. Voi arăta că problema (1.26) are o soluţie în $[t_0, t_*]$. Fie operatorul $T : C^1([t_0, t_*], \mathbb{R}) \to C^1([t_0, t_*], \mathbb{R})$ definit prin formula

$$(Tu)(t) = u_0 - u_1(t_* - t) - \int_t^{t_*} (s - t) f(s,u(s),u'(s)) ds, \qquad t \in [t_0, t_*].$$

Aplicând Lema 5 şi folosind argumente similare celor utilizate la Pasul 1, nu este dificil să se arate că pentru orice submulţime mărginită M a lui $C^1([t_0,t_*],\mathbb{R})$ operatorul $T: M \to C^1([t_0,t_*],\mathbb{R})$ este uniform continuu în timp ce mulţimea $T(M)$ este relativ compactă. Spre a simplifica detaliile, în locul inegalitaăţii (1.6) poate fi folosită următoarea inegalitate mai permisivă

$$
\begin{aligned}
|f(t,u,v)| &\le h(t)\left[p_1\left(\frac{|u|}{t}\right)+p_2(|v|)\right] \\
&\le h(t)[p_1(|u|)+p_2(|v|)].
\end{aligned}
$$

Conform Lemei 3, ca să dovedim că operatorul T are un punct fix în $C^1([t_0,t_*],\mathbb{R})$, trebuie stabilită mărginirea mulţimii

$$E(T)=\{x\in C^1([t_0,t_*],\mathbb{R}): x=\lambda Tx, \qquad 0<\lambda<1\}.$$

În acest scop, fixăm funcţia $u\in E(T)$. Atunci există $\lambda\in(0,1)$ astfel ca

$$u(t)=\lambda u_0-\lambda u_1(t_*-t)-\lambda\int_t^{t_*}(s-t)f(s,u(s),u'(s))ds,$$

pentru orice $t\in[t_0,t_*]$. Din această inegalitate rezultă că

$$|u(t)|\le|u_0|+|u_1|t_*+\int_t^{t_*}sh(s)[p_1(|u(s)|)+p_2(\left|u'(s)\right|)]ds \tag{1.27}$$

şi

$$\left|u'(t)\right|\le|u_1|+\int_t^{t_*}h(s)[p_1(|u(s)|)+p_2(\left|u'(s)\right|)]ds \tag{1.28}$$

pentru orice $t\in[t_0,t_*]$.

Introducând, pentru $s\ge 0$, următoarea notaţie

$$K=t_0+|u_0|+(1+t_*)|u_1|, \qquad z(t)=|u(t)|+\left|u'(t)\right|,$$

$$g(s)=p_1(s)+p_2(s),$$

inegalităţile (1.27) şi (1.28) pot fi scrise sub forma

$$z(t)\le K+\int_t^{t_*}sh(s)g(z(s))ds, \qquad t\in[t_0,t_*].$$

Aplicând acum Lema 4, partea (i), concludem că

$$z(t)\le G^{-1}(G(K)+t^*H)=K_*<+\infty$$

pentru orice $t\in[t_0,t_*]$. Aceasta implică faptul că $\|u\|\le K_*$ pentru orice $u\in E(T)$. Astfel, am demonstrat că mulţimea $E(T)$ este mărginită. De aceea, aplicând teorema lui Schaefer (Lema 3), rezultă că operatorul T are un punct fix $u(t)$ în $C^1([t_0,t_*],\mathbb{R})$ iar că acest punct fix este soluţia problemei de valori finale (1.26).

Pasul 3. Fie $v(t;u_0,u_1)$ soluţia problemei (1.26) a cărei existenţă a fost stabilită la Pasul 2. Atunci, funcţia $u(t)$ dată prin

$$u(t) = \begin{cases} v(t;u_0,u_1),\ t \in [t_0,t_*], \\ u(t;u_0,a), \quad\ t \geq t_* \end{cases}$$

este soluţia căutată a problemei de valori iniţiale (1.9). Demonstraţia Teoremei 4 s-a încheiat. □

Demonstraţia Teoremei 3. Definim operatorul $T : V(t_0) \to V(t_0)$ prin formula

$$(Tu)(t) = u_0 + u_1(t-t_0) - \int_{t_0}^{t} (t-s)f(s,u(s),u'(s))ds, \qquad t \geq t_0. \tag{1.29}$$

La fel ca în demonstraţia Teoremei 4, se arată că operatorul T este complet continuu. Apoi se verifică ipotezele Propoziţiei 6, arătându-se astfel că mulţimea $T(C)$ este relativ compactă. Aplicarea Lemei 4, partea (i), va conduce apoi la concluzia că mulţimea $E(T)$ este mărginită. Astfel, conform teoremei lui Schaefer (Lema 3), operatorul T are un punct fix $u(t)$ în $V(t_0)$ care corespunde soluţiei ec. (1.1) cu comportamentul asimptotic dorit. □

Demonstraţia Teoremei 5. Modelul demonstraţiei este cel al Teoremei 4, însă operatorul dat de (1.29) este definit acum în $W(t_0)$. Se aplică Propoziţia 7 pentru verificarea relativei compactităţi a mulţimii $T(C)$ în $W(t_0)$. □

Demonstraţia Teoremei 6. Definim operatorul $T : W(t_0) \to W(t_0)$ prin formula

$$(Tu)(t) = at + b + \int_{t}^{\infty} (t-s)f(s,u(s),u'(s))ds, \qquad t \geq t_0.$$

La fel ca pentru Teorema 4, se arată că operatorul T este complet continuu. Verificând că ipotezele Propoziţiei 7 sunt valabile, se stabileşte că mulţimea $T(C)$ este relativ compactă. Un calcul similar celui de la demonstraţia Teoremei 4 şi aplicarea Lemei 4, partea (ii), implică faptul că mulţimea $E(T)$ este mărginită. Rămâne de aplicat teorema lui Schaefer (Lema 3) spre a conclude că operatorul T are un punct fix $u(t)$ în $W(t_0)$ corespunzând soluţiei ec. (1.1) cu alura asimptotică dorită. □

1.5 Discuţii şi alte rezultate

1.5.1 Cazul $G(+\infty) < +\infty$

Ecuaţia diferenţială neliniară

$$u'' - \frac{2}{t^4}u^2 = 0, \qquad t \geq 1 \tag{1.30}$$

a fost considerată de Meng [34] ca un contraexemplu pentru rezultatul raportat de Tong [44, Teorema 2]. Avem

$$h(t) = \frac{2}{t^2}, \qquad p_1(s) = s^2 + \frac{1}{2}, \qquad p_2(s) = \frac{1}{2},$$

şi este uşor de verificat că toate ipotezele Teoremei 3 sunt satisfăcute pentru ec. (1.30) cu excepţia presupunerii cruciale

$$G(+\infty) = +\infty. \tag{1.31}$$

Ca urmare a nerespectării cerinţei (1.31), nu toate soluţiile ec. (1.30) vor avea comportamentul asimptotic pseudo-liniar dorit la infinit, o asemenea soluţie fiind $u(t) = t^2$.

Alt exemplu este oferit de binecunoscuta ecuaţie Emden-Fowler superliniară ($\lambda > 1$)

$$u'' - a_\lambda(t)\,|u|^\lambda \operatorname{sign} u(t) = 0, \qquad t \geq 1, \tag{1.32}$$

unde funcţia $a_\lambda(t)$ este dată astfel:

$$a_\lambda(t) = \begin{cases} 2(\lambda-1)^{-2}(\lambda+1), & t \in [1,2], \\ (\lambda-1)^{-2}(\lambda+1)(4-t), & t \in [2,4], \\ 0, & t \geq 4. \end{cases}$$

Este uşor de verificat că restricţia (1.31) nu are loc pentru ec. (1.32). Un calcul direct arată că această ecuaţie admite soluţia unică $u_\lambda(t)$ pentru data iniţială $u_0 = 1$, $u_1 = 2/(\lambda-1)$ definită prin formula

$$u_\lambda(t) = \left(\frac{1}{2-t}\right)^{2/(\lambda-1)}, \qquad t \in [1,2).$$

Evident, această soluţie nu poate fi prelungită la infinit.

Acestea şi multe alte exemeple conduc la concluzia că, în absenţa condiţiei (1.31), varii inconsistenţe privind existenţa globală a soluţiilor ec. (1.1) în viitor pot interveni.

Aşa cum s-a menţionat în Introducere, mai multe rezultate aparţinând lui Dannan [14], S. Rogovchenko şi Y. Rogovchenko [38], Waltman [46] s-au ocupat cu studiul următoarei chestiuni: Care este alegerea datelor iniţiale (u_0, u_1) în planul fazelor (u, u') care asigură comportamentul pseudo-liniar la infinit atunci când presupunerea (1.31) nu este verificată?

Următorul rezultatul investighează comportamentul asimptotic al soluţiilor ec. (1.1) atunci când condiţia (1.31) nu are loc.

Teorema 7 *Presupunem că sunt valabile condiţiile* (1.6) *şi* (1.7).

Atunci, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există $t_a > t_0$ şi cel puţin o soluţie $u(t)$ a ec. (1.1) *definită pe $[t_a, +\infty)$ cu reprezentarea asimptotică $u(t) = at + o(t)$ când $t \to +\infty$.*

Demonstraţie. Fie $b = 6|a| + 2$ şi $\lambda = \frac{1}{2}$. Din (1.7) rezultă că există $t_a > t_0$ astfel ca

$$\int_{t_a}^{\infty} h(s)ds < \lambda \frac{b}{3(p_1(b) + p_2(b))}.$$

Aleg $u_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât $|u_0| < |a| + 1$. Atunci,

$$\frac{|u_0|}{t_a} + 2|a| \le |u_0| + 2|a| < (1-\lambda)b.$$

Restul demonstraţiei este similar celei al Teoremei 4. □

Următorul rezultat extinde Teorema 1 datorată lui Waltman [46].

Corolarul 1 *Fie n un număr natural. Presupunem că funcţia $a(t)$ este continuă şi verifică*

$$\int^{\infty} t^{2n+1}|a(t)|dt < +\infty.$$

Atunci, pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$ există $t_a > t_0$ şi o soluţie $x(t)$ a ecuaţiei

$$u'' + a(t)u^{2n+1} = 0, \qquad t \ge t_0, \tag{1.33}$$

definită pe $[t_\alpha, \infty)$ care are proprietatea că

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t} = \alpha.$$

Demonstraţie. Fie $h(t) = t^{2n+1}|a(t)|$, $p_1(s) = s^{2n+1} + 1$, $p_2(s) = 1$. Atunci, concluzia corolarului decurge din Teorema 7. □

Următorul rezultat stabileşte condiţii viabile în care ecuaţia diferenţială neliniară

$$u'' + f(t,u) = 0, \qquad t \ge t_0, \tag{1.34}$$

are soluţii asimptotic constante.

Teorema 8 *Presupunem că funcţia $f(t,u)$ satisface următoarele condiţii:*

(i) *$f(t,u)$ este continuă în $D = \{(t,u) : t \in [t_0, +\infty),\ u \in \mathbb{R}\}$, unde $t_0 \ge 1$;*

(ii) *există funcţiile continue h_1, h_2, $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ astfel ca*

$$|f(t,u)| \le h_1(t)g\left(\frac{|u|}{t}\right) + h_2(t),$$

unde, pentru $s > 0$, funcţia $g(s)$ este pozitivă şi nedescrescătoare;

(iii) *există un număr pozitiv m astfel ca*

$$0 \le g(s) \le ms$$

pentru orice $s \in [0,\varepsilon]$ şi pentru $\varepsilon > 0$ dat;

(iv) *funcţiile h_1 şi h_2 satisfac condiţiile*

$$\int_{t_0}^{\infty} h_1(s)ds = H_1 < +\infty \qquad \textit{şi} \qquad \int_{t_0}^{\infty} sh_2(s)ds = H_2 < +\infty.$$

Atunci,

(a) pentru $\lambda \in (0,1)$ *există* $t_\lambda > t_0$ *astfel ca pentru orice* $b \in \mathbb{R}$ *satisfăcând* $|b| < (1-\lambda)\varepsilon$ *ec. (1.34) să aibă o soluţie* $u(t;b)$ *definită pe* $[t_\lambda, +\infty)$ *cu reprezentarea asimptotică* $u(t) = b + o(1)$ *când* $t \to +\infty$*;*

(b) pentru orice $b \in \mathbb{R}$ *satisfăcând* $|b| < \varepsilon$ *există* $t_b > t_0$ *astfel ca ec. (1.34) să aibă o soluţie* $u(t;b)$ *definită pe* $[t_b, +\infty)$ *cu alura asimptotică* $u(t) = b + o(1)$ *când* $t \to +\infty$*.*

Demonstraţie. Stabilim numai partea (b) deoarece demonstraţia sa o include pe cea a părţii (a). Fie $\varepsilon > 0$. Fixăm b satisfăcând $|b| < \varepsilon$ şi alegem $\lambda_b \in (0,1)$ astfel ca $|b| < (1-\lambda)\varepsilon$. Presupunerea (iv) a teoremei implică existenţa numărului $c = t_\lambda(\lambda, m) = t_b > t_0$ astfel încât

$$\int_{t_\lambda}^{\infty} h_1(s)ds < \frac{\lambda}{2m} \qquad \text{şi} \qquad \int_{t_\lambda}^{\infty} sh_2(s)ds < \frac{\lambda}{2}\varepsilon.$$

Consider mulţimea $D_\lambda = \{u \in A(t_\lambda) : \|u\| \leq \varepsilon\}$ şi definesc operatorul integral $T : D_\lambda \to A(t_\lambda)$ prin formula

$$(Tu)(t) = b + \int_t^{\infty} (t-s) f(s, u(s))ds, \qquad t \geq t_\lambda.$$

Pentru orice $t \geq t_\lambda$ avem

$$\begin{aligned}
&\int_t^{\infty} (s-t)\,|f(s,u(s))|\,ds \leq \int_t^{\infty} s\left[h_1(s)g\left(\frac{|u(s)|}{s}\right) + h_2(s)\right]ds \\
&\leq \int_t^{\infty} h_1(s)sg\left(\frac{\varepsilon}{s}\right)ds + \int_t^{\infty} sh_2(s)ds \\
&\leq m\varepsilon \int_t^{\infty} h_1(s)ds + \int_t^{\infty} sh_2(s)ds \leq m\varepsilon\frac{\lambda}{2m} + \frac{\lambda}{2}\varepsilon = \lambda\varepsilon.
\end{aligned}$$

Din ultima estimare rezultă că operatorul T este bine definit şi că $T(D_\lambda) \subset D_\lambda$.

Restul demonstraţiei urmăreşte etapele demonstraţiei de la Teorema 4. □

Următorul rezultat întăreşte teorema corespunzătoare datorată lui Waltman [46, Teorema 4].

Corolarul 2 *Fie* $a(t)$ *o funcţie continuă astfel ca*

$$\int^{\infty} t^{2n+1}|a(t)|\,dt < +\infty.$$

Atunci, pentru orice $\beta \in \mathbb{R}$ *satisfăcând* $|\beta| < 1$ *există* $t_\beta > t_0$ *astfel încât ec. (1.33) are o soluţie* $u(t;\beta)$ *definită pe* $[t_\beta, +\infty)$ *cu alura asimptotică* $u(t;\beta) = \beta + o(1)$ *când* $t \to +\infty$*.*

Demonstraţie. Fie $m = \varepsilon = 1$, $h_1(t) = t^{2n+1}|a(t)|$, $g(s) = s^{2n+1}$, $h_2(t) = 0$. Concluzia corolarului decurge din Teorema 8. □

Să ne întoarcem la ec. (1.30). Un calcul direct arată că inegalitatea (1.23) ia forma

$$\frac{2}{t_*} < \lambda \frac{b}{3(b^2+1)}. \tag{1.35}$$

Pe de altă parte, din inegalitatea (1.24) rezultă că

$$t_* + 2|a| < (1-\lambda)b. \tag{1.36}$$

Remarc că $u_0 = u(t_*)$. Comparând relaţiile (1.35) şi (1.36) se ajunge la o contradicţie: $t_* < b < t_*$. Aceasta explică de ce existenţa soluţiei $u(t) = t^2$ a ec. (1.30) cu un comportament asimptotic diferit de cel pseudo-liniar nu contrazice concluziile Teoremei 7.

Aşadar, în lipsa condiţiei (1.31), chiar ecuaţiile neliniare cu forme simple pot avea soluţii cu un comportament asimptotic complicat. Din contraexemplul dat de Meng [34] ori Teoremele 7 şi 8 rezultă că, în ciuda înfăţişării ei simple, ec. (1.30) are cel puţin trei tipuri de semitraiectorii pozitive:

(a) soluţii cu derivata tinzând la $+\infty$;
(b) soluţii cu comportament asimptotic pseudo-liniar;
(c) soluţii asimptotic constante.

1.5.2 *Necesitatea condiţiilor*

În această subsecţiune discut necesitatea condiţiei (1.7). Consider ecuaţia diferenţială neliniară

$$u'' + h(t)\left[p_1\left(\frac{|u|}{t}\right) + p_2(|u'|)\right] = 0, \qquad t \geq t_0, \tag{1.37}$$

unde funcţiile $p_1(s)$, $p_2(s)$ satisfac ipotezele Teoremei 3 (cu excepţia condiţiei (1.31)) iar funcţia $h(t)$ este continuă şi nenegativă. Presupun că ec. (1.37) are o soluţie $u(t)$ definită pe $[t_0, +\infty)$ cu alura asimptotică $u'(t) = O(1)$ când $t \to +\infty$.

Din (1.37) rezultă că

$$a_u = u'(t_0) - \int_{t_0}^{\infty} h(s)\left[p_1\left(\frac{|u(s)|}{s}\right) + p_2(|u'(s)|)\right] ds.$$

Aceasta implică

$$\int_{t_0}^{\infty} h(s)ds \leq \frac{u'(t_0) - a_u}{p_1(0) + p_2(0)} < +\infty,$$

i.e. necesitatea condiţiei (1.7).

Nu este surprinzător că folosirea inegalităţilor de tipul (1.6) în locul unei formule precise a ec. (1.1) face ipotezele Teoremelor 3 – 6 din acest capitol mai restrictive în comparaţie cu ipotezele multor teoreme dedicate cazurilor particulare ale acestei ecuaţii. Un exemplu relevant este oferit de lucrarea lui Hallam [19] unde ecuaţia

$$y'' = a(t)y + f(t,y) \tag{1.38}$$

este investigată în anumite ipoteze de tip integral asupra lui $a(t)$ şi cu funcţia $f(t,y)$ satisfăcând condiţia Lipschitz

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \le w(t)\,|y_1 - y_2|\,,$$

unde $w(t)$ este o funcţie continuă şi nenegativă. Ipotezele integrale originale asupra neliniarităţii $f(t,y)$ sunt

$$\int^{\infty} tw(t)dt < +\infty \qquad \text{şi} \qquad \int^{\infty} t\,|f(t,0)|\,dt < +\infty.$$

Aceste condiţii sunt similare celor din Teorema 8, dar presupunerile cu privire la $a(t)$ făcute de Hallam sunt mult mai puţin restrictive. Însă, tehnica sa depinde esenţial de faptul că ec. (1.38) are o parte liniară. Dacă facem $a(t) = 0$ pentru $t \ge t_0$ în teorema lui Hallam, aceasta se reduce la un caz particular al rezultatelor raportate în capitolul de faţă.

Aşadar, atunci când suntem interesaţi de soluţii ale ec. (1.1) cu un comportament pseudo-liniar la infinit nu putem folosi a presupunere de tipul (1.6) fără a avea şi condiţia (1.7).

1.5.3 Cazul liniar

Această secţiune conţine o demonstraţie alternativă a rezultatului binecunoscut obţinut de Bôcher [6] şi, sub o formă diferită, de Haupt [25] şi prezentat cu anumite modificări în Bellman [2, Teorema 5, p.114] şi Hartman [20, Corolarul 9.1, p. 380].

Teorema 9 *Presupunem că funcţia $a(t)$ este continuă şi verifică cerinţa*

$$\int^{\infty} t\,|a(t)|\,dt < +\infty.$$

Atunci, soluţia generală a ecuaţiei

$$u'' + a(t)u = 0, \qquad t \ge t_0,$$

este asimptotică la $d_0 + d_1 t$ când $t \to +\infty$, i.e. $u(t) = d_1 t + o(t)$ când $t \to +\infty$, unde d_0, d_1 sunt constante reale. Mai mult, dacă

$$\int^{\infty} t^2\,|a(t)|\,dt < +\infty,$$

avem $u(t) = d_1 t + d_0 + o(1)$ *când* $t \to +\infty$.

Demonstraţie. Fie $k > 0$. Atunci, spaţiul $V(t_0)$ poate fi dotat cu următoarea normă de tip Bielecki

$$\begin{aligned}\|u\|_k = &\sup_{t\geq t_0}\left[\frac{|u(t)|}{t}\exp\left(-k\int_{t_0}^{t}h_1(s)ds\right)\right]\\ &+\sup_{t\geq t_0}\left[\left|u'(t)\right|\exp\left(-k\int_{t_0}^{t}h_1(s)ds\right)\right]\end{aligned}$$

pentru orice $u \in V(t_0)$, unde $h_1(s) = s\,|a(s)|$ şi

$$\int_{t_0}^{\infty} h_1(s)ds = H < +\infty.$$

În mod similar, norma în $W(t_0)$ este definită de

$$\begin{aligned}\|u\|_k = &\sup_{t\geq t_0}\left[\frac{|u(t)|}{t}\exp\left(-k\int_{t_0}^{t}h_2(s)ds\right)\right]\\ &+\sup_{t\geq t_0}\left[\left|u'(t)\right|\exp\left(-k\int_{t_0}^{t}h_2(s)ds\right)\right]\\ &+\sup_{t\geq t_0}[|u(t)-a_u t|\exp(-kH)]\end{aligned}$$

pentru orice $u \in W(t_0)$, unde $h_2(s) = s^2\,|a(s)|$ şi

$$\int_{t_0}^{\infty} h_2(s)ds = H^* < +\infty.$$

Un calcul direct arată că operatorul T definit prin formula

$$(Tu)(t) = u_0 + u_1(t-t_0) - \int_{t_0}^{t}(t-s)a(s)u(s)ds, \qquad t \geq t_0,$$

satisface condiţia Lipschitz de constantă $L = 2/k$ dacă acţionează în $(V(t_0), \|.\|_k)$ şi de constantă $L = 3/k$ dacă acţionează în $(W(t_0), \|.\|_k)$.

Operatorul T este o contracţie pentru $k > 3$ iar concluzia rezultă din teorema de punct fix a lui Banach (vezi, de exemplu, Cronin [13, p. 141] sau Kartsatos [27, p. 19]). Demonstraţia s-a încheiat. □

Referinţe Bibliografice

1. Avramescu, C.: Sur l'existence des solutions convergentès de systèmes d'équations différentielles non linéaires. Ann. Mat. Pura Appl. **81**, 147–168 (1969)
2. Bellman, R.: Stability theory of differential equations. McGraw-Hill, London (1953)
3. Bernstein, S.N.: Sur certaines equations differentielles ordinaires du second ordre. Compt. Rend. Acad. Sci. Paris **138**, 950–951 (1904)
4. Bihari, I.: A generalization of a lema of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **7**, 83–94 (1956)
5. Bihari, I.: Researches of the boundedness and stability of the solutions of non-linear differential equations. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **8**, 261–278 (1957)
6. Bôcher, M.: On regular singular points of linear differential equations of second order whose coefficients are not necessarily analytic. Trans. Amer. Math. Soc. **1**, 40–52 (1900)
7. Brauer, F., Nohel, J.A.: The qualitative theory of ordinary differential equations: An introduction. Dover, New York (1989)
8. Cohen, D.S.: The asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. **18**, 607–609 (1967)
9. Constantin, A.: Some observations on a Conti's result. Atti Accad. Naz. Lincei Ser. Mat. Appl. **2**, 137–145 (1991)
10. Constantin, A.: On the asymptotic behavior of second order nonlinear differential equations. Rend. Mat. Appl. **13**, 627–634 (1993)
11. Conti, R.: Sulla prolungabilità delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie. Boll. Un. Mat. Ital. **11**, 510–514 (1956)
12. Corduneanu, C.: Principles of differential and integral equations. Chelsea Publ. Comp., The Bronx, New York (1977)
13. Cronin, J.: Fixed points and topological degree in nonlinear analysis. Math. Surv. Monogr. **11**, AMS, Providence, R.I. (1964)
14. Dannan, F.M.: Integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations. J. Math. Anal. Appl. **108**, 151–164 (1985)
15. Deo, S.G. , Raghavendra, V.: Ordinary differential equations and stability theory. Tata McGraw-Hill, New Delhi (1980)
16. Dugundji, J., Granas, A.: Fixed point theory. Vol. 1, Monogr. Matemat. **61**, PWN, Warszawa (1982)
17. Fubini, G.: Studi asintotici per alcune equazioni differenziali. Rend. Reale Accad. Lincei **25**, 253–259 (1937)
18. Gallavotti, G.: The elements of mechanics. Springer, New York (1983)
19. Hallam, T.G.: Asymptotic integration of second order differential equation with integrable coefficients. SIAM J. Appl. Math. **19**, 430–439 (1970)
20. Hartman, P.: Ordinary differential equations. J. Wiley & Sons, New York (1964)

21. Hartman, P., Wintner, A.: On the non-increasing solutions of $y'' = f(x,y,y')$. Amer. J. Math. **73**, 390–404 (1951)
22. Hartman, P., Wintner, A.: On non-oscillatory linear differential equations. Amer. J. Math. **75**, 717–730 (1953)
23. Hartman, P., Wintner, A.: Linear differential equations with completely monotone solutions. Amer. J. Math. **76**, 199–206 (1954)
24. Hartman, P., Wintner, A.: On non-oscillatory linear differential equations with monotone coefficients. Amer. J. Math. **76**, 207–219 (1954)
25. Haupt, O.: Über das asymptotische verhalten der lösungen gewisser linearer gewöhnlieher differentialgleichungen. Math. Z. **48**, 289–292 (1942)
26. Hille, E.: Non-oscillation theorems. Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 234–252 (1948)
27. Kartsatos, A.G.: Advanced ordinary differential equations. Mariner Publ. Comp., Inc., Tampa, FL (1980)
28. Kato, J., Strauss, A.: On the global existence of solutions and Liapunov functions. Ann. Mat. Pura Appl. **77**, 303–316 (1967)
29. Kusano, T., Naito, M., Usami, H.: Asymptotic behavior of a class of second order nonlinear differential equations. Hiroshima Math. J. **16**, 149–159 (1986)
30. Kusano, T., Trench, W.F.: Global existence theorems for solutions of nonlinear differential equations with prescribed asymptotic behavior. J. Lond. Math. Soc. **31**, 478–486 (1985)
31. Kusano, T., Trench, W.F.: Existence of global solutions with prescribed asymptotic behavior for nonlinear ordinary differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. **142**, 381–392 (1985)
32. Kusano, T., Trench, W.F.: Global existence of nonoscillatory solutions of perturbed general disconjugate equations. Hiroshima Math. J. **17**, 415–431 (1987)
33. LaSalle, J.P., Lefschetz, S.: Stability by Liapunov's direct method with applications. Academic Press, New York (1961)
34. Meng, F.W.: A note on Tong paper: The asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations of second order. Proc. Amer. Math. Soc. **108**, 383–386 (1990)
35. Moore, R., Nehari, Z.: Nonoscillation theorems for a class of nonlinear differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **93**, 30–52 (1959)
36. Nagumo, M.: Über die Differentialgleichung $y'' = f(x,y,y')$. Proc. Phys. Math. Soc. Japan **19**, 861–866 (1937)
37. Nehari, Z.: On a class of nonlinear second-order differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 101–123 (1960)
38. Rogovchenko, S.P., Rogovchenko, Y.V.: Asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations. Dynam. Systems Appl. **10**, 185–200 (2001)
39. Rogovchenko, Y.V.: On the asymptotic behavior of solutions for a class of second order nonlinear differential equations. Collect. Math. **49**, 113–120 (1998)
40. Rogovchenko, Y.V., Villari, G.: Asymptotic behavior of solutions for second order nonlinear autonomous differential equations. NoDEA - Nonlinear Diff. Eqs. Appl. **4**, 271–282 (1997)
41. Sansone, G.: Equazioni differenziali nel campo reale. Zanichelli, Bologna (1948)
42. Souplet, P.: Existence of exceptional growing-up solutions for a class of non-linear second order ordinary differential equations. Asympt. Anal. **11**, 185–207 (1995)
43. Strauss, A.: A note on a global existence result of R. Conti. Boll. Un. Mat. Ital. **22**, 434–441 (1967)
44. Tong, J.: The asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations of second order. Proc. Amer. Math. Soc. **84**, 235–236 (1982)
45. Trench, W.F.: On the asymptotic behavior of solutions of second order linear differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. **14**, 12–14 (1963)
46. Waltman, P.: On the asymptotic behavior of solutions of a nonlinear equation. Proc. Amer. Math. Soc. **15**, 918–923 (1964)
47. Wong, J.S.W.: On second order nonlinear oscillation. Funkcial. Ekvac. **11**, 207–234 (1968)

Capitolul 2
Integrarea asimptotică a ecuaţiilor diferenţiale neliniare

Rezumat Scopul acestui capitol este dublu. Mai întâi este realizat un survol al literaturii privind un subiect aparte în teoria integrării asimptotice a ecuaţiilor diferenţiale ordinare: clasa ecuaţiilor de ordinul al II-lea cu neliniarităţi de tip Bihari. Apoi se stabilesc rezultate generale în legătură cu o condiţie recent folosită la anumite dezvoltări din teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale eliptice.

Sursă Agarwal, R.P., Djebali, S., Moussaoui, T., Mustafa, O.G.: On the asymptotic integration of nonlinear differential equations. J. Comput. Appl. Math. **202**, 352–376 (2007)

2.1 Istoric şi dezvoltări

În 1941, D. Caligo [16] publică o lucrare în care se stabileşte că, dată fiind o funcţie continuă cu valori reale $A(t)$ definită pe semiaxa pozitivă, soluţiile ecuaţiei liniare

$$y''(t) + A(t)y(t) = 0, \qquad t > 0, \tag{2.1}$$

satisfac condiţia

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{t} \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

în ipoteza că

$$|A(t)| < \frac{l}{t^{2+\rho}} \quad \text{pentru orice } t \text{ mare}, \tag{2.3}$$

unde $l, \rho > 0$ sunt date. Mai mult, dacă $\rho > 1$, soluţiile pot fi reprezentate asimptotic ca

$$y(t) = c_1 t + c_2 + o(1) \qquad \text{când } t \to +\infty, \qquad c_{1,2} \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Cazul când $\rho \in (0,1]$ primeşte un răspuns negativ vizavi de existenţa comportamentului (2.4) printr-un exemplu. Rezultatele lui Caligo extind teoreme precedente datorate lui Dini, Kneser, Sansone şi comentate în lucrarea sa.

Demonstraţiile din [16] se bazează pe stabilirea soluţiei unui sistem de ecuaţii integrale printr-un proces iterativ [16, p. 290], posibil datorită unei estimări speciale [16, p. 294] de tipul

$$\frac{|y(t)|}{t} < m + \frac{1}{2} \sup_{s \in [t_0,T]} \left[\frac{|y(s)|}{s} \right] \text{ pentru } t \in [t_0,T], \qquad m > 0. \tag{2.5}$$

Cazul lui (2.3) când $\rho > 1$ este discutat şi de J. Bitterlich-Willmann [12] în 1941 cu concluzii similare, mai precis existenţa limitelor

$$\lim_{t \to +\infty} y'(t), \qquad \lim_{t \to +\infty} \left[y(t) - ty'(t) \right].$$

O investigaţie amănunţită şi extinderea acestor rezultate este realizată de O. Haupt [40].

Lucrarea lui Caligo a suscitat un mare interes. În lucrarea lor din 1942, M. Boas, R. Boas Jr. şi N. Levinson [13] extind concluziile din [16] privind (2.2) la clasa mai largă de ecuaţii liniare

$$y''(t) + A(t)y(t) = B(t), \qquad t > 0, \tag{2.6}$$

unde $A(t)$ şi $B(t)$ sunt continue şi cu valori reale şi

$$\int_0^{+\infty} t\,|A(t)|\,dt < +\infty, \qquad \int_0^{+\infty} B(t)dt \text{ există,}$$

pe baza estimării (2.5) (vezi [13, Lema, p. 847]). Introducând funcţiile $A_{1,2}(t)$,

$$A_1(t) = \frac{1}{2}\left[|A(t)| + A(t)\right] = \max\left[A(t), 0\right],$$
$$A_2(t) = \frac{1}{2}\left[|A(t)| - A(t)\right] = -\min\left[A(t), 0\right],$$

concluzia (2.2) rămâne valabilă pentru soluţiile lui (2.6) chiar şi când avem doar ([13, p. 849])

$$\limsup_{t \to +\infty} t \int_t^{+\infty} A_1(s)ds < 1, \qquad \int_0^{+\infty} tA_2(t)dt < +\infty.$$

Mai mult, dacă

$$\int_0^{+\infty} tA_1(t)dt = +\infty$$

atunci $\lim_{t \to +\infty} y'(t) = 0$ pentru toate soluţiile $y(t)$ ale ec. (2.6). De asemeni, conform [86, p. 366], când

$$\int_0^{+\infty} A_2(t)dt < +\infty,$$

toate soluţiile $y(t)$ ec. (2.1) verifică

$$y'(t) = O\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \qquad \text{când } t \to +\infty$$

(aceasta se citeşte ca $A(t)$ *aparţine clasei* $\frac{1}{2}$ în terminologia lui Wintner) dacă şi numai dacă $A_1(t)$ este în aceeaşi clasă. Pentru mai multe detalii în legătură cu presupunerile anterioare asupra lui $A(x)$ în cazul ec. (2.1), vezi lucrarea din 1955 a lui P. Hartman şi A. Wintner [36].

Rezultatele lui D. Caligo, M. Boas, R. Boas Jr., N. Levinson au fost extinse pentru ecuaţii diferenţiale liniare neomogene de ordinul n de către J. Wilkins Jr. [85] şi O. Haupt [41]. Alte rezultate semnificative în aceastădirecţie se datorează lui A. Ghizzetti [29] şi P. Hartman [39] (vezi, de asemeni, referinţele lor punctând lucrări de O. Dunkel şi S. Faedo).

În 1947, R. Bellman publică un memoriu [8] asupra comportamentului asimptotic al soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale liniare în care rezultatul lui Haupt [41, p. 290] este abordat cu ajutorul *inegalităţilor integrale*. Mai precis, demonstraţia lui [8, Teorema 7] se bazează pe aplicarea binecunoscutei inegalităţi integrale Gronwall-Bellman [32, 7] pentru a obţine o estimare globală a mărimilor

$$\left|y'(t)\right| \qquad \text{şi} \qquad \frac{|y(t)|}{t}, \qquad t > 0,$$

date de soluţia $y(t)$ a ec. (2.1) (vezi [8, Eq. (8.11)]).

Simplitatea tehnicii lui Bellman are un impact considerabil asupra dezvoltării teoriei integrării asimptotice a ecuaţiilor diferenţiale ordinare. În 1957, urmând tipul de investigaţie al lui Bellman, Bihari [11, p. 277] analizează ecuaţia diferenţia-lă neliniară de ordinul al II-lea

$$y''(t) + a(t)\varphi(y(t)) = 0, \qquad t \geq t_0 \geq 1, \tag{2.7}$$

unde $a : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii continue,

$$\int_{t_0}^{+\infty} t\,|a(t)|\,dt < +\infty$$

şi există funcţia continuă nedescrescătoare $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ astfel încât $\omega(0) = 0$, $\omega(u) > 0$ pentru orice $u > 0$ şi

$$|\varphi(u)| \leq t\omega\left(\frac{|u|}{t}\right),\ u \in \mathbb{R}, t \geq t_0, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\omega(x)} = +\infty. \tag{2.8}$$

Conform [11, p. 275, nota de subsol 15], *"gradul de neliniaritate este atât de mare încât o discuţie pe bază de matrice* [adică, studiul comportamentului asimptotic al soluţiilor ec. (2.7) prin reducerea ecuaţiei la un sistem de ordinul întâi, nota mea] *este imposibilă”*. Abordarea directă în această chestiune, bazată pe inegalitatea integrală Bihari [10, pp. 83-84] care generalizează semnificativ inegalitatea Gronwall-Bellman, stabileşte că toate soluţiile $y(t)$ ale ec. (2.7) există în viitor şi satisfac (2.2). O investigaţie similară cu privire la probleme de stabilitate a fost, totuşi, realizată pentru perturbaţii ale sistemelor diferenţiale liniare de către M. Golomb [30]. Inegalitatea lui Golomb este probabil prima generalizare a inegalităţii integrale Bihari cunoscută în literatură. Literatura inegalităţilor integrale este imensă. Menţionez doar rezultatele lui B. Pachpatte [64] ca extinderi directe fine ale inegalităţii lui Bihari precum şi teoremele generale de comparaţie ale lui Z. Opial [61], B. Viswanatham [81] şi V. Headley [42] (vezi, de asemeni, [38, Corolarul 4.4, p. 29]). În 1964, P. Waltman [83] foloseşte inegalitatea lui Viswanatham ca să demonstreze existenţa unei soluţii $y(t)$ cu comportamentul asimptotic (2.2) pentru ec. (2.7) în cazul unei neliniarităţi de tip Emden-Fowler $\varphi(u) = u^{\gamma}$, unde $\gamma > 0$ (vezi şi [87] pentru o uşoară generalizare). O aplicaţie a inegalităţilor integrale generale la stabilirea anumitor rezultate de oscilaţii de tip Atkinson-Waltman-Butler type poate fi citită în [45]. Alte dezvoltări ale consideraţiilor anterioare se găsesc în lucrările lui F. Dannan [24] şi S. Rogovchenko şi Y. Rogovchenko [72].

Existenţa soluţiilor $y(t)$ ale ec. (2.7) astfel încât sau (2.2) sau (2.4) să aibă loc este investigată în profunzime de M. Naito [59] (vezi şi lista sa de referinţe) cu ajutorul unei *inegalităţi integrale Riccati* [59, Teorema 2.2], similar abordării din [45, Teorema 1]. La origini un produs al lui E. Hille şi A. Wintner, această tehnică poate fi găsită într-o lucrare celebră din 1952 a lui P. Hartman [35]. O prezentare comprehensivă a unor asemenea dezvoltări se găseşte în [51].

În 1963, J. Hale, P. Hartman şi N. Onuchic [33, 37] stabilesc câteva rezultate generale de existenţă pentru ecuaţiile diferenţiale ordinare neliniare de ordinul n. În lucrarea [33], existenţa soluţiilor $y(t)$ ale ecuaţiei diferenţiale de ordinul al II-lea

$$y''(t) + f(t, y(t), y'(t)) = 0, \qquad t \geq t_0 > 0, \tag{2.9}$$

unde $f(t,y,y')$ este continuă şi cu valori reale, ce pot fi exprimate asimptotic prin

$$y(t) = c + o(1),\ c \in \mathbb{R}, \qquad y'(t) = o\left(t^{-1}\right) \qquad \text{când } t \to +\infty$$

este demonstrată presupunând că

$$\left|f(t,y,y')\right| \leq h(t)F(|y|, |y'|), \tag{2.10}$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} h(t)F(\beta, \beta t^{-1})dt < +\infty \text{ pentru orice } \beta > 0, \tag{2.11}$$

cu $h(t)$ şi $F(|y|, |y'|)$ continue, nenegative (vezi [33, Teorema 2]). Existenţa soluţiilor $y(t)$ pentru (2.9) astfel încât

$$y(t_0) = a, \qquad \lim_{t\to+\infty} y'(t) = c, \qquad a, c \in \mathbb{R},$$

este stabilită în cazul când

$$|f(t, a+\eta_1(t)(t-t_0), \eta_2(t))| \le h(t), \qquad \int_{t_0}^{+\infty} h(t)dt \le M,$$

unde $h(t), \eta_{1,2}(t)$ sunt continue şi nenegative şi

$$\eta_{1,2}(t) \in [|c| - M, |c| + M]$$

pentru orice $t \ge t_0$ (cf. [33, Teorema 4]). Demonstraţiile din [33] se bazează pe transformarea fiecărei probleme ataşate lui (2.9) într-un sistem integro-diferenţial. Spre deosebire de această abordare, lucrarea [37] se concentrează pe transformarea ec. (2.9) într-un sistem diferenţial liniar perturbat de o formă adecvată cu ajutorul unei (de obicei) complicate schimbări de variabile. De exemplu, conform [37, Secţiunea 3], ecuaţia (2.9) are o soluţie $y(t)$ astfel încât

$$y(t) = c_1 t + c_2 + o(1), \quad y'(t) = c_1 + o(1) \quad \text{când } t \to +\infty,\ c_{1,2} \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

presupunând că există $\rho > 0$ şi funcţia continuă, nenegativă $\lambda(t)$ care verifică

$$|f(t, c_1 t + c_2 + u, c_1 + v)| \le \lambda(t) \quad \text{pentru } u, v \in \mathbb{R} \text{ cu } |u|, |v| \le \rho$$

şi

$$\int_{t_0}^{+\infty} t\lambda(t)dt < +\infty.$$

Aşa numita *β-condiţie* (2.11) câştigă o enormă popularitate în literatură în legătură cu formulele de integrare asimptotică (2.2), (2.4). Menţionez în această privinţă rezultatele semnificative ale lui J. Wong şi C. Coffman [88, 17]. Dezvoltări mai recente sunt datorate lui W. Trench, T. Kusano, M. Naito şi H. Usami [46, 47, 48, 80]. Mai multe studii comprehensive privind cazul ecuaţiilor diferenţiale funcţionale le aparţin lui M. Grammatikopoulos şi C. Philos [31, 65]. Pentru aplicarea unor asemenea rezultate în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale de tip eliptic (în spiritul lucrărilor lui E. Noussair şi C. Swanson), cititorul poate consulta articolele lui Z. Zhao [90] şi A. Constantin [22].

Folosind β-condiţia împreună cu un *sistem de comparaţie* (ca în teoriile lui R. Conti), F. Brauer, W. Trench şi J. Wong [14, 78, 79] obţin expansiuni asimptotice generale pentru soluţiile ecuaţiilor diferenţiale neliniare de ordinul n.

Rezultate generale, clasice şi moderne, în teoria integrării asimptotice a ecuaţiilor diferenţiale ordinare de ordin arbitrar pot fi citite în monografiile lui R. Bellman, W. Coppel, F. Brauer, M. Eastham, I. Kiguradze, T. Chanturia, R. Agarwal, S. Grace şi D. O'Regan [9, 23, 15, 25, 44, 2, 4].

2.2 Rezultate de tip Bihari pentru ecuaţia (2.9)

Fie ecuaţia diferenţială ordinară de ordinul al II-lea

$$u'' + f(t,u,u') = 0, \qquad t \geq t_0, \tag{2.13}$$

unde funcţia $f(t,u,v)$ este presupusă continuă în domeniul $D = \{(t,u,v) : t \in [t_0,+\infty), u,v \in \mathbb{R}\}$. Aici, iau $t_0 \geq 1$ în loc de $t_0 \geq 0$ pentru simplificarea calculelor, după cum se sugerează în [37, p. 1203].

Presupunem, de asemeni, că există funcţiile continue $h_{1,2,3} : [t_0,+\infty) \to [0,+\infty)$ şi $g_{1,2} : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ astfel încât

$$|f(t,u,v)| \leq h_1(t)g_1\left(\frac{|u|}{t}\right) + h_2(t)g_2(|v|) + h_3(t) \tag{2.14}$$

pentru orice $(t,u,v) \in D$. Mai mult, funcţiile $g_{1,2}(\alpha)$ sunt presupuse nedescrescătoare pentru $\alpha \in [0,+\infty)$.

Cazul când $f(t,u,v) = f(t,u)$ şi $h_3 \equiv 0$ este o uşoară generalizare a situaţiei investigată de I. Bihari [11]. A fost studiat de J. Tong şi F. Meng [77, 50] cu ajutorul inegalităţii integrale a lui Bihari. O anumită greşeală în demonstraţia lui J. Tong este corectată de F. Meng [50] şi, mai târziu, de A. Constantin [18]. Vezi discuţia comprehensivă din S. Rogovchenko şi Y. Rogovchenko [72].

Cazul lui $f(t,u,v)$ când fie $g_2(\alpha) = \alpha$ fie $g_1(\alpha) = \alpha$ pentru orice $\alpha \geq m > 0$ este dezvoltat de A. Constantin [18] pe baza unui anumit rezultat de comparaţie de tip Conti (vezi detaliile în [19]). Generalizări ale rezultatelor lui Constantin sunt date de Y. Rogovchenko, S. Rogovchenko şi O. Mustafa [70, 72, 52, 54].

Cazul când $f(t,u,v) = f(t,u)$ este studiat foarte recent de O. Lipovan [49] şi întărit şi generalizat de C. Philos, I. Purnaras, P. Tsamatos şi O. Mustafa [66, 67, 56]. Lucrarea lui O. Lipovan priveşte existenţa acelor soluţii $u(t)$ ale ec. (2.13) care pot fi reprezentate asimptotic drept

$$u(t) = at + b + o(1) \qquad \text{când } t \to +\infty, \quad a,b \in \mathbb{R}. \tag{2.15}$$

Se obişnuieşte ca asemenea soluţii să fie numite *asimptotic liniare*. Condiţiile lui Lipovan [49, p. 180] sunt date în spiritul ipotezelor lui Constantin [18], mai precis

$$\int_{t_0}^{+\infty} s h_{1,3}(s)ds < +\infty.$$

Demonstraţia lui Lipovan se bazează pe faptul că toate soluţiile ec. (2.13) există în viitor şi posedă dezvoltarea asimptotică (amintesc *proprietatea (L)* din [72])

$$u(t) = at + o(t) \qquad \text{când } t \to +\infty. \tag{2.16}$$

Aceasta este, fireşte, exact estimarea comportamentului asimptotic al soluţiei $u(t)$ dată de (2.2). O asemenea proprietate a ecuaţiei (2.13) derivă dintr-un rezultat mai general datorat lui S. Rogovchenko şi Y. Rogovchenko [71] (vezi, de asemeni, [69]). Soluţiile $u(t)$ ale lui (2.13) manifestând (2.16) sunt denumite curent *pseudo-liniare*.

Îmbunătăţind un rezultat anterior [56, Corolarul 9], O. Mustafa şi Y. Rogovchenko dau caracterizarea completă a problemei lui H. Weyl [84, 60] în teoria integrării asimptotice sub condiţii de tip Lipovan pentru (2.13).

Teorema 10 (cf. [57]) *Fie $a,b \in \mathbb{R}$ şi $c \in [0,1]$ fixate. Presupunem că*

$$\int_{t_0}^{+\infty} s^c h_{1,3}(s)ds < +\infty.$$

Atunci, ec. (2.13) are cel puţin o soluţie $u(t)$ definită într-o vecinătate a lui $+\infty$ astfel încât

(i) $u(t) = at + o(t)$, $u'(t) = a + o(1)$ când $t \to +\infty$ pentru $c = 0$;
(ii) $u(t) = at + b + o(1)$, $u'(t) = a + o\left(t^{-1}\right)$ când $t \to +\infty$ pentru $c = 1$;
(iii) $u(t) = at + o\left(t^{1-c}\right)$, $u'(t) = a + o\left(t^{-c}\right)$ când $t \to +\infty$ pentru $c \in (0,1)$.

Demonstraţia Teoremei 10 foloseşte schimbarea de variabile

$$u(t) = [a + b(1 - \operatorname{sign} c)]t + ct \int_t^{+\infty} \frac{v(\tau)}{\tau} d\tau - (1-c) \int_T^t v(\tau) d\tau.$$

Aici, $v(t)$ este o soluţie a ecuaţiei integrale

$$v(t) = t^{-c} \left[b - \int_t^{+\infty} \tau^c f(\tau, u(\tau)) d\tau \right], \qquad t \geq T \geq t_0.$$

În cazul general, adică atunci când (2.14) este valabilă şi

$$\int_{t_0}^{+\infty} h_{1,2,3}(s)ds < +\infty \quad \text{şi} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{g_1(x) + g_2(x)} = +\infty, \tag{2.17}$$

se stabileşte în [72, Teoremele 3, 6] că toate soluţiile continuabile ale ec. (2.13) sunt pseudo-liniare în timp ce în [52, Teorema 3] se arată că fiecare problemă de valori iniţiale ataşată ec. (2.13) are cel puţin o soluţie pseudo-liniară. Conform [54, Lema 3.6], dacă ec. (2.13) are o soluţie cu explozie în timp finit, atunci

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{g_1(x) + g_2(x)} < +\infty.$$

Aceasta înseamnă că toate soluţiile lui (2.13) sunt continuabile la $+\infty$ (există în viitor). Un raţionament similar se găseşte în [71]. Dacă $(2.17)_2$ este validă şi

$$\int_{t_0}^{+\infty} s h_{1,2,3}(s)ds < +\infty \tag{2.18}$$

atunci, pe baza lui [52, Teorema 5], fiecare problemă de valori iniţiale ataşată ec. (2.13) are cel puţin câte o soluţie asimptotic liniară. Un rezultat de multiplicitate pentru soluţiile asimptotic liniare ale lui (2.13) poate fi citit în [55].

Abordez acum o situaţie importantă în cazul ec. (2.13) cu $f(t,u,v) = f(t,u)$ şi $h_3 \equiv 0$.

Afirmaţie *Dacă presupunem că $g_1(\alpha)$ este mărginită, atunci toate soluţiile ec. (2.13) sunt pseudo-liniare cu condiţia ca $(2.17)_1$ să rămână valabilă pentru $h_1(t)$.*

Pentru a stabili validitatea acestei afirmaţii, enunţ un rezultat de comparaţie de tip Brauer-Trench-Wong privind ec. (2.13).

Lema 6 (cf. [54, Corolarul 3.1]) *Presupunem că există funcţiile continue şi nenegative $H_{1,2}(t,\alpha)$ definite pentru orice $t \geq t_0$, $\alpha \geq 0$, nedescrescătoare în raport cu α, astfel încât*

$$|f(t,u,v)| \leq H_1\left(t, \frac{|u|}{t}\right) + H_2(t,|v|), \qquad (t,u,v) \in D. \tag{2.19}$$

Presupunem, de asemeni, că pentru un anumit $z_0 \geq 1$ soluţia maximală a problemei de valori iniţiale

$$\begin{cases} z'(t) = H_1(t,z(t)) + H_2(t,z(t)), & t \geq t_0, \\ z(t_0) = z_0 \end{cases}$$

este mărginită pe $[t_0,+\infty)$. Atunci, toate soluţiile $u(t)$ ale ec. (2.13) cu

$$|u(t_0)| + |u'(t_0)| \leq z_0 - 1$$

sunt pseudo-liniare.

În cazul discutat, deoarece $H_1(t,\alpha) = Gh_1(t)$ pentru orice $t \geq t_0$, $\alpha \geq 0$, unde $G = \sup_{\tau\geq 0}[g_1(\tau)]$, şi $H_2 \equiv 0$, soluţia maximală $z(t)$ devine

$$z(t) = z_0 + G\int_{t_0}^{t} h_1(s)ds \leq z_0 + G\int_{t_0}^{+\infty} h_1(\tau)d\tau < +\infty.$$

Mărginirea ei ne asigură, via Lema 6, că toate soluţiile ec. (2.13) sunt pseudo-liniare.

Exemplul 1 Toate soluţile ecuaţiei diferenţiale

$$u'' = \frac{1}{u^2+t^2}, \qquad t \geq 1,$$

sunt pseudo-liniare. În fapt, remarc că

$$\frac{1}{u^2+t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{|u|}{t}\right)^2 + 1} = h_1(t)g_1\left(\frac{|u|}{t}\right) \leq h_1(t), \quad t \geq 1,$$

deci Lema 6 poate fi aplicată cu succes.

Observaţia 4 Deoarece $0 < g_1(\alpha) \leq G$, unde $\alpha \geq 0$, condiţia $(2.17)_2$ este îndeplinită iar validitatea Afirmaţiei poate fi dovedită şi cu argumentele din [72, 52].

Un rezultat asemănător cu Afirmaţia are loc pentru soluţiile asimptotic liniare ale ec. (2.13).

Lema 7 *Dacă presupunem că $g_1(\alpha)$ este mărginită, atunci toate soluţiile ec. (2.13) sunt asimptotic liniare cu condiţia ca $h_1(t)$ să verifice (2.18).*

Exemplul 2 Toate soluţiile ecuaţiei diferenţiale

$$u'' = \frac{1}{t^3}, \qquad t \geq 1, \tag{2.20}$$

sunt asimptotic liniare. Într-adevăr, soluţia generală a ec. (2.20) are formula

$$u(t) = c_1 t + c_2 + \frac{1}{2t}, \qquad c_{1,2} \in \mathbb{R},$$

comportamentul său asimptotic fiind în acord cu concluzia Lemei 7.

Închei această Secţiune motivând prezenţa funcţiilor $H_{1,2}$ în (2.19). Patru leme fac prezentarea autoconţinută.

Lema 8 *Fie $a \geq 0$ dat şi funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci, funcţia $g : [0,a] \to \mathbb{R}$ introdusă prin formula*

$$g(s) = \sup_{|t| \leq s} |f(t)|$$

este continuă şi nedescrescătoare.

Demonstraţie. Fixez $\varepsilon > 0$. Cum funcţia $f(t)$ restrânsă la $[-a,a]$ este uniform continuă va exista $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq \varepsilon$$

pentru orice $t_{1,2} \in [-a,a]$ cu $|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon)$. Acum, pentru orice $s_{1,2} \in [0,a]$ astfel încât $s_1 \leq s_2 \leq s_1 + \delta(\varepsilon)$ avem

$$\begin{aligned} g(s_2) - g(s_1) &\leq \max\left\{ \sup_{t \in [s_1,s_2]} |f(t)| - |f(s_1)|, \sup_{t \in [-s_2,-s_1]} |f(t)| - |f(-s_1)| \right\} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceea ce conclude demonstraţia. □

Lema 9 *Fie $a \geq 0$ şi $b \leq c$ date şi funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci, funcţia $g : [0,a] \times [b,c] \to \mathbb{R}$ cu formula*

$$g(s,y) = \sup_{|x| \leq s} |f(x,y)|$$

este continuă şi nedescrescătoare în primul argument.

Demonstraţie. Fixez $\varepsilon > 0$. Deoarece funcţia $f(x,y)$ restrânsă la $[-a,a] \times [b,c]$ este uniform continuă există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât

$$|f(x_2,y_2) - f(x_1,y_1)| \leq \varepsilon$$

pentru orice $x_{1,2} \in [-a,a]$ cu $|x_1 - x_2| \le \delta(\varepsilon)$ şi orice $y_{1,2} \in [b,c]$ cu $|y_1 - y_2| \le \delta(\varepsilon)$. Acum, pentru orice $s_{1,2} \in [0,a]$ astfel ca $s_1 \le s_2 \le s_1 + \delta(\varepsilon)$ şi $y_{1,2} \in [b,c]$ astfel ca $|y_1 - y_2| \le \delta(\varepsilon)$ avem

$$\begin{aligned}
&|g(s_2,y_2) - g(s_1,y_1)| \\
&\le |g(s_2,y_2) - g(s_2,y_1)| + |g(s_2,y_1) - g(s_1,y_1)| \\
&\le \sup_{|x|\le a} |f(x,y_2) - f(x,y_1)| + \sup_{y\in[b,c]} \left\{ \max\left[\sup_{x\in[s_1,s_2]} |f(x,y)| - |f(s_1,y)|, \right.\right. \\
&\left.\left. \sup_{x\in[-s_2,-s_1]} |f(x,y)| - |f(-s_1,y)| \right]\right\} \le 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Demonstraţia s-a încheiat. □

Celelalte două Leme se stabilesc asemănător.

Lema 10 *Fie $a,\, b \ge 0$ date şi funcţia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci, funcţia $g : [0,a] \times [0,b] \to \mathbb{R}$ cu formula*

$$g(s,l) = \sup_{|x|\le s} \sup_{|y|\le l} |f(x,y)|$$

este continuă, simetrică (i.e., $g(s,l) = g(l,s)$) şi nedescrescătoare în fiecare argument.

Lema 11 *Fie $a \le b$ şi $c,\, d \ge 0$ date şi funcţia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci, funcţia $g : [a,b] \times [0,c] \times [0,d] \to \mathbb{R}$ cu*

$$g(t,s,l) = \sup_{|x|\le s} \sup_{|y|\le l} |f(t,x,y)|$$

este continuă şi simetrică şi nedescrescătoare în fiecare din ultimele două argumente.

Fie acum $f(t,u,v)$ o neliniaritate continuă în ec. (2.13). Conform Lemelor 8 - 11, avem

$$|f(t,u,v)| \le \sup_{|x|\le|u|} \sup_{|y|\le|v|} |f(t,x,y)| = f_1(t,|u|,|v|),$$

unde funcţia $f_1(t,s_1,s_2)$ este continuă, nenegativă şi nedescrescătoare în fiecare din ultimele două argumente.

Mai departe,

$$f_1(t,|u|,|v|) = f_1\left(t, t\frac{|u|}{t}, |v|\right) = F\left(t, \frac{|u|}{t}, |v|\right),$$

unde funcţia $F(t,s_1,s_2)$ este continuă, nenegativă şi nedescrescătoare în fiecare din ultimele două argumente.

Pe baza inegalităţii

$$F(t,s_1,s_2) \le F(t,s_1,s_1) + F(t,s_2,s_2),$$

se obţine că

$$|f(t,u,v)| \le H_1\left(t, \frac{|u|}{t}\right) + H_2(t,|v|),$$

unde funcţiile $H_1(t,s)$, $H_2(t,s)$ sunt continue, nenegative şi nedescrescătoare în ultimul argument.

2.3 Un rezultat cu β-condiţie pentru ecuaţia (2.9)

Discuţia din această Secţiune se leagă de o problemă de teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. Ecuaţia de mai jos

$$\Delta u + f(x,u) + g(|x|)x \cdot \nabla u = 0, \qquad |x| > A > 0,$$

constituie subiectul a numeroase investigaţii în ultimii ani [20, 21, 63, 82, 89, 26, 27] cu privire la existenţa soluţiilor pozitive care se atenuează când $|x| \to +\infty$.

Tipic, abordarea unui asemenea studiu se face prin folosirea anumitor (radial simetrice) sub- şi supersoluţii şi a principiului de maxim tare.

Pentru supersoluţii, *ecuaţia de comparaţie* ia forma

$$u''(t) + k_1(t)h\left(\frac{|u(t)|}{t}\right) + k_2(t)\left(u'(t) - \frac{u(t)}{t}\right) = 0, \qquad t \ge A, \tag{2.21}$$

unde funcţiile $h : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $k_1 : [A,+\infty) \to [0,+\infty)$ şi $k_2 : [A,+\infty) \to \mathbb{R}$ sunt continue şi satisfac ipoteza [21, p. 336]

$$\int_A^{+\infty} t\,[k_1(t) + |k_2(t)|]\,dt < +\infty. \tag{2.22}$$

Foarte recent, s-a observat [26, 27] că integrabilitatea lui $k_2(t)$ nu mai este necesară dacă funcţia $k_2(t)$ ia doar valori nenegative. În această din urmă situaţie se poate înlocui $k_2(t)$ din formula ecuaţiei de comparaţie (2.21) cu condiţia ca partea din (2.21) care rămâne să aibă o soluţie $u(t)$ ce există în viitor şi satisface condiţiile

$$\max(u'(t),0) < \frac{u(t)}{t} \le m < +\infty \quad \text{când } t \to +\infty. \tag{2.23}$$

Ca o implicaţie colaterală, fac observaţia că orice soluţie crescătoare $u(t)$ verificând (2.23) are derivata logaritmică $\frac{u'(t)}{u(t)}$ în L^2 (vezi discuţia de la cazul liniar în [35, Teorema (A), p. 391]). Condiţia (2.23) nu este verificată automat de către soluţiile asimptotic/pseudo-liniare ale ec. (2.13). Mai precis, dacă (2.15) are loc pentru $b \neq 0$ atunci, cum $u'(t) = a + o\left(t^{-1}\right)$ pentru orice t mare, soluţia asimptotic liniară $u(t)$ satisface (2.23) dacă şi numai dacă $a \geq 0$ şi $b > 0$.

Cazul ecuaţiilor diferenţiale liniare omogene de ordinul al II-lea este ilustrativ din acest punct de vedere. În fapt, să presupunem că $y(t)$ este o soluţie pseudo-liniară a ec. (2.1) astfel încât

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{t} = a > 0. \tag{2.24}$$

Funcţia $w(t)$ dată de

$$w(t) = y(t)\int_t^{+\infty} \frac{ds}{[y(s)]^2} > 0, \qquad t \geq T > 0,$$

este o soluţie asimptotic liniară a lui (2.1). Mai precis,

$$\lim_{t\to+\infty} w(t) = \frac{1}{a}.$$

Ţinând seama de (2.24) şi de

$$w'(t) - \frac{w(t)}{t} = \left[y'(t) - \frac{y(t)}{t}\right]\int_t^{+\infty} \frac{ds}{[y(s)]^2} - \frac{1}{y(t)}, \qquad t \geq T,$$

obţinem că

$$t\left[w'(t) - \frac{w(t)}{t}\right] \sim -\frac{t}{y(t)} \sim -\frac{1}{a} < 0 \qquad \text{pentru } t \to +\infty,$$

în acord cu deducţiile din [26].

Rezultatul următor este un criteriu tip β-condiţie privind existenţa soluţiilor $u(t)$ ale ec. (2.13) ce verifică (2.23).

Teorema 11 *Presupunem că (2.19) are loc pentru orice $(t,u,v) \in D$. Fie $c > 0$ fixat.*

(i) Presupunem, în plus, că

$$\int_{t_0}^{+\infty} [H_1(t,c) + H_2(t,c)]\,dt < +\infty. \tag{2.25}$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$ şi $u_{0,1} \in \mathbb{R}$ astfel încât $|u_0| + |u_1| < c$ există $T \geq t_0$ şi o soluţie $u(t)$ a ec. (2.13), definită în $[T,+\infty)$, cu $u(T) = u_0$, $u'(T) = u_1$ şi $u(t) = at + o(t)$, $u'(t) = a + o(1)$ când $t \to +\infty$, unde $a = a(u) \in \mathbb{R}$. Mai mult, dacă $u_1 \neq 0$, $|a - u_1| < \varepsilon|u_1|$.

(ii) În ipotezele (i), presupunem că

$$\int_T^{+\infty} s f(s,\eta(s),\zeta(s))ds = +\infty$$

pentru toate funcţiile continue $\eta, \zeta : [T,+\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât

$$|\zeta(t) - u_1| < \varepsilon c, \quad |\eta(t) - u_0 - u_1(t-T)| < \varepsilon c(t-T), \quad t \geq T.$$

Atunci, soluţia $u(t)$ de la (i) satisface şi condiţia

$$\lim_{t\to+\infty} \left[u(t) - tu'(t)\right] = +\infty.$$

(iii) Facem presupunerea că

$$\int_{t_0}^{+\infty} t\,[H_1(t,c) + H_2(t,c)]\,dt < +\infty. \tag{2.26}$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$ şi $u_{0,1} \in \mathbb{R}$ astfel ca $|u_0| + |u_1| < c$ există $T \geq t_0$ şi o soluţie $u(t)$ a ec. (2.13), definită în $[T,+\infty)$, cu $u(T) = u_0$, $u'(T) = u_1$ şi $u(t) = at + b + o(1)$, $u'(t) = a + o\left(t^{-1}\right)$ când $t \to +\infty$, unde $a = a(u), b = b(u) \in \mathbb{R}$. Mai mult, dacă$u_1 \neq 0$, $|a - u_1| < \frac{\varepsilon}{T}|u_1|$ şi $|b - u_0 + u_1 T| < \varepsilon |u_1|$.

Demonstraţie. Fixez $u_{0,1}$ şi introduc $\eta \in (0,\varepsilon)$ astfel încât $|u_0| + |u_1| < (1-\eta)c$. Consider, de asemeni, $T \geq t_0$ cu proprietatea că

$$\int_{T}^{+\infty} [H_1(t,c) + H_2(t,c)]\,dt < \eta \cdot \delta(c, |u_1|), \tag{2.27}$$

unde

$$\delta(c,|u_1|) = |u_1| \text{ pentru } u_1 \neq 0 \quad \text{şi} \quad \delta(c,|u_1|) = c \text{ pentru } u_1 = 0.$$

Urmând [54, pp. 313-315], se deduce că

$$\max\left[\left|u'(t)\right|, \frac{|u(t)|}{t}\right] < c, \qquad t \geq T,$$

pentru orice soluţie $u(t)$ a ec. (2.13) cu $u(T) = u_0$, $u'(T) = u_1$.

Concluzia (i) rezultă din $a = u_1 - \int_T^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds$ şi din estimarea

$$|a - u_1| \leq \int_T^{+\infty} [H_1(t,c) + H_2(t,c)]\,dt < \eta\,|u_1| < \varepsilon\,|u_1|.$$

Concluzia (ii) se bazează pe formula

$$u(t) - tu'(t) = C + \int_T^t s f(s,u(s),u'(s))ds,$$

unde $C = u_0 - u_1 T$, împreună cu estimările

$$\left|u'(t) - u_1\right| \leq \int_T^{+\infty} [H_1(t,c) + H_2(t,c)]\,dt < \varepsilon c$$

şi

$$\begin{aligned}|u(t)-u_0-u_1(t-T)| &\le \int_T^t (t-s)\,[H_1(s,c)+H_2(s,c)]\,ds\\ &\le (t-T)\int_T^{+\infty}[H_1(s,c)+H_2(s,c)]\,ds\\ &\le \varepsilon c(t-T)\end{aligned}$$

pentru $t \ge T$.

Concluzia (iii) rezultă din

$$\begin{aligned}|a-u_1| &\le \int_T^{+\infty}[H_1(t,c)+H_2(t,c)]\,dt\\ &\le \frac{1}{T}\int_T^{+\infty} t\,[H_1(t,c)+H_2(t,c)]\,dt < \frac{\varepsilon}{T}\,|u_1|\end{aligned}$$

şi

$$|b-u_0+u_1T| \le \int_T^{+\infty} t\,[H_1(t,c)+H_2(t,c)]\,dt < \varepsilon\,|u_1|\,.$$

Demonstraţia s-a încheiat. □

Observaţia 5 Teorema 11 stabileşte, în particular, existenţa soluţiilor asimptotic/-pseudo-liniare cu

$$\limsup_{t\to+\infty}[u(t)-tu'(t)] > 0$$

care sunt eventual pozitive. Presupun, de exemplu, că (2.26) are loc, fixez $\eta \in \left(0,\min\left(\frac{1}{4},\varepsilon\right)\right)$ şi iau $T \ge t_0 \ge 1$ astfel încât

$$\int_T^{+\infty} t\,[H_1(t,c)+H_2(t,c)]\,dt < \eta\cdot\frac{c}{12}. \tag{2.28}$$

Fixez, de asemeni,

$$u_0 \in \left(\frac{c}{3},\frac{c}{2}\right) \quad \text{şi} \quad u_1 = \frac{c}{4T}.$$

Avem $u_0+u_1 < \frac{3c}{4} < (1-\eta)c$ şi

$$\begin{aligned}u(t)-tu'(t) &\ge u_0-u_1T-\int_T^{+\infty} s\,\big|f(s,u(s),u'(s))\big|\,ds\\ &> \frac{c}{12}-\int_T^{+\infty} s\,[H_1(s,c)+H_2(s,c)]\,ds\\ &> \frac{c}{16} > 0\end{aligned}$$

pentru orice $t \geq T$. Mai mult, deoarece (2.28) implică

$$\begin{aligned} u_1 - \int_T^{+\infty} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds &= \frac{1}{T}\left[\frac{c}{4} - T\int_T^{+\infty} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds\right] \\ &\geq \frac{1}{T}\left[\frac{c}{4} - \int_T^{+\infty} s\left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds\right] \\ &\geq \frac{11c}{48T} > 0, \end{aligned}$$

deducem că

$$\begin{aligned} u'(t) &\geq u_1 - \int_T^{+\infty} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds > \frac{11c}{48T} > 0, \\ u(t) &\geq u_0 + \left(u_1 - \int_T^{+\infty} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds\right)(t-T) \\ &\geq u_0 + \frac{11c}{48T}(t-T) > 0, \\ u(t) - tu'(t) &\geq u_0 - u_1 T - \int_T^{+\infty} s\left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds > \frac{c}{16} > 0 \end{aligned}$$

pentru orice $t \geq T$. Astfel, $u(t)$ satisface condiţia (2.23).

Observaţia 6 Se observă că, în fact, nu este nevoie ca $f(t,u,v)$ să verifice (2.19) în întreg domeniul D. Pentru a reformula Teorema 11 pentru o clasă mai largă de funcţii $f(t,u,v)$, eventual cu singularităţi, consider $\varepsilon > 0$, $T \geq t_0$ şi $u_{0,1} \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\int_T^{+\infty} |f(t,\delta(t),\gamma(t))| < \varepsilon \tag{2.29}$$

pentru toate funcţiile continue $\delta, \gamma : [T,+\infty) \to \mathbb{R}$ cu

$$|\delta(t) - u_0 - u_1(t-T)| < \varepsilon(t-T), \quad |\gamma(t) - u_1| < \varepsilon, \tag{2.30}$$

unde $t \geq T$. Acum, dacă ipoteza (2.29) înlocuieşte condiţia (2.25), concluziile Teoremei 11 rămân valabile.

Exemplul 3 Fie ecuaţia diferenţială

$$u'' = \frac{1}{u^2}, \qquad t \geq 1. \tag{2.31}$$

Luând $\varepsilon = T = u_0 = 1$, $u_1 = 2$ în (2.29), (2.30) şi ţinând seama de

$$t < \delta(t) < 3t - 2, \qquad f(t,\delta(t)) = \frac{1}{[\delta(t)]^2}, \qquad t \geq 1,$$

deducem existenţa unei soluţii pseudo-liniare $u(t)$ a ec. (2.31) cu

$$1 \le \frac{u(t)}{t} \le 3 - \frac{2}{t},\ t \ge 1, \qquad \lim_{t \to +\infty} [u(t) - tu'(t)] = +\infty.$$

Ecuaţii diferenţiale ordinare cu singularităţi de acest fel sunt studiate recent de R. Agarwal şi D. O'Regan [1, 3, 62]. Investigaţii privind existenţa soluţiilor asimptotic/pseudo-liniare ale ecuaţiilor diferenţiale în cazul autonom au fost făcute de G. Seifert, Y. Rogovchenko şi G. Villari [73, 68].

2.4 Analiza funcţională a integrării ecuaţiei (2.9). Alte aplicaţii

Vom trece în revistă, neformal, pe parcursul demonstrării unor rezultate generale de teoria integrării asimptotice pentru ecuaţiile (2.9), (2.13), două dintre cele mai des întâlnite metode de a stabili că o ecuaţie diferenţială neliniară posedă soluţii cu comportament predefinit la $+\infty$.

Presupun că neliniaritatea din ec. (2.13) satisface inegalitatea de mai jos

$$|f(t,u,v)| \le h(t) \left[p_1\left(\frac{|u|}{t} \right) + p_2(|v|) \right], \qquad (t,u,v) \in D, \tag{2.32}$$

unde funcţia $h : [t_0, +\infty) \to [0, +\infty)$ este continuă iar funcţiile $p_{1,2} : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ sunt continue şi nedescrescătoare. Pentru legătura dintre condiţiile (2.32), (2.14), vezi discuţia din [52, pp. 346-347].

Rezultatul următor extinde [52, Teorema 3]. El priveşte existenţa soluţiilor pseudo-liniare ale ec. (2.13).

Teorema 12 *Presupunem că următoarele condiţii sunt îndeplinite:*

(i) Funcţia h verifică

$$0 < \int_{t_0}^{+\infty} h(s)ds = H < +\infty. \tag{2.33}$$

(ii) Există $\lambda \in (0,1)$, $r_0 > 0$, unde $(1-\lambda) r_0 \ge \frac{|u_0|}{t_0} + |u_1|$, astfel încât

$$p_1(r_0) + p_2(r_0) \le \lambda \cdot \frac{r_0}{H}. \tag{2.34}$$

Atunci, problema de valori iniţiale

$$\begin{cases} u'' + f(t,u,u') = 0, & t \ge t_0 \ge 1, \\ u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u_1, \end{cases}$$

are o soluţie $u(t)$ definită în $[t_0, +\infty)$ cu alura asimptotică $u(t) = at + o(t)$ pentru $t \to +\infty$. Aici, $a = a(u) \in \mathbb{R}$.

Demonstraţia Teoremei 12, la fel ca în numeroase alte situaţii în teoria integrării asimptotice, se bazează pe aplicarea teoremei de punct fix Schauder-Tikhonov unui anumit operator integral într-un spaţiu Banach de funcţii.

Spaţiul, notat $V(t_0)$ în acord cu [52, p. 348], este dat de mulţimea tuturor funcţiilor cu valori reale, continuu diferenţiabile $u(t)$ definite pe $[t_0,+\infty)$ şi având prima derivată $u'(t)$ cu limită finită, notată a_u, la $+\infty$. Operaţiile în $V(t_0)$ sunt operaţiile obişnuite cu funcţii numerice iar formula normei, ţinând seama de regula lui L'Hospital, este

$$\|u\| = \max\left[\sup_{t\geq t_0}\frac{|u(t)|}{t}, \sup_{t\geq t_0}\left|u'(t)\right|\right], \qquad u\in V(t_0).$$

Un criteriu de compactitate relativă pentru submulţimile lui $V(t_0)$ este necesar la aplicarea teoremei de punct fix. Îl adaptez aici urmând detaliile din [52, Propoziţia 13, Lema 15].

Lema 12 *Presupunem că mulţimea $M\subset V(t_0)$ are următoarele proprietăţi:*

(i) Există constanta $L>0$ astfel ca

$$\left|u'(t)\right|\leq L \qquad \text{şi} \qquad \frac{|u(t)|}{t}\leq L$$

pentru orice $t\geq t_0$ şi orice $u\in M$.

(ii) Pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încât

$$\left|u'(t_1)-u'(t_2)\right|<\varepsilon \qquad \text{şi} \qquad \left|\frac{u(t_1)}{t_1}-\frac{u(t_2)}{t_2}\right|<\varepsilon$$

pentru orice $t_{1,2}\geq t_0$ satisfăcând $|t_1-t_2|<\delta(\varepsilon)$ şi orice $u\in M$.

(iii) Pentru orice $\varepsilon>0$ există $Q(\varepsilon)\geq t_0$ astfel încât

$$\left|u'(t)-a_u\right|<\varepsilon$$

pentru orice $t\geq Q(\varepsilon)$ şi orice $u\in M$.

Atunci, mulţimea M este relativ compactă în $V(t_0)$.

Demonstraţie. (a Teoremei 12) Fie mulţimea $C=\{u\in V(t_0):\ \|u\|\leq r_0\}$ şi operatorul $T: C\to C$ dat prin formula

$$T(u)(t)=u_0+u_1(t-t_0)-\int_{t_0}^{t}(t-s)f(s,u(s),u'(s))ds, \quad t\geq t_0, \tag{2.35}$$

unde $u\in C$. Discuţia se reduce acum la determinarea unui punct fix al lui T în C.

Pasul 1 *T este bine definit.*

Într-adevăr, pentru $u\in C$, avem

$$\begin{aligned}
\left|(T(u))'(t)\right| &\leq |u_1| + \int_{t_0}^{t} \left|f(s,u(s),u'(s))\right| ds \\
&\leq |u_1| + \int_{t_0}^{t} h(s)\left[p_1\left(\frac{|u(s)|}{s}\right) + p_2(\left|u'(s)\right|)\right] ds \\
&\leq |u_1| + \int_{t_0}^{t} h(s)\left[p_1(\|u\|) + p_2(\|u\|)\right] ds \\
&\leq |u_1| + [p_1(r_0) + p_2(r_0)] \cdot \int_{t_0}^{t} h(s) ds \\
&\leq |u_1| + H\left[p_1(r_0) + p_2(r_0)\right] \leq r_0.
\end{aligned}$$

De asemeni, conform (2.34), obţinem

$$\begin{aligned}
\frac{|T(u)(t)|}{t} &\leq \frac{|u_0|}{t_0} + |u_1| + \int_{t_0}^{t} \left|f(s,u(s),u'(s))\right| ds \\
&\leq \frac{|u_0|}{t_0} + |u_1| + H[p_1(r_0) + p_2(r_0)] \leq r_0.
\end{aligned}$$

Aşadar, $\|T(u)\| \leq r_0$, ceea ce dovedeşte că T este bine definit.

Pasul 2 T *este uniform continuu.*

Fixez $\varepsilon > 0$. Atunci, există $t_\varepsilon > t_0$ astfel încât

$$\int_{t_\varepsilon}^{+\infty} h(s) ds < \frac{\varepsilon}{4[p_1(r_0) + p_2(r_0)]}.$$

Funcţia $f : [t_0, t_\varepsilon] \times [-t_\varepsilon r_0, t_\varepsilon r_0] \times [-r_0, r_0] \to \mathbb{R}$ fiind uniform continuă, există $\eta_\varepsilon > 0$ astfel încât

$$|f(t,u_1,v_1) - f(t,u_2,v_2)| < \frac{\varepsilon}{2t_\varepsilon}$$

pentru orice $t \in [t_0, t_\varepsilon]$, orice $u_{1,2} \in [-t_\varepsilon r_0, t_\varepsilon r_0]$ satisfăcând $|u_1 - u_2| < \eta_\varepsilon$ şi orice $v_{1,2} \in [-r_0, r_0]$ cu $|v_1 - v_2| < \eta_\varepsilon$. Acum, un calcul direct conduce pentru orice $u, v \in C$ cu $\|u - v\| < \frac{\eta_\varepsilon}{t_\varepsilon}$ şi orice $t \geq t_0$ la

$$\begin{aligned}
\left|(T(u))'(t) - (T(v))'(t)\right| &\leq \int_{t_0}^{t} \left|f(s,u(s),u'(s)) - f(s,v(s),v'(s))\right| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{+\infty} \left|f(s,u(s),u'(s)) - f(s,v(s),v'(s))\right| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{t_\varepsilon} \left|f(s,u(s),u'(s)) - f(s,v(s),v'(s))\right| ds \\
&+ \int_{t_\varepsilon}^{+\infty} \left|f(s,u,u')\right| ds + \int_{t_\varepsilon}^{+\infty} \left|f(s,v,v')\right| ds \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2t_\varepsilon}(t_\varepsilon - t_0) + 2[p_1(r_0) + p_2(r_0)] \int_{t_\varepsilon}^{+\infty} h(s) ds
\end{aligned}$$

$$< \varepsilon$$

şi

$$\begin{aligned}
\frac{|T(u)(t)-T(v)(t)|}{t} &\leq \int_{t_0}^{t} \left| f(s,u(s),u'(s)) - f(s,v(s),v'(s)) \right| ds \\
&\leq \int_{t_0}^{+\infty} \left| f(s,u(s),u'(s)) - f(s,v(s),v'(s)) \right| ds \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Reamintind definiţia normei în $V(t_0)$, concludem că $\|Tu - Tv\| \leq \varepsilon$ pentru orice $u, v \in C$ care satisfac $\|u - v\| < \delta(\varepsilon) = \frac{\eta_\varepsilon}{t_\varepsilon}$. Aşadar, continuitatea operatorului T este stabilită.

Pasul 3 *T este compact.*

Pentru a dovedi că $T(C)$ este relativ compactă trebuie să arătăm că $T(C)$ satisface ipotezele Lemei 12.

• Ipoteza (i) a Lemei 12:

Cum $T(C) \subset C$, avem

$$\left|(T(u))'(t)\right| \leq r_0 \qquad \text{şi} \qquad \frac{|T(u)(t)|}{t} \leq r_0$$

pentru orice $t \geq t_0$ şi $u \in C$.

• Ipoteza (ii) a Lemei 12:

Pentru orice $t_2 \geq t_1 \geq t_0$ şi orice $u \in C$, un calcul direct ne conduce la următoarele estimări

$$\begin{aligned}
\left|(T(u))'(t_2) - (T(u))'(t_1)\right| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left| f(s,u(s),u'(s)) \right| ds \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} h(s)[p_1(\|u\|) + p_2(\|u\|)] ds \\
&\leq [p_1(r_0) + p_2(r_0)] \int_{t_1}^{t_2} h(s) ds \to 0
\end{aligned}$$

când $t_2 \to t_1$, uniform în raport cu $u \in C$. De asemeni, pentru a stabili cea de-a doua parte a lui (ii), să observăm că, pentru orice $u \in C$, avem

$$\left| \left(\frac{T(u)(t)}{t} \right)' \right| \leq \left|(T(u))'(t)\right| + \frac{|T(u)(t)|}{t} \leq 2r_0.$$

Această estimare implică

$$\left| \frac{T(u)(t_2)}{t_2} - \frac{T(u)(t_1)}{t_1} \right| \leq 2r_0 \, |t_2 - t_1| \to 0$$

dacă, din nou, $t_2 \to t_1$.

• Ipoteza (iii) a Lemei 12:
Remarcăm mai întâi că

$$a_{T(u)} = \lim_{t\to+\infty} (T(u))'(t) = u_1 - \int_{t_0}^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds.$$

Atunci,

$$\begin{aligned}
\left|(T(u))'(t) - a_{T(u)}\right| &= \left|(T(u))'(t) - u_1 + \int_{t_0}^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds\right| \\
&= \left|\int_{t_0}^{+\infty} f(s,u(s),u'(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s,u(s),u'(s))ds\right| \\
&\le \int_{t}^{+\infty} \left|f(s,u(s),u'(s))\right| ds \\
&\le [p_1(r_0) + p_2(r_0)] \int_{t}^{+\infty} h(s)ds \to 0
\end{aligned}$$

când $t \to +\infty$, uniform în raport cu $u \in C$.

Astfel, toate presupunerile Lemei 12 sunt verificate şi concludem că mulţimea $T(C)$ este relativ compactă. În consecinţă, conform teoremei Schauder-Tikhonov, operatorul T are un punct fix u în C. Aceasta este soluţia $u(t)$ a ec. (2.13) pe care o căutăm. □

Observaţia 7 O inspecţie a demonstraţiei Teoremei 12 arată că nu este nevoie ca $f(t,u,v)$ să verifice (2.32) pe întreg domeniul D. În fapt, este suficient ca (2.32) să aibă loc pe $E \subset D$, unde $E = [t_1,+\infty) \times K$, $t_1 \ge t_0$, şi $K \subset \mathbb{R}^2$ este o mulţime compactă cu interior nevid. Teoreme standard de prelungire [28, Teorema 1, p. 13] ne permit să extindem funcţia $\left(h(t), p_1\left(\frac{|u|}{t}\right), p_2(v)\right)$ de la E la D păstrând continuitatea şi monotonia parţială. Cazul tip este dat de $E = [t_1,+\infty) \times [-r_0,r_0]^2$.

Rezultatul următor, în spiritul celor din [66, 67], priveşte existenţa soluţiilor asimptotic liniare ale ec. (2.13).

Teorema 13 *Fie $f(t,u,v) = f(t,u)$ şi presupunem că această neliniaritate verifică o condiţie asemănătoare lui (2.32), mai precis*

$$|f(t,u)| \le h(t)p\left(\frac{|u|}{t}\right), \qquad t \ge t_0,\ u \in \mathbb{R},$$

unde funcţia $h : [t_0,+\infty) \to [0,+\infty)$ este continuă iar funcţia $p : [0,+\infty) \to (0,+\infty)$ este continuă şi nedescrescătoare. Presupunem că au loc următoarele condiţii:

(i) Funcţia h verifică

$$0 < \int_{t_0}^{+\infty} (s-t_0)h(s)ds = H^* < +\infty.$$

(ii) Există a, $b \in \mathbb{R}$ şi $r_0 > 0$ astfel încât

$$p\left(\frac{r_0+|a|t_0+|b|}{t_0}\right) \leq \frac{r_0}{H^*}.$$

Atunci, ecuaţia diferenţială

$$u'' + f(t,u) = 0, \qquad t \geq t_0 \geq 1, \tag{2.36}$$

are o soluţie $u(t)$ definită în $[t_0,+\infty)$ cu alura asimptotică $u(t) = at+b+o(1)$ pentru $t \to +\infty$.

Demonstraţie. Substituţia $v(t) = u(t) - at - b$, inspirată de [37, p. 1199] unde este invocată în legătură cu *teoria admisibilităţii* a lui J. Massera, J. Schäffer şi C. Corduneanu (vezi, de asemeni, permisiva schimbare de variabile sugerată în [49, p. 180]), transformă ecuaţia diferenţială (2.13) în

$$v''(t) + f(t, v(t) + at + b) = 0, \qquad t \geq t_0 \geq 1. \tag{2.37}$$

Pentru a obţine concluzia, este suficient să se arate că ec. (2.37) are o soluţie $v(t)$, definită pe $[t_0,+\infty)$, cu $\lim_{t\to+\infty} v(t) = 0$.

Să introducem, urmând [52, Secţiunea 3], spaţiul Banach $A(t_0)$ al tuturor funcţiilor cu valori reale, continue, definite pe $[t_0,+\infty)$, cu limită finită l_u la $+\infty$. Operaţiile cu vectori sunt, ca anterior, operaţiile uzuale cu funcţii în timp ce norma este norma Cebâşev tipică

$$\|v\| = \sup_{t\geq t_0} |v(t)|, \qquad v \in A(t_0).$$

Criteriul de compactitate relativă pentru submulţimile lui $A(t_0)$ este teorema Avramescu [6, Lema 1] care îi cere unei mulţimi $M \subset A(t_0)$ să fie *uniform mărginită* (mărginirea în normă a lui M), *echicontinuă* (continuitatea uniformă a funcţiilor $m \in M$ în $[t_0,+\infty)$ în mod uniform în raport cu M) şi *echiconvergentă* (convergenţa lui $m(t)$ la l_m când $t \to +\infty$ pentru orice $m \in M$ uniform în raport cu M) pentru a fi relativ compactă.

Să introducem mulţimea

$$C = \{v \in A(t_0) : \|v\| \leq r_0\}$$

şi operatorul $T : C \to C$ definit prin formula

$$T(v)(t) = \int_t^{+\infty} (t-s) f(s, v(s) + as + b) ds, \qquad t \geq t_0,\ v \in C.$$

La fel ca anterior, anumite detalii sunt verificate în mai mulţi paşi.

Pasul 1 *T este bine definit.*

Deducem că $T(C) \subset C$ direct din ipoteza (ii). Într-adevăr, fie $v \in C$. Atunci, cum $|v(t)| \leq r_0$ pentru orice $t \geq t_0$, putem estima că

$$\begin{aligned}|T(v)(t)| &\le \int_t^{+\infty}(s-t)h(s)p\left(\frac{|v(s)+as+b|}{s}\right)ds\\ &\le p\left(\frac{r_0+|a|t_0+|b|}{t_0}\right)\int_t^{+\infty}(s-t)h(s)ds\\ &\le p\left(\frac{r_0+|a|t_0+|b|}{t_0}\right)H^*,\end{aligned}$$

deoarece aplicaţia $s\mapsto \frac{r_0+|a|s+|b|}{s}$ este necrescătoare.

Pasul 2 *T este compact.*

Să notăm $f(t,v(t)+at+b)$ cu $q(t,v(t))$, unde $t\ge t_0$ şi $v\in C$, pentru simplificarea calculului. Evidenţiez că

$$|q(t,v)| \le h(t)p\left(\frac{|v|+|b|}{t_0}+|a|\right) \tag{2.38}$$

$$= h(t)P(|v|), \qquad t\ge t_0,\ v\in\mathbb{R}, \tag{2.39}$$

unde funcţia $P:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ este continuă şi nedescrescătoare. Ipoteza (ii) devine acum

$$H^*\le\frac{r_0}{P(r_0)}.$$

• $T(C)$ uniform mărginită:
Aceasta decurge, ca anterior, din $T(C)\subset C$.
• $T(C)$ este echicontinuă:
Fiind dat $v\in C$, avem

$$\begin{aligned}\left|(T(v)(t))'\right| &\le \int_t^{+\infty}|q(s,v(s))|ds \le \int_t^{+\infty}h(s)P(|v(s)|)ds\\ &\le H^*P(r_0)\le r_0, \qquad t\ge t_0,\end{aligned}$$

ceea ce duce, via integrare, la

$$|T(v)(t_2)-T(v)(t_1)|\le r_0|t_2-t_1|\to 0 \qquad \text{when } t_2\to t_1$$

pentru orice $t_2\ge t_1\ge t_0$ şi $v\in C$.
• $T(C)$ este echiconvergent:
Aceasta rezultă, ţinând seama de faptul că $l_{T(v)}=0$, din

$$|T(v)(t)|\le P(r_0)\int_t^{+\infty}(s-t)h(s)ds, \qquad t\ge t_0,\ v\in C.$$

Pasul 3 *T este continuu.*

În afara tehnicii de tip Montel de a desface integralele prezentată pe parcursul demonstraţiei de la Teorema 12, altă metodă larg răspândită de stabilire a continuităţii unui operator într-un spaţiu liniar înzestrat cu topologie de tip metric (pentru a reduce orice raţionament cu şiruri generalizate în sensul Moore-Smith [43, Capitolul 2] la unul bazat pe şiruri obişnuite) constă în aplicarea teoremei de convergenţă dominată a lui Lebesgue. Dau în cele ce urmează detaliile relevante.

Fixăm $v \in C$ şi fie $(v_n)_n$ un şir tare convergent în C. Adică, $\|v_n - v\| \to 0$ pentru $n \to +\infty$. Pentru orice $t \geq t_0$, obţinem, ţinând seama de (2.39), că

$$|q(t, v_n(t))| \leq P(r_0)h(t), \qquad n \geq 1.$$

Aplicarea teoremei de convergenţă dominată a lui Lebesgue, dat fiind că aplicaţia $t \mapsto th(t)$ este în $L^1((t_0, +\infty), \mathbb{R})$, conduce la

$$\lim_{n\to+\infty} \int_t^{+\infty} (t-s)q(s, v_n(s))ds = \int_t^{+\infty} (t-s)q(s, v(s))ds \quad \text{pentru orice} \quad t \geq t_0.$$

Am stabilit astfel că $\lim_{n\to+\infty} T(v_n) = T(v)$ punctual. Deoarece $T(C)$ este relativ compactă, va exista un subşir $(T(v_l))_l$ al lui $(T(v_k))_k$ convergând tare la o anumită funcţie $w \in A(t_0)$. Pentru că o convergenţă tare (uniformă) asigură convergenţa punctuală cu păstrarea funcţiei limită, avem $w = T(v)$. În sfârşit, $T(v_n)$ converge tare la $T(v)$ când $n \to +\infty$ şi astfel operatorul T este continuu.

Concluzia se obţine via teorema Schauder-Tikhonov de punct fix. □

Următorul rezultat este de tip Hale-Onuchic şi priveşte existenţa soluţiilor care verifică (2.23).

Teorema 14 *Fixăm $t_0 \geq 1$ şi c, $d > 0$. Fie C dată de*

$$C = \{u \in C([t_0, +\infty), \mathbb{R}) : ct \leq u(t) \leq (c+d)t,\, t \geq t_0\}$$

şi

$$D = \{(t, u_t) \in \mathbb{R}^2 : t \geq t_0,\, u_t \in [ct, (c+d)t]\}$$

un domeniu tip unghi al lui $\mathbb{R}^2$.

Presupunem că $f : D \to (0, +\infty)$ este continuă şi astfel încât

$$\int_{t_0}^{+\infty} f(s, u(s))ds \leq d \quad \textit{for all} \quad u \in C.$$

Atunci, ec. (2.36) are o soluţie $u(t)$, definită în $[t_0, +\infty)$, cu proprietatea că

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t} = c \tag{2.40}$$

şi

$$u'(t_0) = \frac{u(t_0)}{t_0} \qquad \textit{şi} \qquad u'(t) - \frac{u(t)}{t} < 0,\, t > t_0. \tag{2.41}$$

Demonstraţie. Consider mulţimile

$$E = \{v \in C([t_0,+\infty),\mathbb{R}) : tv(t) = u(t),\, t \geq t_0,\, u \in C\}$$

şi $F = E \cap A(t_0)$. Se observă că F este convexă, mărginită şi închisă în raport cu norma lui $A(t_0)$ şi respectiv topologia acestuia.

Introducem operatorul $T : F \to F$ prin formula

$$T(v)(t) = c + \int_t^{+\infty} \frac{1}{s^2} \int_{t_0}^{s} \tau f(\tau, \tau v(\tau)) d\tau ds, \qquad t \geq t_0,$$

unde $v \in F$.

Deşi nu vom detalia paşii necesari aplicării teoremei Schauder-Tikhonov operatorului T, să stabilim că T *este bine definit*.

Presupun, în acest scop, că funcţia $k : [t_0,+\infty) \to (0,+\infty)$ este continuu diferenţiabilă şi astfel încât

$$\left|k'(t)\right| \int_t^{+\infty} \frac{d\tau}{k(\tau)} \leq m < +\infty, \qquad t \geq t_0.$$

Atunci, pentru orice $f \in C([t_0,+\infty),\mathbb{R}) \cap L^1((t_0,+\infty),\mathbb{R})$, avem, printr-o integrare prin părţi, că

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{k(s)} \int_{t_0}^{s} k'(\tau) f(\tau) d\tau ds = \int_{t_0}^{t} \left[k'(s) \int_s^t \frac{d\tau}{k(\tau)} \right] f(s) ds,$$

rezultând convergenţa integralei

$$\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{k(t)} \int_{t_0}^{t} \left|k'(s) f(s)\right| ds dt. \tag{2.42}$$

Să stabilim, pentru mai târziu, că

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} s f(s) ds = 0. \tag{2.43}$$

În fapt, altă integrare prin părţi duce la

$$\frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} s f(s) ds = \int_{t_0}^{t} f(s) ds - \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s} f(\tau) d\tau ds \tag{2.44}$$

iar concluzia decurge din aplicarea regulii lui L'Hospital în cel de-al doilea termen al membrului din dreapta al lui (2.44) când $t \to +\infty$.

Integrala (2.42) pentru $k(\tau) = \exp(\tau)$ for $\tau \geq t_0$ este utilizată în [5, Propoziţia 15]. În cazul lui $k(\tau) = \tau^2$, unde $\tau \geq t_0$, rezultă că integrala din formula lui T este convergentă. Astfel, operatorul T este bine definit.

Pentru a stabili (2.41), presupun că $v \in F$ este un punct fix al lui T. Atunci, pentru $u \in C$ dat de $u(t) = tv(t)$, unde $t \geq t_0$, deducem că

$$u'(t) = \frac{u(t)}{t} - \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} sf(s,u(s))ds. \tag{2.45}$$

Concluziile (2.40), (2.41) rezultă acum din (2.45), (2.43). □

Am explicat în Secţiunea 2.3 că o investigaţie a teoriei integrării asimptotice pentru ec. (2.13) din punctul de vedere al pseudo-Wronskianului

$$u'(t) - \frac{u(t)}{t}, \qquad t \geq t_0, \tag{2.46}$$

unde $u(t)$ reprezintă o soluţie a ec. (2.13), are o anumită semnificaţie vizavi de teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. Alte detalii în această privinţă pot fi citite în [53, 58]. Cazul când (2.46) se găseşte în $L^1((t_0,+\infty),\mathbb{R})$ a fost discutat în [58]. Să enunţăm concluziile investigaţiei respective folosind β-condiţii.

Teorema 15 (cf. [58]) *Presupunem că $f : [t_0,+\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă în timp ce $F : [t_0,+\infty) \times [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ este continuă şi nedescrescătoare în cea de-a doua variabilă. Următoarea inegalitate de comparaţie are loc*

$$|f(t,u)| \leq F\left(t, \frac{|u|}{t}\right), \qquad t \geq t_0 \geq 1,\ u \in \mathbb{R}.$$

(i) Presupunem că există $\lambda \in (0,1)$ şi $c \neq 0$ astfel încât

$$\int_{t_0}^{+\infty} t \ln\left(\frac{t}{t_0}\right) F\left(t, \frac{2}{t_0}(1+\lambda)|c|\right) dt < \lambda |c|.$$

Atunci, ec. (2.36) are o soluţie $u(t)$, definită pe $[t_0,+\infty)$, cu dezvoltarea asimptotică $u(t) = at + o(1)$ pentru $t \to +\infty$, unde $a = a(u) \in \mathbb{R}$, sign $u(t) =$ sign c pentru orice $t \geq t_0$, astfel ca

$$u(t) - \int_{t_0}^{t} \frac{u(s)}{s} ds = c + o(1) \quad \text{pentru} \quad t \to +\infty.$$

În particular,

$$\int_{t_0}^{+\infty} \left[u'(t) - \frac{u(t)}{t}\right] dt$$

converge.

(ii) Presupunem că există $a \in \mathbb{R}$ şi $c > 0$ cu proprietatea că

$$\int_{t_0}^{+\infty} t\left[1 + \ln\left(\frac{t}{t_0}\right)\right] F\left(t, |a| + \frac{c}{t_0}\right) dt < c.$$

Atunci, ec. (2.36) are o soluţie $u(t)$, definită pe $[t_0,+\infty)$, cu dezvoltarea asimptotică $u(t) = at + o(1)$ pentru $t \to +\infty$ astfel încât

$$\int_{t_0}^{+\infty} \left| u'(t) - \frac{u(t)}{t} \right| dt < +\infty.$$

Teorema 14 stabileşte existenţa unei soluţii a ec. (2.36) pentru care (2.46) are un singur zero, şi anume momentul iniţial t_0. Nu ştiu în prezent dacă pseudo-Wronskianul (2.46) poate oscila sub acţiunea unui set de ipoteze viabile.

Rezultatul următor, asemănător cu Teorema 14, investighează cazul soluţiilor asimptotic liniare ale ec. (2.36).

Teorema 16 *Fixăm $t_0 \geq 1$ şi a, b, $c > 0$. Fie C^* dată de*

$$C^* = \{u \in C([t_0, +\infty), \mathbb{R}) : \ at + b - c \leq u(t) \leq at + b, \ t \geq t_0\}$$

şi

$$D^* = \{(t, u_t) \in \mathbb{R}^2 : \ t \geq t_0, \ u_t \in [at + b - c, at + b]\}$$

o bandă în $\mathbb{R}^2$.

Presupunem că $f : D^* \to (0, +\infty)$ este continuă şi cu proprietatea că

$$\int_{t_0}^{+\infty} s f(s, u(s)) ds \leq c \quad \text{pentru orice} \quad u \in C^*.$$

Atunci, ec. (2.36) are o soluţie $u(t)$, definită în $[t_0, +\infty)$, astfel ca

$$\begin{cases} u(t) = at + b + o(1) \\ u'(t) = a + o\left(t^{-1}\right) \end{cases} \quad \text{pentru} \quad t \to +\infty.$$

În particular, $u(t) - tu'(t) = b + o(1)$ când $t \to +\infty$.

Demonstraţie. (schiţă de) La fel ca în demonstraţia Teoremei 14, operatorul integral şi spaţiul de funcţii sunt modelate ţinând seama de următoarea ecuaţie integrală

$$u(t) = at + b - t \int_t^{+\infty} \frac{1}{s^2} \int_s^{+\infty} \tau f(\tau, u(\tau)) d\tau, \qquad t \geq t_0. \tag{2.47}$$

Derivând ec. (2.47), obţinem

$$\begin{cases} u'(t) = a + \int_t^{+\infty} f(s, u(s)) ds, \\ u(t) - tu'(t) = b - \int_t^{+\infty} s f(s, u(s)) ds \end{cases}$$

pentru $t \geq t_0$.

Concluzia decurge din aceste formule prin aplicarea teoremei de punct fix Schauder-Tikhonov. □

Observaţia 8 Foarte recent, A. Constantin [22] investighează existenţa unei soluţii a problemei la limită

$$\begin{cases} u'' + f(t,u) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(0) = 0,\ u(t) > 0 \text{ când } t > 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{t} = c > 0, \end{cases}$$

cu c prescris. Pentru rezultate conexe, vezi [90, 89, 82]. Deşi ecuaţia integrală asociată problemei la limită a fost realizată pentru $t_0 = 0$ [22, p. 134], adaptarea sa la cazul lui $t_0 \geq 1$ este imediată:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 + c(t - t_0) + t\int_t^{+\infty} f(s,u(s))ds \\ &\quad - t_0\int_{t_0}^{+\infty} f(s,u(s))ds + \int_{t_0}^{t} sf(s,u(s))ds, \qquad t \geq t_0. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Observăm că, în cazul lui Constantin, dacă neliniaritatea ia numai valori pozitive, atunci soluţia $u(t)$ a ec. (2.48) satisface (2.23). Pentru a stabili o legătură cu Teoremele 14, 16, să remarcăm că (2.48) poate fi ”împachetată” în

$$u(t) = u_0 + C(t - t_0) - t\int_{t_0}^{t} \frac{1}{s^2}\int_{t_0}^{s} \tau f(\tau,u(\tau))d\tau ds$$

pentru orice $t \geq t_0$, unde $C = c + \int_{t_0}^{+\infty} f(s,u(s))ds$.

2.5 Teorema lui I. Sobol’

În 1948, I. Sobol’ [74] publică un articol important relativ la integrarea asimptotică a ecuaţiei diferenţiale liniare omogene de ordinul n

$$y^{(n)} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t)y^{(n-k)}(t) = 0, \qquad t \geq t_0 \geq 1, \tag{2.49}$$

unde $y^{(0)} \equiv y$. Închei capitolul cu o demonstraţie a rezultatului lui Sobol’ din două motive. Mai întâi, teorema lui Sobol’ este un precursor al teoriei Hale-Onuchic [33]. Apoi, pentru că este util să avem la îndemână un operator integral în cazul general al ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Alte articole semnificative ale lui Sobol’ [75, 76] se referă la *tehnica Riccatiană* [34] în teoria integrării asimptotice.

Teorema 17 (cf. [74]) *Presupunem că funcţiile $a_k : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ sunt continue şi astfel ca*

$$\int_{t_0}^{+\infty} t^{k-1}|a_k(t)|dt < +\infty, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Atunci, fiind dat $s \in \overline{0,n-1}$, ec. (2.49) are o soluţie $y(t)$ cu proprietăţile următoare

$$\begin{cases} y^{(s)}(t) = s! + o(1) \\ y^{(s+1)}(t) = o\left(t^{-1}\right), \ldots, y^{(n-1)}(t) = o\left(t^{-n+s+1}\right) \end{cases} \quad \text{când} \quad t \to +\infty$$

şi

$$y(t) = t^s + \omega(t), \qquad |\omega(t)| \le Y \cdot \int_{t_0}^{t} (t-u)^{s-1} \psi(u) du,$$

unde

$$Y = \sum_{j=1}^{n} \sup_{\tau \ge t_0} \tau^{n-s-j} \left| y^{(n-j)}(\tau) \right| < +\infty, \qquad \psi(u) = \sum_{j=1}^{n} \int_{u}^{+\infty} v^{j-1} \left| a_j(v) \right| dv$$

pentru t, $u \ge t_0$.

Demonstraţie. Presupun că

$$m = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{+\infty} t^{j-1} \left| a_j(t) \right| dt < \frac{1}{3}.$$

Notez cu $V_s(t_0)$ mulţimea tuturor funcţiilor $y(t)$ cu valori reale, de $(n-1)$ ori continuu diferenţiabile, definite pe $[t_0, +\infty)$ şi caracterizate prin

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{y^{(s-p)}(t)}{t^p} \in \mathbb{R}, \qquad p \in \overline{0, s},$$

şi (dacă $s \le n-2$)

$$y^{(s+q)(t)} = o\left(t^{-q}\right) \quad \text{când} \quad t \to +\infty, \qquad q \in \overline{1, n-1-s}.$$

Odată înzestrat cu operaţiile uzuale cu funcţii şi cu norma de tip Cebâşev

$$\|y\| = \sum_{j=1}^{n} \sup_{t \ge t_0} \left[t^{n-s-j} \left| y^{(n-j)}(t) \right| \right], \qquad y \in V_s(t_0),$$

$V_s(t_0)$ devine spaţiu Banach.

Introducem operatorul $T : V_s(t_0) \to V_s(t_0)$ cu formula

$$T(y)(t) = t^s + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-u)^{s-1}}{(s-1)!} \left[\sum_{j=1}^{n} \int_{u}^{+\infty} \frac{(u-v)^{n-s-1}}{(n-s-1)!} a_j(v) y^{(n-j)}(v) dv \right] du$$

pentru orice $t \ge t_0$, $y \in V_s(t_0)$.

Voi stabili că T *este o contracţie de coeficient* $k = 3m$. Pentru aceasta, estimez componentele normei lui $V_s(t_0)$.

• Cazul $0 \le p \le s-1$:

Avem

$$\frac{\left| (T(y_1))^{(p)}(t) - (T(y_2))^{(p)}(t) \right|}{t^{s-p}}$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \frac{(t-u)^{s-1-p}}{t^{s-p}} \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{+\infty} v^{n-s-1} \left|a_j(v)\right| \left|y_1^{(n-j)}(v) - y_2^{(n-j)}(v)\right| dv$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{+\infty} \left[v^{j-1} \left|a_j(v)\right|\right] \cdot \left[v^{n-s-j} \left|y_1^{(n-j)}(v) - y_2^{(n-j)}(v)\right|\right] dv$$
$$\leq m \cdot \|y_1 - y_2\|$$

pentru orice $t \geq t_0$, $y_{1,2} \in V_s(t_0)$.

• Cazul $p = s$:

Componenta s a normei satisface

$$\begin{aligned}\left|(T(y_1))^{(s)}(t) - (T(y_2))^{(s)}(t)\right| &\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{+\infty} v^{j-1} \left|a_j(v)\right| dv \cdot \|y_1 - y_2\|, \\ &\leq m \cdot \|y_1 - y_2\|,\end{aligned}$$

unde $t \geq t_0$, $y_{1,2} \in V_s(t_0)$.

• Cazul $1 \leq p \leq n - s - 1$ (adică, $s + 1 \leq s + p \leq n - 1$):

Iarăşi, avem

$$\begin{aligned}&t^p \left|(T(y_1))^{(s+p)}(t) - (T(y_2))^{(s+p)}(t)\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} t^p \int_{t}^{+\infty} v^{n-s-p-1} \left|a_j(v)\right| \left|y_1^{(n-j)}(v) - y_2^{(n-j)}(v)\right| dv \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \int_{t}^{+\infty} v^{n-s-1} \left|a_j(v)\right| \left|y_1^{(n-j)}(v) - y_2^{(n-j)}(v)\right| dv \\ &\leq m \cdot \|y_1 - y_2\|, \qquad t \geq t_0,\ y_{1,2} \in V_s(t_0).\end{aligned}$$

În sfârşit,

$$\|T(y_1) - T(y_2)\| \leq \left(3 \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{+\infty} v^{j-1} \left|a_j(v)\right| dv\right) \cdot \|y_1 - y_2\|,$$

unde $y_{1,2} \in V_s(t_0)$.

Concluzia decurge din principiul contracţiei al lui Banach. □

Referinţe Bibliografice

1. Agarwal, R.P., O'Regan, D.: Existence theory for single and multiple solutions to singular positone BVP. J. Differential Eqs. **175**, 393–414 (2001)
2. Agarwal, R.P.: Infinite interval problems for differential, difference and integral equations. Kluwer, Dordrecht (2001)
3. Agarwal, R.P., O'Regan, D.: Upper and lower solutions for singular problems with nonlinear boundary data. NoDEA - Nonlinear Diff. Eqs. Appl. **9**, 419–440 (2002)
4. Agarwal, R.P., Grace, S.R., O'Regan, D.: Oscillation theory for second order linear, half-linear, superlinear and sublinear dynamic equations. Kluwer, Dordrecht (2002)
5. Agarwal, R.P., Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: Existence and asymptotic behavior of solutions of a boundary value problem on an infinite interval. Math. Comput. Modelling **41**, 135–157 (2005)
6. Avramescu, C.: Sur l'existence des solutions convergentes de systèmes d'équations différentielles non linéaires. Ann. Mat. Pura Appl. **81**, 147–168 (1969)
7. Bellman, R.: The stability of solutions of linear differential equations. Duke Math. J. **10**, 643–647 (1943)
8. Bellman, R.: The boundedness of solutions of linear differential equations. Duke Math. J. **14**, 83–97 (1947)
9. Bellman, R.: Stability theory of differential equations. McGraw-Hill, London (1953)
10. Bihari, I.: A generalization of a lema of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **7**, 81–94 (1956)
11. Bihari, I.: Researches of the boundedness and stability of the solutions of non-linear differential equations. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **8**, 261–278 (1957)
12. Bitterlich-Willmann, J.: Über die asymptoten der lösungen einer differentialgleichung. Monatsh. Math. Phys. **50**, 35–39 (1941)
13. Boas, M.L., Boas Jr., R.P. , Levinson, N.: The growth of solutions of a differential equation. Duke Math. J. **9**, 847–853 (1942)
14. Brauer, F., Wong, J.S.W.: On the asymptotic relationships between solutions of two systems of ordinary differential equations. J. Differential Eqs. **6**, 527–543 (1969)
15. Brauer, F.: Some stability and perturbation problems for differential and integral equations. Monogr. Mat. **25**, I.M.P.A., Rio de Janeiro (1976)
16. Caligo, D.: Comportamento asintotico degli integrali dell'equazione $y''(x)+A(x)y(x)=0$, nell'ipotesi $\lim_{x\to+\infty} A(x)=0$. Boll. U.M.I. **3**, 286–295 (1941)
17. Coffman, C.V., Wong, J.S.W.: Oscillation and nonoscillation theorems for second order ordinary differential equations. Funkc. Ekvac. **15**, 119–130 (1972)
18. Constantin, A.: On the asymptotic behavior of second order nonlinear differential equations. Rend. Mat. Appl. **7**, 627–634 (1993)
19. Constantin, A.: Global existence of solutions for perturbed differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. **168**, 237–299 (1995)

20. Constantin, A.: Existence of positive solutions of quasilinear elliptic equations. Bull. Austral. Math. Soc. **54**, 147–154 (1996)
21. Constantin, A.: Positive solutions of quasilinear elliptic equations. J. Math. Anal. Appl. **213**, 334–339 (1997)
22. Constantin, A.: On the existence of positive solutions of second order differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. **184**, 131–138 (2005)
23. Coppel, W.A.: Stability and asymptotic behavior of differential equations. D.C. Heath and Comp., Boston (1965)
24. Dannan, F.M.: Integral inequalities of Gronwall-Bellman-Bihari type and asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations. J. Math. Anal. Appl. **108**, 151–164 (1985)
25. Eastham, M.S.P.: The asymptotic solution of linear differential systems. Applications of the Levinson theorem. Clarendon, Oxford (1989)
26. Ehrnström, M.: Positive solutions for second-order nonlinear differential equations. Nonlinear Anal. **64**, 1608–1620 (2006)
27. Ehrnström, M.: On radial solutions of certain semi-linear elliptic equations. Nonlinear Anal. **64**, 1578–1586 (2006)
28. Evans, L.C., Gariepy, R.F.: Measure theory and fine properties of functions. CRC Press, Boca Raton (1992)
29. Ghizzetti, A.: Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee. Rend. Mat. Appl. Univ. Roma **8**, 28–42 (1949)
30. Golomb, M.: Bounds for solutions of nonlinear differential systems. Arch. Rat. Mech. Anal. **1**, 272–282 (1958)
31. Grammatikopoulos, M.K.: Oscillatory and asymptotic behavior of differential equations with deviating arguments. Hiroshima Math. J. **6**, 31–53 (1976)
32. Gronwall,T.H.: Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations. Ann. Math. **20**, 292–296 (1918/1919)
33. Hale, J.K., Onuchic, N.: On the asymptotic behavior of solutions of a class of differential equations. Contributions Diff. Eqns. **2**, 61–75 (1963)
34. Hartman, P.: Unrestricted solution fields of almost-separable differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **63**, 560–580 (1948)
35. Hartman, P.: On non-oscillatory linear differential equations of second order. Amer. J. Math. **74**, 389–400 (1952)
36. Hartman, P., Wintner, A.: On the asignment of asymptotic values for the solutions of linear differential equations of second order. Amer. J. Math. **77**, 475–483 (1955)
37. Hartman, P., Onuchic, N.: On the asymptotic integration of ordinary differential equations. Pacific J. Math. **13**, 1193–1207 (1963)
38. Hartman, P.: Ordinary differential equations. J. Wiley & Sons, New York (1964)
39. Hartman, P.: Asymptotic integration of ordinary differential equations. SIAM J. Math. Anal. **14**, 772–779 (1983)
40. Haupt, O.: Über lösungen linearer differentialgleichungen mit asymptoten. Math. Z. **48**, 212–220 (1942)
41. Haupt, O.: Über das asymptotische verhalten der lösungen gewisser linearer gewöhnlicher differentialgleichungen. Math. Z. **48**, 289–292 (1942)
42. Headley, V.B.: A multidimensional nonlinear Gronwall inequality. J. Math. Anal. Appl. **47**, 250–255 (1974)
43. Kelley, J.L.: General topology. Van Nostrand, New York (1955)
44. Kiguradze, I.T., Chanturia, T.A.: Asymptotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations. Kluwer, Dordrecht (1993)
45. Kwong, M.K., Wong, J.S.W.: An application of integral inequality to second order nonlinear oscillation. J. Diff. Eqns. **46**, 63–77 (1982)
46. Kusano, T., Trench, W.F.: Global existence theorems for solutions of nonlinear differential equations with prescribed asymptotic behavior. J. London Math. Soc. **31**, 478–486 (1985)
47. Kusano, T., Trench, W.F.: Existence of global solutions with prescribed asymptotic behavior for nonlinear ordinary differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. **142**, 381–392 (1985)

48. Kusano, T., Naito, M., Usami, H.: Asymptotic behavior of a class of second order nonlinear differential equations. Hiroshima Math. J. **16**, 149–159 (1986)
49. Lipovan, O.: On the asymptotic behavior of the solutions to a class of second order nonlinear differential equations. Glasgow Math. J. **45**, 179–187 (2003)
50. Meng, F.W.: A note on Tong paper: the asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations of second order. Proc. Amer. Math. Soc. **108**, 383–386 (1990)
51. Mingarelli, A.B.: Volterra-Stieltjes integral equations and generalized ordinary differential expressions. Lect. Notes Math. **989**, Springer-Verlag, Berlin (1983)
52. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: Global existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for second-order nonlinear differential equations. Nonlinear Anal. **51**, 339–368 (2002)
53. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: Global existence and asymptotic behavior of solutions of second-order nonlinear differential equations. Funkcial. Ekvac. **47**, 167–186 (2004)
54. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: Asymptotic behavior of nonoscillatory solutions of second order nonlinear differential equations. Proc. Dynam. Systems Appl. **4**, 312–319 (2004)
55. Mustafa, O.G.: Initial value problem with infinitely many linear-like solutions for a second-order differential equation. Appl. Math. Lett. **18**, 931–934 (2005)
56. Mustafa, O.G.: On the existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for perturbed nonlinear differential equations of second order. Glasgow Math. J. **47**, 177–185 (2005)
57. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: Asymptotic integration of a class of nonlinear differential equations. Appl. Math. Lett. **19**, 849–853 (2006)
58. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: On asymptotic integration of a nonlinear second-order differential equation. Nonlinear Stud. **13**, 155–167 (2006)
59. Naito, M.: Integral averages and the asymptotic behavior of solutions of second order ordinary differential equations. J. Math. Anal. Appl. **164**, 370–380 (1992)
60. Nohel, J.A.: Commentary to Chapter I, Stability and asymptotic behavior of solutions of ordinary differential equations. In *Selected papers of Norman Levinson, vol. 1*. Birkhäuser, Boston (1998)
61. Opial, Z.: Sur un système d'inégalités intégrales. Ann. Polon. Math. **3**, 200–209 (1957)
62. O'Regan, D.: Upper and lower solutions for singular problems arising in the theory of membrane response of a spherical cap. Nonlinear Anal. **47**, 1163–1174 (2001)
63. Orpel, A.: On the existence of positive radial solutions for a certain class of elliptic BVPs. J. Math. Anal. Appl. **299**, 690–702 (2004)
64. Pachpatte, B.G.: On some integral inequalities similar to Bellman-Bihari inequalities. J. Math. Anal. Appl. **49**, 794–802 (1975)
65. Philos, C.G.: Asymptotic behavior of a class of nonoscillatory solutions of differential equations with deviating arguments. Math. Slovaca **33**, 409–428 (1983)
66. Philos, C.G., Purnaras, I.K., Tsamatos, P.C.: Asymptotic to polynomials solutions for nonlinear differential equations. Nonlinear Anal. **59**, 1157–1179 (2004)
67. Philos, C.G., Tsamatos, P.C.: Solutions approaching polynomials at infinity to nonlinear ordinary differential equations. Electron. J. Differential Eqs. **79**, 1–25 (2005)
68. Rogovchenko, Y.V., Villari, G.: Asymptotic behavior of solutions for second order nonlinear autonomous differential equations. NoDEA - Nonlinear Diff. Eqs. Appl. **4**, 271–307 (1997)
69. Rogovchenko, S.P., Rogovchenko, Y.V.: Asymptotics of solutions for a class of second order nonlinear differential equations. Univ. Iagel. Acta Math. **36**, 157–164 (1998)
70. Rogovchenko, Y.V.: On the asymptotic behavior of solutions for a class of second order nonlinear differential equations. Collect. Math. **49**, 113–120 (1998)
71. Rogovchenko, S.P., Rogovchenko, Y.V.: Asymptotic behavior of solutions of second order nonlinear differential equations. Portugal. Math. **57**, 17–33 (2000)
72. Rogovchenko, S.P., Rogovchenko, Y.V.: Asymptotic behavior of certain second order nonlinear differential equations. Dynam. Systems Appl. **10**, 185–200 (2001)
73. Seifert, G.: Global asymptotic behavior of solutions of positively damped Liénard equations. Ann. Polon. Math. **51**, 283–290 (1990)
74. Sobol', I.M.: On the asymptotic behavior of the solutions of linear differential equations. Doklady Akad. Nauk SSSR **61**, 219–222 (1948) (în rusă)

75. Sobol', I.M.: On Riccati equations and the reduction to them of linear equations of second order. Doklady Akad. Nauk SSSR **65**, 257–278 (1949) (în rusă)
76. Sobol', I.M.: Limiting solution of Riccati's equation and its application to investigation of solutions of a linear differential equation of second order. Moskov. Gos. Univ. Uć. Zap. Mat. **155**, 195–205 (1952) (în rusă)
77. Tong, J.: The asymptotic behavior of a class of nonlinear differential equations of second order. Proc. Amer. Math. Soc. **84**, 235–236 (1982)
78. Trench, W.F.: Asymptotic behavior of solutions of $Lu = g(t, u, ..., u^{(k-1)})$. J. Differential Eqs. **11**, 38–48 (1972)
79. Trench, W.F.: Systems of differential equations subject to mild integral conditions. Proc. Amer. Math. Soc. **87**, 263–270 (1983)
80. Trench, W.F.: Global solutions of nonlinear perturbations of linear differential equations. WS-SIAA **1**, 543–557 (1992)
81. Viswanatham, B.: A generalization of Bellman's lema. Proc. Amer. Math. Soc. **14**, 15–18 (1963)
82. Wahlén, E.: Positive solutions of second-order differential equations. Nonlinear Anal. **58**, 359–366 (2004)
83. Waltman, P.: On the asymptotic behavior of solutions of a nonlinear equation. Proc. Amer. Math. Soc. **15**, 918–923 (1964)
84. Weyl, H.: Comment on the preceding paper. Amer. J. Math. **68**, 7–12 (1946)
85. Wilkins Jr., J.E.: On the growth of solutions of linear differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. **50**, 388–394 (1944)
86. Wintner, A.: Comments on "flat" oscillations of low frequency. Duke Math. J. **24**, 365–366 (1957)
87. Wong, J.S.W.: On two theorems of Waltman. SIAM J. Appl. Math. **14**, 724–728 (1966)
88. Wong, J.S.W.: On second order nonlinear oscillation. Funkc. Ekvac. **11**, 207–234 (1968)
89. Yin, Z.: Monotone positive solutions of second-order nonlinear differential equations. Nonlinear Anal. **54**, 391–403 (2003)
90. Zhao, Z.: Positive solutions of nonlinear second order ordinary differential equations. Proc. Amer. Math. Soc. **121**, 465–469 (1994)

Capitolul 3
Comportamentul asimptotic al soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale neliniare

Rezumat Se discută o serie de probleme importante pentru integrarea asimptotică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare. După dezvoltarea maşinăriei necesare la aplicarea teoriei punctului fix în investigaţie, sunt prezentate mai multe rezultate generale privind comportamentul pe termen lung al soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale neliniare de ordinul *n* cu accent pe existenţa soluţiilor pseudo-polinomiale, pe reprezentarea asimptotică a derivatelor şi pe efectul perturbaţiilor asupra comportamentului asimptotic al soluţiilor.

Sursă Agarwal, R.P., Djebali, S., Moussaoui, T., Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: On the asymptotic behavior of solutions to nonlinear ordinary differential equations. Asympt. Anal. **54**, 1–50 (2007)

3.1 Introducere

În ultimii ani are loc o resurgenţă într-unul dintre subiectele clasice ale teoriei calitative a ecuaţiilor diferenţiale ordinare, integrarea asimptotică a ecuaţiilor diferenţiale neliniare. Numeroase studii asupra comportamentului pe termen lung al soluţiilor, în multe cazuri pentru ecuaţii cu neliniarităţi semnificative, se găsesc în relaţie directă cu analiza ecuaţiilor cu derivate parţiale care modelează fenomene fizice, biologice sau sociale. Există o literatură abundentă privind integrarea asimptotică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Cititorul poate găsi în [54, 1] numeroase referinţe. Lucrarea [1] conţine şi o clasificare a rezultatelor cunoscute în raport cu tipul neliniarităţii din ecuaţie şi cu condiţiile integrale impuse acesteia. Comentarii relevante ale rezultatelor şi metodelor existente vor fi făcute pe parcursul capitolului.

În acest ultim capitol discutăm o serie de subiecte importante pentru integrarea asimptotică a ecuaţiilor diferenţiale ordinare într-un cadru riguros dar flexibil de analiză funcţională. În prima parte, dezvoltăm mijloacele pentru aplicarea mai multor teoreme de punct fix la probleme de integrare asimptotică. În particular, în Secţiunea 3.2 patru spaţii de funcţii sunt introduse, proprietăţile lor sunt examinate şi se construiesc criterii de relativă compactitate. Continuitatea operatorilor integrali generali este discutată în Secţiunea 3.3 în timp ce o reprezentare integrală pentru soluţii este detaliată în Secţiunea 3.4.

În partea a doua a capitolului prezentăm anumite dezvoltări ale rezultatelor generale de integrare asimptotică obţinute de Kusano şi Trench [43, 44, 73] şi Mustafa şi Rogovchenko [54, 56]. Omagiem excelenta contribuţie la teoria integrării asimptotice datorată lui Kusano and Trench în Secţiunea 3.5. În Secţiunea 3.6, o teorie de integrare asimptotică este construită pentru cazul soluţiilor pseudo-polinomiale care este extrem de apropiat de analiza disconjugării (neoscilabilitate, interpolare) ecuaţiilor diferenţiale ordinare. Secţiunile 3.7, 3.8 sunt dedicate unei reprezentări integrale a derivatelor şi unei discuţii despre efectul perturbaţiilor asupra soluţiilor în cazul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul al II-lea.

3.2 Spaţii de funcţii şi criterii de compactitate relativă

Primul spaţiu de funcţii de care este nevoie aici poate fi introdus profitabil cu o ilustrare datorată unui rezultat din 1967 al lui Bihari [11, p. 2] privind ecuaţia integrală

$$x(t) = z(t) + \int_0^t k_1(t,s) f(s,x(s))ds + \int_t^\infty k_2(t,s) f(s,x(s))ds, \quad t \geq 0, \tag{3.1}$$

dacă vom considera că toate funcţiile prezente sunt continue şi au valori în $\mathbb{R}^n$.

Teorema 18 (Bihari) *Presupunem că funcţiile k_1, k_2, z sunt mărginite,*

$$\|k_i(t,s)\| \leq K_i,\ i = \overline{1,2}, \qquad \|z(t)\| \leq \gamma,$$

în timp ce funcţia f satisface inegalitatea

$$\|f(t,x)\| \leq G(t, \|x\|), \qquad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

pentru o funcţie majorantă continuă pe porţiuni G care este nedescrescătoare în cea de-a doua variabilă. Presupunem, în plus, că există o funcţie nenegativă, continuă g care verifică inegalitatea

$$\gamma + K_1 \int_0^t G(s,g(s))ds + K_2 \int_t^\infty G(s,g(s))ds \leq g(t), \qquad t \geq 0. \tag{3.2}$$

Atunci, ecuaţia integrală (3.1) are cel puţin o soluţie continuă $x(t)$ care există pe semi-axa nenegativă şi satisface inegalitatea $\|x(t)\| \leq g(t)$ pentru orice $t \geq 0$.

Acest rezultat al lui Bihari are două caracteristici interesante. Prima priveşte mărginirea soluţiei $x(t)$ de către o funcţie pozitivă *dată* $g(t)$ în timp ce a doua este legată de forma particulară a inegalităţii (3.2). Folosind o funcţie pozitivă $g(t)$ în Teorema 18 ca funcţie de comparaţie, introducem mulţimea $X_1(t_0; g)$ a tuturor funcţiilor continue cu valori reale (sau, într-un cadru mai general, cu valori vectoriale) $u(t)$ care sunt definite în $[t_0,+\infty)$ pentru un anumit $t_0 \in \mathbb{R}$ şi se comportă la infinit ca funcţia $g(t)$ dată, adică $u(t) = O(g(t))$ când $t \to +\infty$. Această mulţime, înzestrată cu operaţiile uzuale cu funcţii, este un spaţiu liniar [24, p. 2]. Construcţia normei în $X_1(t_0;g)$ ţine seama de faptul că, pentru orice element $u(t)$ al lui $X_1(t_0;g)$, mărimea $u(t)/g(t)$ este o funcţie continuă mărginită pe $[t_0,+\infty)$. Pe de altă parte, funcţiile continue mărginite, cu valori reale, definite pe $[t_0,+\infty)$ formează un spaţiu liniar $C_b([t_0,+\infty),\mathbb{R})$ [39, p. 12] ce este completat cu succes de norma *sup* a lui Cebâşev $\|\cdot\|_\infty$. Acum este natural să introducem norma în $X_1(t_0;g)$ prin

$$\|u\| = \sup_{t\geq t_0} \frac{|u(t)|}{g(t)}.$$

Să menţionăm că aplicabilitatea unei asemenea norme depăşeşte zona teoriei de integrare asimptotică a ecuaţiilor diferenţiale [20, p. 250], [25, p. 2], [64, p. 1099]. Norma este utilă în cadrul *problemei C_g-aproximării* a lui Bernstein [2, pp. 315, 317]. Această problemă a fost enunţată şi rezolvată pentru un caz particular important în 1924 de Bernstein [10], cf. de asemeni [3, p. 95], [67]. În acord cu formularea originală, C_g este mulţimea tuturor funcţiilor continue cu valori reale $u(t)$ care există pe întreagă dreaptă reală şi satisfac condiţia

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{u(t)}{g(t)} = 0.$$

C_g este înzestrat cu operaţiile uzuale cu funcţii şi cu norma

$$\|u\|_g = \sup_{-\infty<t<+\infty} \frac{|u(t)|}{g(t)},$$

vezi [3, p. 96], [2, p. 315]. Aici, g este o funcţie continuă pozitivă care există pe $\mathbb{R}$ astfel încât

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{t^n}{g(t)} = 0, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

Problema C_g-aproximării cere condiţii necesare şi suficiente ce trebuie impuse asupra lui $g(t)$ pentru a face mulţimea tuturor polinoamelor densă în C_g. Scurte demonstraţii ale rezultatelor originale ale lui Bernstein au fost date de Achiezer şi Babenko [2]. Alte dezvoltări pentru cazul când g este inferior semicontinuă pot fi găsite în articolul lui Carleson [16], în timp ce o soluţie completă este obţinută în 1953 de Pollard [67]. În enunţul următor, C_0 desemnează spaţiul liniar al tuturor funcţiilor continue cu valori reale care sunt definite în $\mathbb{R}$ şi se anulează la $\pm\infty$, echipat cu norma Cebâşev.

Teorema 19 (Pollard) *Pentru ca $\left(\frac{t^n}{g(t)}\right)_{n\geq 0}$ să fie densă în C_0 este necesar şi suficient ca*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln g(t)}{1+t^2} dt = -\infty$$

şi să existe un şir de polinoame p_n astfel încât

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p_n(t)}{g(t)} = 1 \qquad \text{şi} \qquad \frac{|p_n(t)|}{g(t)} \le C, \qquad -\infty < t < +\infty.$$

Concluzia standard a unor asemenea investigaţii este că devine futil studiul existenţei soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ordinare în $X_1(t_0;g)$ sau spaţii similare prin *tehnica perturbării polinomiale* care funcţionează foarte bine pe intervale mărginite [21, p. 32], [52, p. 210], [53, p. 634] graţie teoremei de aproximare a lui Weierstrass [23, p. 198].

Teorema 20 *Spaţiul $(X_1(t_0;g), \|\cdot\|)$ este un spaţiu Banach.*

Demonstraţia acestei afirmaţii se găseşte, de exemplu, în [25, p. 2], [76, pp. 61, 349].

Următorul spaţiu de funcţii este un subspaţiu al lui $X_1(t_0;g)$ notat $X_2(t_0;g)$ şi care se defineşte drept mulţimea funcţiilor $u(t)$ din $X_1(t_0;g)$ pentru care

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{u(t)}{g(t)} = l_u \in \mathbb{R}.$$

Spaţiul $X_2(t_0;g)$ moşteneşte structura liniară şi norma lui $X_1(t_0;g)$.

Teorema 21 *Spaţiul $(X_2(t_0;g), \|\cdot\|)$ este un spaţiu Banach.*

Demonstraţie. Fixez $T > t_0$. Urmând ideile din [7, p. 149], [25, p. 3] în cazul $g = 1$, nu este dificil de verificat că operatorul $\mathscr{F} : X_2(t_0;g) \to C([t_0,T],\mathbb{R})$ dat prin formula

$$(\mathscr{F}u)(\tau) = \begin{cases} u\left(t_0 + \frac{\tau - t_0}{T-\tau}\right) \left[g\left(t_0 + \frac{\tau-t_0}{T-\tau}\right)\right]^{-1}, & t_0 \le \tau < T, \\ l_u, & \tau = T, \end{cases} \tag{3.3}$$

este un izomorfism izometric între $(X_2(t_0;g), \|\cdot\|)$ şi $(C([t_0,T],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$. $\square$

Menţionăm că Atkinson [6, p. 383] a stabilit un izomorfism izometric similar între subspaţiul $\mathscr{C}_0 \subset X_2(0;1)$ format din toate funcţiile cu valori reale $u(t)$ pentru care $l_u = 0$ şi subspaţiul lui $C([0,1],\mathbb{R})$ conţinând toate funcţiile $v(t)$ pentru care $v(1) = 0$.

Pentru a utiliza teorii clasice de punct fix la integrarea asimptotică a ecuaţiilor diferenţiale, în afară de a avea la îndemână un operator integral corespunzător (vezi discuţia din [1]), este nevoie de anumite criterii de compactitate relativă. Piatra de hotar în această privinţă o constituie *criteriul Arzelà-Ascoli de compactitate* pentru submulţimile lui $C([t_0,T],\mathbb{R})$, vezi [19, p. 81], [24, p. 30], [37, p. 21].

Teorema 22 (C. Arzelà, 1895) *Fie A nevidă. Presupunem că pentru o familie $\mathscr{U} = \{u_\alpha : \alpha \in A\}$ din $C([t_0,T],\mathbb{R})$ următoarele condiţii au loc:*

(i) $\mathscr{U}$ este uniform mărginită, adică există $M > 0$ astfel încât

$$|u_\alpha(\tau)| \le M$$

pentru orice $\tau \in [t_0, T]$ şi orice $\alpha \in A$;

(ii) (G. Ascoli, 1884) *$\mathscr{U}$ este echicontinuă, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ cu proprietatea că*

$$|u_\alpha(\tau_1) - u_\alpha(\tau_2)| < \varepsilon$$

pentru orice $\tau_1, \tau_2 \in [t_0, T]$ cu $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$ şi orice $\alpha \in A$.

Atunci, familia $\mathscr{U}$ este relativ compactă.

Reciproca teoremei de mai sus este rezultatul următor, cf. [39, pp. 23-24].

Propoziţia 8 *Fie A şi $\mathscr{U}$ ca în Teorema 22. Dacă $\mathscr{U}$ este relativ compactă, atunci condiţiile (i), (ii) ale Teoremei 22 sunt satisfăcute.*

O observaţie interesantă privind condiţia (ii) din Teorema 22 îi aparţine lui Hartman [34] care a stabilit că există şiruri uniform mărginite $(u_n)_n$ de funcţii din $C([t_0, T], \mathbb{R})$ având toate subşirurile divergente aproape peste tot.

Un criteriu de compactitate relativă pentru $C^m([t_0, T], \mathbb{R})$, unde $m \ge 1$, poate fi acum enunţat fără dificultate dacă introducem norma *sup*

$$\|u\| = \sum_{i=0}^{m} \sup_{t \in [t_0, T]} \left| u^{(i)}(t) \right|, \tag{3.4}$$

vezi [39, p. 14].

Teorema 23 *Fie A nevidă şi să presupunem că pentru $\mathscr{U} = \{u_\alpha : \alpha \in A\} \subset C^m([t_0, T], \mathbb{R})$ următoarele au loc:*

(i) există $M > 0$ astfel ca

$$\left| u_\alpha^{(r)}(\tau) \right| \le M, \qquad 0 \le r \le m,$$

pentru orice $\tau \in [t_0, T]$ şi orice $\alpha \in A$;

(ii) pentru fiecare $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca

$$\left| u_\alpha^{(r)}(\tau_1) - u_\alpha^{(r)}(\tau_2) \right| < \varepsilon, \qquad 0 \le r \le m,$$

pentru orice τ_1, $\tau_2 \in [t_0, T]$ cu $|\tau_1 - \tau_2| < \delta$ şi orice $\alpha \in A$.

Atunci, mulţimea $\mathscr{U}$ este relativ compactă.

Un criteriu de compactitate relativă pentru submulţimile spaţiului $X_2(t_0; 1)$ poate fi formulat pe baza izomorfismului (3.3), cf. [25, p. 3]. Rezultatul a fost publicat în 1969 de Avramescu [7, p. 149] şi, de asemeni, de Atkinson [6, p. 383]. O concluzie similară privind structura mulţimilor compacte din $X_2(t_0; 1)$ a fost prezentată ulterior de Philos în [63, p. 412], unde cititorul este trimis la manuscrise nepublicate ale lui V. Staikos pentru demonstraţie.

Teorema 24 *Fie A nevidă şi să presupunem că pentru* $\mathscr{U} = \{u_\alpha : \alpha \in A\} \subset X_2(t_0;1)$ *următoarele condiţii au loc:*

(i) există $M > 0$ *astfel ca*

$$|u_\alpha(t)| \leq M$$

pentru orice $t \geq t_0$ *şi orice* $\alpha \in A$*;*

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât*

$$|u_\alpha(t_1) - u_\alpha(t_2)| < \varepsilon$$

pentru orice $t_1, t_2 \geq t_0$ *cu* $|t_1 - t_2| < \delta$ *şi orice* $\alpha \in A$;

(iii) $\mathscr{U}$ *este echiconvergentă, adică pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $Q = Q(\varepsilon) > t_0$ *cu proprietatea că*

$$|u_\alpha(t) - l_{u_\alpha}| < \varepsilon \tag{3.5}$$

pentru orice $t \geq Q(\varepsilon)$ *şi orice* $\alpha \in A$.

Atunci, familia $\mathscr{U}$ *este relativ compactă.*

Să dăm câteva indicaţii pentru altă demonstraţie a Teoremei 24. Aceasta poate fi realizată adaptând tehnica folosită în [15, Capitolul 2], [39, pp. 22-25] la stabilirea criteriului Arzelà-Ascoli de compactitate relativă (Teorema 22). Se bazează pe noţiunile de *ε-net* şi *mărginire totală* pe care le introducem în continuare pentru convenienţa cititorului.

Definiţia 1 ([15, p. 8], [39, p. 22]) *Fie* $\varepsilon > 0$ *şi M o submulţime a spaţiului metric* (X,d). *Mulţimea* $M_1 \subset X$ *este numită* ε-net *al lui M dacă pentru fiecare* $x \in M$ *există* $y \in M_1$ *astfel încât* $d(x,y) < \varepsilon$. *Mulţimea M este* total mărginită *dacă, pentru orice* $\varepsilon > 0$, *posedă măcar un* ε*-net finit.*

Este binecunoscut faptul că în orice spaţiu metric complet o mulţime este relativ compactă dacă şi numai dacă este total mărginită, vezi [15, p. 10], [39, p. 23], [77, p. 13].

Construcţia unui ε-net al lui $\mathscr{U}$ în Teorema 22 se realizează după cum urmează [39, p. 24]. Fixăm $\varepsilon > 0$ şi alegem $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ care satisface ipoteza (ii) din Teorema 22. Notăm cu Δ mulţimea $\{t_k : k = 1,2,\ldots n,\ t_n = T,\ t_k - t_{k-1} < \delta\}$ şi cu $P([t_0,T],[M_1,M_2],\Delta)$ mulţimea tuturor funcţiilor continue $u(t)$ definite pe $[t_0,T]$ cu valori $[M_1,M_2]$, $M_i \in \mathbb{R}$, astfel încât restricţia lui $u(t)$ la $[t_{k-1},t_k]$ să fie un segment pentru orice k. Asemenea funcţii se numesc de obicei *linii poligonale*. Notăm acum cu $\mathscr{P}$ mulţimea $P([t_0,T],[-M,M],\Delta)$, unde M satisface ipoteza (i) a Teoremei 22. Nu este dificil să stabilim următoarele:

(1) $\|u\|_\infty = \max\limits_{0 \leq k \leq n} |u(t_k)|$, $u \in \mathscr{P}$;

(2) mulţimea $\mathscr{P}$ este relativ compactă în $C([t_0,T],\mathbb{R})$;

(3) mulţimea $\mathscr{P}$ este un ε-net al lui $\mathscr{U}$.

Atunci, $\mathscr{P}$ are un ε-net finit în $C([t_0,T],\mathbb{R})$ care este 2ε-net al lui $\mathscr{U}$.

Întorcându-ne la Teorema 24, notăm cu $P([t_0,+\infty),[M_1,M_2],\Delta,T)$ mulţimea tuturor funcţiilor continue $u(t)$ definite pe $[t_0,+\infty)$ cu valori în $[M_1,M_2]$, $M_i \in \mathbb{R}$, astfel ca restricţia lui $u(t)$ la $[t_0,T]$ să fie un element al lui $P([t_0,T],[M_1,M_2],\Delta)$ şi $u(t)=u(T)$ pentru orice $t \geq T$. Cu alte cuvinte, elementele noii mulţimi sunt obţinute via extinderea continuă la dreapta pe un interval infinit a elementelor lui $P([t_0,T],[M_1,M_2],\Delta)$ prin atribuirea unei valori contante pe $[T,+\infty)$. Fixez acum $\varepsilon > 0$ şi introduc M, δ şi Q ca în Teorema 24. Mulţimea $P([t_0,+\infty),[-M,M],\Delta,Q)$ este un 2ε-net al lui $\mathscr{U}$ relativ compact, vezi [60, p. 18]. Observăm că orice ε-net finit al mulţimii $P([t_0,+\infty),[-M,M],\Delta,Q)$ în $X_2(t_0;1)$ este un 3ε-net finit al lui $\mathscr{U}$.

O adaptare interesantă a ipotezei (iii) din Teorema 24 a fost sugerată de Z. Yin [78, p. 393] care înlocuieşte inegalitatea (3.5) cu o condiţie Bolzano-Cauchy pentru existenţa limitei fără specificarea valorii sale, adică,

(iii′) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $Q = Q(\varepsilon) > t_0$ astfel ca

$$|u_\alpha(t) - u_\alpha(s)| < \varepsilon$$

pentru orice $t, s \geq Q(\varepsilon)$ şi orice $\alpha \in A$.

Încheiem excursul privitor la criteriul Arzelà-Ascoli de compactitate relativă menţionând demonstraţia acestuia realizată în [35, p. 4] pe baza teoremei de selecţie a lui Cantor.

Este uşor acum să obţinem un *criteriu de compactitate relativă pentru submulţimile lui* $X_2(t_0;g)$ înlocuind în enunţul Teoremei 24 toate funcţiile $u_\alpha(t)$ cu fracţiile corespunzătoare $u_\alpha(t)/g(t)$.

Pentru cel de-al treilea spaţiu de funcţii, fixez numărul natural $n \geq 1$. De asemeni, fie $(\rho_r)_{0\leq r\leq n-1}$ un set de funcţii continue şi pozitive definite pe $[t_0,+\infty)$. Notăm cu $X_3(t_0;\rho_r)$ mulţimea tuturor funcţiilor $u(t)$ cu valori reale, de $(n-1)$ ori continuu diferenţiabile, care sunt definite în $[t_0,+\infty)$ şi satisfac $u^{(r)}(t) = O(\rho_r(t))$ pentru $t \to +\infty$, $0 \leq r \leq n-1$. Aici, $u^{(0)} \equiv u$. Această mulţime este înzestrată cu operaţiile uzuale cu funcţii în timp ce norma în $X_3(t_0;\rho_r)$ este definită ca

$$\|u\| = \sum_{r=0}^{n-1} \sup_{t\geq t_0} \frac{\left|u^{(r)}(t)\right|}{\rho_r(t)}.$$

Teorema 25 *Spaţiul* $(X_3(t_0;\rho_r),\|\cdot\|)$ *este spaţiu Banach.*

Demonstraţie. Urmăm argumentaţia din [25, p. 3]. Este evident că pentru fiecare $u \in X_3(t_0;\rho_r)$ avem $u^{(r)} \in X_1(t_0;\rho_r)$, $0 \leq r \leq n-1$. Mărimile de mai jos

$$m_T = \min_{0\leq r\leq n-1}\left\{\inf_{[t_0,T]}[\rho_r(t)]\right\}, \qquad M_T = \max_{0\leq r\leq n-1}\left\{\sup_{[t_0,T]}[\rho_r(t)]\right\},$$

$$\|u\|_T = \sum_{r=0}^{n-1}\sup_{[t_0,T]}\left|u^{(r)}(t)\right|, \qquad \|u\|_{T,\rho} = \sum_{r=0}^{n-1}\sup_{[t_0,T]}\frac{\left|u^{(r)}(t)\right|}{\rho_r(t)},$$

unde $T \geq t_0$, satisfac condiţia

$$\frac{1}{M_T} \cdot \|u\|_T \leq \|u\|_{T,\rho} \leq \frac{1}{m_T} \cdot \|u\|_T .$$

Inegalitatea arată că toate şirurile Cauchy în $X_3(t_0;\rho_r)$ sunt local uniform convergente la funcţii de clasă C^{n-1}. $\square$

Structura următorului spaţiu de funcţii este puţin mai complicată. Fie $t_0 \geq 1$ în concordanţă cu [1, Section 2] şi fixez numărul natural q, unde $1 \leq q \leq n$. Introducem mulţimea $X_4^q(t_0)$ a tuturor funcţiilor cu valori reale, de $(n-1)$ ori continuu diferenţiabile, $u(t)$ care sunt definite pe $[t_0,+\infty)$ şi satisfac

$$\lim_{t\to+\infty}\left[u^{(n-1-k)}(t) - \sum_{i=0}^{k}\frac{a_i^u}{(k+1-i)!}t^{k+1-i}\right] = a_{k+1}^u, \qquad a_k^u \in \mathbb{R},\ a_0^u = 0$$

pentru orice $0 \leq k \leq q-1$. Ca de obicei, mulţimea $X_4^q(t_0)$ este înzestrată cu operaţiile tipice cu funcţii numerice iar norma îi este dată de mărimea

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sum_{j=1}^{n-1}\sup_{t\geq t_0}\left\{\frac{\left|u^{(n-1-j)}(t)\right|}{t^j}\right\} \\ &\quad + \sum_{k=0}^{q-1}\sup_{t\geq t_0}\left\{\left|u^{(n-1-k)}(t) - \sum_{i=0}^{k}\frac{a_i^u}{(k+1-i)!}t^{k+1-i}\right|\right\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nu este dificil de remarcat că $X_4^q(t_0)$ constituie un subspaţiu al lui $X_3(t_0;t^{n-1-r})$. În fapt, observăm că o aplicare repetată a regulii lui L'Hospital ne conduce la

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} u^{(n-1)}(t) &= \lim_{t\to+\infty}\frac{u^{(n-2)}(t)}{t} = 2\lim_{t\to+\infty}\frac{u^{(n-3)}(t)}{t^2} \\ &= \cdots = (n-1)!\lim_{t\to+\infty}\frac{u(t)}{t^{n-1}} = a_1. \end{aligned}$$

În particular, aceasta justifică prezenţa primului tip de termeni în suma din (3.6). Motivaţia pentru introducerea celui de-al doilea tip de termeni se bazează pe faptul că

$$u^{(n-1-k)}(t) - \sum_{i=0}^{k}\frac{a_i^u}{(k+1-i)!}t^{k+1-i} \in X_2(t_0;1)$$

pentru orice $0 \leq k \leq q-1$.

O mai bună înţelegere a structurii elementelor lui $X_4^q(t_0)$ necesită următoarea lemă tehnică.

Lema 13 *Fie $u \in C^{n-1}([t_0,+\infty)\mathbb{R})$ şi presupunem că pentru $1 \leq p \leq n$ fixat avem*

$$\lim_{t\to+\infty}\left[u^{(n-p)}(t)-\sum_{i=0}^{p-1}\frac{a_i}{(p-i)!}t^{p-i}\right]=a_p,$$

unde $a_0=0$, $a_i\in\mathbb{R}$, $0\le i\le p-1$. *Atunci,*

$$u(t)=\sum_{i=0}^{p}\frac{a_i}{(n-i)!}t^{n-i}+o(t^{n-p})\qquad \textit{când } t\to+\infty.$$

Lema poate fi stabilită prin aplicarea repetată a regulii lui L'Hospital. De asemeni, poate fi demonstrată prin integrări iterate ca în [9, p. 128], [60, p. 36].

Lema 13 arată că orice element al spaţiului $X_4^q(t_0)$ poate fi scris ca

$$u(t)=A_1t^{n-1}+\ldots+A_qt^{n-q}+o(t^{n-q})\qquad \text{pentru } t\to+\infty,$$

unde $A_i\in\mathbb{R}$. Cu alte cuvinte, elementele lui $X_4^q(t_0)$ sunt funcţii de $(n-1)$ ori continuu diferenţiabile cu valori reale care posedă expansiuni asimptotice polinomiale.

Teorema 26 *Spaţiul* $(X_4^q(t_0),\|.\|)$ *este spaţiu Banach.*

Demonstraţie. Voi explica ideea principală a demonstraţiei. Fie $(u_r)_{r\ge1}$ un şir Cauchy în $X_4^q(t_0)$ şi $T>t_0$. Pentru orice $\gamma>0$ există $R_\gamma>1$ astfel încât

$$\|u_{r_1}-u_{r_2}\|<\frac{\gamma}{T^{n-1}}$$

pentru orice $r_j\ge R_\gamma$. Drept consecinţă, deducem că

$$\left|u_{r_1}^{(n-1-j)}(t)-u_{r_2}^{(n-1-j)}(t)\right|<\frac{\gamma}{T^{n-1-j}}$$

pentru orice $t\in[t_0,T]$, $0\le j\le n-1$, şi $r_j\ge R_\gamma$. De aceea, $(u_r)_{r\ge1}$ este şir Cauchy în $C^{n-1}([t_0,T],\mathbb{R})$ şi are limita uniformă $u^{(n-1-j)}$, unde u este o C^{n-1}-funcţie. Primul (tip de) termen în (3.6) ne permite să deducem că, pentru $0\le j\le n-1$, $t^{-j}u_r^{(n-1-j)}(t)$ converge uniform la $t^{-j}u^{(n-1-j)}(t)$ în $[t_0,+\infty)$ când $r\to+\infty$. Deoarece estimarea

$$\left|u_{r_1}^{(n-1)}(t)-u_{r_2}^{(n-1)}(t)\right|<\frac{\gamma}{T^{n-1}}$$

este valabilă pe intervalul $[t_0,+\infty)$, concludem că

$$\left|a_1^{u_{r_1}}-a_1^{u_{r_2}}\right|\le\frac{\gamma}{T^{n-1}},$$

de unde

$$\lim_{r\to+\infty}a_1^{u_r}=a_1^u.$$

Fie acum şirul $(u_r^{(n-2)}(t) - a_1^{u_r} t)_{r \geq 1}$ care converge uniform la o funcţie $v(t)$ pe $[t_0, +\infty)$. Mai mult, avem

$$\lim_{r \to +\infty} a_2^{u_r} = \lim_{t \to +\infty} v(t) \in \mathbb{R}.$$

Aceasta poate fi stabilită uşor remarcând mai întâi că şirul $(u_r^{(n-2)}(t) - a_1^{u_r} t)_{r \geq 1}$ este şir Cauchy în $C([t_0, T], \mathbb{R})$ căci avem

$$\begin{aligned} \left| u_{r_1}^{(n-2)}(t) - a_1^{u_{r_1}} t - u_{r_2}^{(n-2)}(t) - a_1^{u_{r_2}} t \right| &\leq \left[t^{-1} \left| u_{r_1}^{(n-2)}(t) - u_{r_2}^{(n-2)}(t) \right| \right. \\ &\quad + \left. \left| a_1^{u_{r_1}} - a_1^{u_{r_2}} \right| \right] T \\ &< 2\gamma, \qquad r_j \geq R_\gamma. \end{aligned}$$

Deoarece şirul $(u_r^{(n-2)}(t) - a_1^{u_r} t)_{r \geq 1}$ converge local uniform la $u^{(n-2)}(t) - a_1^u t$, concludem că funcţiile u şi v sunt legate prin ecuaţia

$$u^{(n-2)}(t) - a_1^u t = v(t)$$

valabilă pentru orice $t \geq t_0$. $\square$

Aşa cum se poate vedea din demonstraţia Teoremei 26, prezenţa primului termen în (3.6) este motivată de evidente avantaje computaţionale. Altă explicaţie este oferită de o tehnică datorată lui Weierstrass şi folosită la stabilirea convergenţei uniforme în $C^{n-1}([t_0, T], \mathbb{R})$. În acest scop, să considerăm un şir $(f_r)_{r \geq 1}$ de C^1-funcţii astfel încât şirul derivatelor $(f_r')_{r \geq 1}$ să conveargă la g uniform pe $[t_0, T]$. Presupunem, de asemeni, că pentru un anumit $t_1 \in [t_0, T]$ şirul de numere reale $(f_r(t_1))_{r \geq 1}$ converge la $l \in \mathbb{R}$. Atunci, şirul $(f_r)_{r \geq 1}$ converge uniform la C^1-funcţia f definită, pentru orice $t \in [t_0, T]$, de

$$f(t) = l + \int_{t_1}^{t} g(s) ds,$$

vezi, de exemplu, [15, p. 16], [76, p. 152]. Problema cheie aici este să legăm convergenţa şirului de derivate $(f_r')_{r \geq 1}$ de convergenţa şirului de funcţii $(f_r)_{r \geq 1}$, o ţintă atinsă prin introducerea primului termen în suma de la (3.6). Observăm că unii autori au construit norme pe baza tehnicii precedente folosind sume de tipul

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left| u^{(n-1-k)}(t_0) \right|}{t_0^k},$$

vezi [30, p. 39], [63, p. 413] în timp ce în [60, p. 35] sunt considerate spaţii de C^{n-1}-funcţii cu $u^{(k)}(t_0) = 0$ pentru $0 \leq k \leq n-1$. După părerea mea, alegerea primului termen în (3.6) este extrem de potrivită pentru scopurile teoriei de integrare asimptotică atât pentru că decurge în mod direct din existenţa limitei

$$\lim_{t\to+\infty} u^{(n-1)}(t)$$

cât şi datorită rolului special jucat de asemenea mărimi [1, Section 2], [56].

Enunţăm fără demonstraţie un *criteriu de relativă compactitate pentru submulţimile lui* $X_4^q(t_0)$ remarcând faptul că el poate fi stabilit prin aplicarea iterată a Teoremei 24.

Teorema 27 *Fie B o mulţime din* $X_4^q(t_0)$ *care verifică următoarele condiţii:*

(i) există $L>0$ *astfel ca*

$$\frac{\left|u^{(n-1-j)}(t)\right|}{t^j} \le L, \qquad 1 \le j \le n-1,$$

şi

$$\left| u^{(n-1-k)}(t) - \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i^u}{(k+1-i)!} t^{k+1-i} \right| \le L, \qquad 0 \le k \le q-1,$$

pentru orice $t \ge t_0$ *şi orice* $u \in B$*;*

(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $\delta(\varepsilon) > 0$ *astfel încât*

$$\left| \frac{u^{(n-1-j)}(t_1)}{t_1^j} - \frac{u^{(n-1-j)}(t_2)}{t_2^j} \right| < \varepsilon, \qquad 1 \le j \le n-1,$$

şi

$$\left| u^{(n-1-k)}(t_1) - u^{(n-1-k)}(t_2) - \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i^u}{(k+1-i)!} (t_1^{k+1-i} - t_2^{k+1-i}) \right| < \varepsilon,$$

$0 \le k \le q-1$, *pentru orice* $t_s \ge t_0$ *cu* $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$ *şi orice* $u \in B$*;*

(iii) pentru orice $\varepsilon > 0$ *există* $C(\varepsilon) > t_0$ *astfel ca*

$$\left| \frac{u^{(n-1-j)}(t)}{t^j} - \frac{a_1^u}{j!} \right| < \varepsilon, \qquad 1 \le j \le n-1,$$

şi

$$\left| u^{(n-1-k)}(t) - \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i^u}{(k+1-i)!} t^{k+1-i} - a_{k+1}^u \right| < \varepsilon, \qquad 0 \le k \le q-1,$$

pentru orice $t \ge C(\varepsilon)$ *şi orice* $u \in B$*.*

Atunci, mulţimea B este relativ compactă în $X_4^q(t_0)$*.*

La fel ca în cazul Teoremei 22, avem un rezultat reciproc, similar cu Propoziţia 8.

Propoziţia 9 *Fie B o mulţime relativ compactă din $X_4^q(t_0)$. Atunci, condiţiile (i)-(iii) ale Teoremei 27 sunt satisfăcute.*

O simplificare importantă a calculelor cerute de Teorema 27 este dată în continuare.

Lema 14 *Fie M o submulţime a lui $X_4^q(t_0)$ cu următoarele proprietăţi:*
(i) există $L > 0$ astfel ca

$$\frac{\left|u^{(n-1-j)}(t)\right|}{t^j} \leq L, \qquad 0 \leq j \leq n-1, \tag{3.7}$$

pentru orice $t \geq t_0$ şi orice $u \in M$;
(ii) pentru orice $\varepsilon > 0$ există $C(\varepsilon) > t_0$ astfel încât

$$\left|u^{(n-1)}(t) - a_1^u\right| < \varepsilon$$

pentru orice $t \geq C(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$.
Atunci, există $C_1(\varepsilon) \geq C(\varepsilon)$ astfel ca

$$\left|\frac{u^{(n-1-j)}(t)}{t^j} - \frac{a_1^u}{j!}\right| \leq \varepsilon, \qquad 1 \leq j \leq n-1,$$

pentru orice $t \geq C_1(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$.

Demonstraţie. Fixez $\varepsilon > 0$. Se vede că

$$\lim_{\gamma \to +\infty} \frac{\varepsilon}{\gamma}\left(L\frac{\gamma}{\varepsilon}+1\right)\left[1-\left(\frac{L\frac{\gamma}{\varepsilon}}{L\frac{\gamma}{\varepsilon}+1}\right)^{n-1}\right] = 0,$$

astfel că există $\gamma > 15$ pentru care

$$\frac{\varepsilon}{\gamma}\left(L\frac{\gamma}{\varepsilon}+1\right)\left[1-\left(\frac{L\frac{\gamma}{\varepsilon}}{L\frac{\gamma}{\varepsilon}+1}\right)^{n-1}\right] < \frac{\varepsilon}{5}.$$

Acum, fie $1 \leq l \leq n-1$ şi $t \geq C(\varepsilon/\gamma)$. Integrând de l ori inegalitatea

$$a_1^u - \frac{\varepsilon}{\gamma} < u^{(n-1)}(t) < a_1^u + \frac{\varepsilon}{\gamma},$$

obţinem, pentru orice $u \in M$,

$$\sum_{i=1}^{l} u^{(n-1-i)}\left(C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right)\frac{\left[t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right]^{l-i}}{(l-i)!} + \left(a_1^u - \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{\left[t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right]^{l}}{l!}$$
$$\leq u^{(n-1-l)}(t)$$

şi

$$\sum_{i=1}^{l} u^{(n-1-i)}\left(C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right)\frac{\left[t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right]^{l-i}}{(l-i)!}+\left(a_1^u+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{\left[t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right]^{l}}{l!}$$
$$\geq u^{(n-1-l)}(t).$$

Aceste inegalităţi implică, pentru $t \geq C(\varepsilon/\gamma)$,

$$\sum_{i=1}^{l} u^{(n-1-i)}\left(C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right)\frac{1}{(l-i)!}\left[\frac{t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{l-i}\frac{1}{t^i}$$
$$+\left(a_1^u-\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{1}{l!}\left[\frac{t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{l}\leq\frac{u^{(n-1-l)}(t)}{t^l}$$

şi

$$\sum_{i=1}^{l} u^{(n-1-i)}\left(C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right)\frac{1}{(l-i)!}\left[\frac{t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{l-i}\frac{1}{t^i}$$
$$+\left(a_1^u+\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{1}{l!}\left[\frac{t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{l}\geq\frac{u^{(n-1-l)}(t)}{t^l}.$$

Observăm că, în acord cu (3.7), avem $|a_1^u| \leq L$.

Ţinând seama de

$$0<\frac{C(\varepsilon/\gamma)}{t}\leq 1,$$

concludem că

$$\left|\sum_{i=1}^{l} u^{(n-1-i)}\left(C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right)\frac{1}{(l-i)!}\left[\frac{t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{l-i}\frac{1}{t^i}\right|$$
$$\leq\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(l-i)!}\frac{\left|u^{(n-1-i)}\left(C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right)\right|}{\left[C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right]^{i}}\left[\frac{t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{l-i}\left[\frac{C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{i}$$
$$\leq\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{(l-i)!}L\frac{C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\leq 3L\frac{C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}.$$

Astfel,

$$\left|\sum_{i=1}^{l} u^{(n-1-i)}\left(C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\right)\frac{1}{(l-i)!}\left[\frac{t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{l-i}\frac{1}{t^i}\right| \le \frac{3\varepsilon}{\gamma}$$

pentru orice $t \ge C_1(\varepsilon) = (L\gamma/\varepsilon+1)C(\varepsilon/\gamma)$.

Mai mult,

$$\begin{aligned}
&\left|\left(a_1^u \pm \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{1}{l!}\left[\frac{t-C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{l} - \left(a_1^u \pm \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\frac{1}{l!}\right| \\
&\le \left|a_1^u \pm \frac{\varepsilon}{\gamma}\right|\frac{1}{l!}\left\{1-\left[1-\frac{C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{t}\right]^{n-1}\right\} \\
&\le \left(|a_1^u| + \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\left\{1-\left[1-\frac{C\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)}{C_1(\varepsilon)}\right]^{n-1}\right\} \\
&\le \left(L + \frac{\varepsilon}{\gamma}\right)\left[1-\left(1-\frac{1}{L\frac{\gamma}{\varepsilon}+1}\right)^{n-1}\right] \\
&= \frac{\varepsilon}{\gamma}\left(L\frac{\gamma}{\varepsilon}+1\right)\left[1-\left(\frac{L\frac{\gamma}{\varepsilon}}{L\frac{\gamma}{\varepsilon}+1}\right)^{n-1}\right] < \frac{\varepsilon}{5}
\end{aligned}$$

pentru orice $t \ge C_1(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$. Avem că

$$\frac{1}{l!}a_1^u - \varepsilon\left(\frac{1}{\gamma l!}+\frac{1}{5}+\frac{3}{\gamma}\right) < \frac{u^{(n-1-l)}(t)}{t^l} < \frac{1}{l!}a_1^u + \varepsilon\left(\frac{1}{\gamma l!}+\frac{1}{5}+\frac{3}{\gamma}\right)$$

pentru orice $t \ge C_1(\varepsilon)$ şi orice $u \in M$. Evident, alegerea lui $\gamma > 15$ implică

$$\frac{1}{\gamma l!}+\frac{3}{\gamma}+\frac{1}{5} < 1,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

3.3 Continuitatea operatorilor integrali

Funcţia pozitivă $g(t)$ din (3.2) joacă un rol fundamental în Teorema 18 deoarece controlează modul în care soluţia $x(t)$ a ec. (3.1) va evolua. În [11, p. 5], Bihari prezintă o tehnică ingenioasă de construcţie a unei asemenea funcţii în condiţii rezonabile cu privire la $G(t,r)$. Pentru a explica metoda sa, presupunem că $G(t,r) = h(t)\omega(r)$, unde funcţiile $h(t)$ şi $\omega(r)$ sunt continue, $\omega(r) > 0$ pentru $r > 0$ şi $\omega(r)$ este nedescrescătoare. Presupunem, de asemeni, că

$$\int_{0+} \frac{dx}{\omega(x)} = \int^{+\infty} \frac{dx}{\omega(x)} = +\infty \tag{3.8}$$

şi

$$\int_0^\infty h(t)dt < +\infty. \tag{3.9}$$

Putem considera fără să micşorăm gradul de generalitate (cazul complementar se tratează similar) că avem $K_1 < K_2$ în Teorema 18 şi că există $a > 0$ astfel încât

$$I(a) = \int_{\gamma+\frac{K_1}{K_2}a}^{\gamma+a} \frac{dr}{\omega(r)} = (K_2 - K_1)\int_0^\infty h(t)dt. \tag{3.10}$$

Atunci,

$$g(t) = \Omega^{-1}\left(\Omega(\gamma+a) - (K_2-K_1)\int_t^\infty h(s)ds\right),$$

unde, pentru orice $x > 0$ şi un $u_0 > 0$ fixat, funcţia Ω este definită de

$$\Omega(x) = \int_{u_0}^x \frac{dr}{\omega(r)}.$$

Un exemplu imediat de funcţie $\omega(r)$ satisfăcând condiţiile anterioare este dat de $\omega(r) = r$, $r \geq 0$. Un calcul direct implică

$$a = \gamma\rho_1 \frac{e^{\rho_1} - e^{\rho_2}}{\rho_1 e^{\rho_1} - \rho_2 e^{\rho_2}}, \tag{3.11}$$

unde $\rho_i = K_i \int_0^\infty h(t)dt$, $i = \overline{1,2}$.

Observăm că o clasă de exemple poate fi construită doar prin iterare. În fapt, să introducem funcţiile $(\omega_m)_{m\geq 1}$ date de formulele

$$\omega_1(r) = \ln(1+r), \qquad \omega_{m+1}(r) = \ln(1+r+\omega_m(r)), \qquad r \geq 0.$$

Este uşor de văzut că

$$0 < \omega_m(r) < mr \qquad \text{pentru orice } r > 0. \tag{3.12}$$

Inegalitatea (3.12) arată că funcţiile $\omega_m(r)$ satisfac condiţiile (3.8)-(3.9). Fie acum

$$a_m = \gamma\rho_1 \frac{e^{m\rho_1} - e^{m\rho_2}}{\rho_1 e^{m\rho_1} - \rho_2 e^{m\rho_2}}.$$

Astfel, definind

$$I_m(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma+\frac{K_1}{K_2}x}^{\gamma+x} \frac{dr}{\omega_m(r)}, \qquad x \geq 0,$$

şi ţinând seama de (3.12), avem

$$\begin{aligned}\sup_{x>0} I_m(x) &\geq I_m(a_m) > \frac{1}{m}\log\left(\frac{\gamma+a_m}{\gamma+\frac{K_1}{K_2}a_m}\right)\\ &= (K_2-K_1)\int_0^\infty h(t)dt.\end{aligned}$$

Cum funcţia $I_m(x)$ este continuă şi $I_m(0)=0$, deducem că există $a>0$ astfel încât

$$I_m(a) = \int_{\gamma+\frac{K_1}{K_2}a}^{\gamma+a} \frac{dr}{\omega_m(r)} = (K_2-K_1)\int_0^\infty h(t)dt.$$

Un rezultat analog, în cazul $K_2=0$, este discutat de Corduneanu [22, p. 362]. Inegalităţi similare lui (3.1) se folosesc în mod esenţial la studiul proprietăţilor globale ale ecuaţiilor diferenţiale ordinare neliniare de ordin arbitrar, cf. [72]. Inegalităţi integrale de forma

$$w(x) \leq \int_a^x \mathscr{K}\left(x,t,\frac{w(t)}{g(t)}\right)dt, \tag{3.13}$$

unde $g(t)$ este o funcţie continuă şi pozitivă dată, au fost investigate de Satō [71, p. 281]. În sfârşit, remarc că rezultate de acest fel pot fi construite cu ajutorul funcţiei S a lui Kamke, vezi [38, p. 289], [71, p. 284].

Stabilim în continuare anumite rezultate ce ne vor permite să demonstrăm că un caz particular de ecuaţie integrală (3.1) adaptat spaţiilor $X_3(t_0;\rho_r)$ are soluţie.

Teorema 28 *Fie $T>t_0$, $K>0$ şi B o mulţime din $X_3(t_0;\rho_r)$ astfel ca $\|b\| \leq K$ pentru orice $b \in B$. Fie funcţiile $f:[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g,h:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ continue şi considerăm că $h(t)$ nu se anulează eventual. Presupunem, de asemeni, că*

$$\left|f\left(s,u,u',\ldots,u^{(n-1)}\right)\right| \leq F\left(s,|u|,\left|u'\right|,\ldots,\left|u^{(n-1)}\right|\right),$$

unde funcţia de comparaţie $F:[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}_+^n \to [0,+\infty)$ este continuă şi satisface

$$\int^\infty F(s,K\rho_0(s),\ldots,K\rho_{n-1}(s))ds < +\infty.$$

Atunci, restricţia funcţiei $Q:[t_0,+\infty)\times B \to \mathbb{R}$,

$$Q(t,u) = g(t) + h(t)\int_t^\infty f\left(s,u(s),u'(s),\ldots,u^{(n-1)}(s)\right)ds, \quad t \geq t_0,\ u \in B,$$

la $[t_0,T]\times B$ este uniform continuă.

Demonstraţie. Introducem notaţia

$$f[s,u] \stackrel{\text{def}}{=} f\left(s, u(s), u'(s), \ldots, u^{(n-1)}(s)\right)$$

şi

$$[u](s) \stackrel{\text{def}}{=} (u(s), u'(s), \ldots, u^{(n-1)}(s)).$$

Atunci,

$$\begin{aligned}
|Q(t_2,u) - Q(t_1,v)| &\leq |g(t_2) - g(t_1)| + |h(t_2)| \cdot \left| \int_{t_1}^{t_2} |f[s,u]|\, ds \right| \\
&+ |h(t_2)| \cdot \left(\int_{t_1}^{\infty} |f[s,u] - f[s,v]|\, ds \right) \\
&+ |h(t_2) - h(t_1)| \cdot \left(\int_{t_1}^{\infty} |f[s,v]|\, ds \right).
\end{aligned}$$

Fixez $\beta > 0$. Atunci, există $T_\beta > T$ astfel ca

$$\int_{T_\beta}^{\infty} F(s, K\rho_0(s), \ldots, K\rho_{n-1}(s))ds < \frac{\beta}{16\,\|h\|_\infty},$$

unde

$$\|h\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{s \in [t_0, T]} |h(s)|.$$

Reamintesc notaţiile Teoremei 25. Introduc constanta $M_\beta \stackrel{\text{def}}{=} M_{T_\beta}$. Atunci, avem

$$\sup_{t \in [t_0, T_\beta]} \left| u^{(r)}(t) \right| \leq M_\beta K, \quad u \in B,\ 0 \leq r \leq n-1.$$

Deoarece funcţia f este uniform continuă în $[t_0, T_\beta] \times [-M_\beta K, M_\beta K]^n$, există $\delta = \delta(\beta)$ astfel ca

$$|f[s,u] - f[s,v]| < \frac{\beta}{8(T_\beta - t_0)\,\|h\|_\infty},$$

pentru orice $s \in [t_0, T_\beta]$ şi orice $[u](s)$, $[v](s) \in [-M_\beta K, M_\beta K]^n$ cu

$$\left| u^{(r)}(s) - v^{(r)}(s) \right| \leq \delta,$$

unde $0 \leq r \leq n-1$.

Fie u, $v \in B$ care satisfac $\|u - v\| \leq \frac{\delta}{M_\beta}$. Atunci, pentru orice $s \in [t_0, T_\beta]$, avem

$$\left|u^{(r)}(s)-v^{(r)}(s)\right| \le \sup_{t\in[t_0,T_\beta]}[\rho_r(t)]\cdot\frac{\delta}{M_\beta}\le\delta.$$

În continuare,

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{\infty}|f[s,u]-f[s,v]|\,ds &\le \int_{t_0}^{\infty}|f[s,u]-f[s,v]|\,ds\\ &\le \int_{t_0}^{T_\beta}|f[s,u]-f[s,v]|\,ds\\ &+\int_{T_\beta}^{\infty}|f[s,u]|\,ds+\int_{T_\beta}^{\infty}|f[s,v]|\,ds\\ &\le \int_{t_0}^{T_\beta}\frac{\beta}{8(T_\beta-t_0)\,\|h\|_\infty}ds+2\cdot\frac{\beta}{16\,\|h\|_\infty}\\ &=\frac{\beta}{4\,\|h\|_\infty}. \end{aligned}\tag{3.14}$$

Ideea din spatele acestui calcul este că, pentru orice funcţie continuă f care este şi L^1 pe un interval infinit, există un subinterval nemărginit pe care *restul integralei lui f poate fi făcut oricât de mic*. Aceasta ne permite să reluăm pe un subinterval compact al domeniului de definiţie a lui f calculul clasic de la demonstraţia teoremei Peano de existenţă, cf. [33, p. 15], [39, p. 40], în timp ce atribuim integralelor pe intervale nemărginite valori mici, vezi [54, pp. 355-356].

În sfârşit, avem

$$\begin{aligned}&|Q(t_2,u)-Q(t_1,v)|\\ &\le |g(t_2)-g(t_1)|+\|h\|_\infty\cdot\left|\int_{t_1}^{t_2}F(s,K\rho_0(s),\dots,K\rho_{n-1}(s))ds\right|\\ &+\|h\|_\infty\cdot\frac{\beta}{4\,\|h\|_\infty}+|h(t_2)-h(t_1)|\cdot\left(\int_{t_0}^{\infty}F(s,K\rho_0(s),\dots,K\rho_{n-1}(s))ds\right)\\ &\le |g(t_2)-g(t_1)|+\|h\|_\infty\,\|F(s,K\rho_0,\dots,K\rho_{n-1})\|_\infty\,|t_2-t_1|+\frac{\beta}{4}\\ &+\left(\int_{t_0}^{\infty}F(s,K\rho_0(s),\dots,K\rho_{n-1}(s))ds\right)\cdot|h(t_2)-h(t_1)|,\end{aligned}$$

ceea ce conduce la concluzie. □

Nu este greu de observat că Teoremele 28 şi 29 pot fi reformulate, cu ipoteze corespunzătoare, pentru o funcţie Q cu structură mai complicată dată de formula

$$\begin{aligned}Q(t,u)&=g(t)+\sum_{i=1}^{l}h_i(t)\int_{t_0}^{t}a_i(s)f\left(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s)\right)ds\\ &+\sum_{i=l+1}^{m}h_i(t)\int_{t}^{\infty}a_i(s)f\left(s,u(s),u'(s),\dots,u^{(n-1)}(s)\right)ds,\end{aligned}$$

ca, de exemplu, funcţiile

$$Q_1(t,u) = g(t) - \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f\left(s, u(s), u'(s), ..., u^{(n-1)}(s)\right) ds$$

şi

$$Q_2(t,u) = g(t) + \int_{t}^{\infty} \frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!} f\left(s, u(s), u'(s), ..., u^{(n-1)}(s)\right) ds.$$

Teorema 29 *În ipotezele Teoremei 28 presupunem că $g \in X_1(t_0;1)$ şi*

$$h(t) \int_{t}^{\infty} F(s, K\rho_0(s), ..., K\rho_{n-1}(s)) ds = o(1) \qquad \text{când } t \to +\infty. \tag{3.15}$$

Atunci, funcţia $V : B \to X_1(t_0;1)$ dată de $V(u)(t) = Q(t,u)$, $t \geq t_0$, $u \in B$, este uniform continuă.

Demonstraţie. Fixez $\beta > 0$. Rezultă din (3.15) că există $T_\beta > t_0$ astfel ca, pentru orice $t \geq T_\beta$,

$$h(t) \int_{t}^{\infty} F(s, K\rho_0(s), ..., K\rho_{n-1}(s)) ds < \frac{\beta}{2}.$$

Acum, avem

$$\begin{aligned} |V(u)(t) - V(v)(t)| &\leq h(t) \int_{t}^{\infty} |f[s,u] - f[s,v]| \, ds \\ &\leq h(t) \left[\int_{t}^{\infty} |f[s,u]| \, ds + \int_{t}^{\infty} |f[s,v]| \, ds \right] \\ &\leq \beta, \qquad t \geq T_\beta, \end{aligned} \tag{3.16}$$

unde u, $v \in B$.

Pe de altă parte, pentru $t \in [t_0, T_\beta]$, restricţia $Q : [t_0, T_\beta] \times B \to \mathbb{R}$ este uniform continuă. Astfel, există $\delta = \delta(\beta) > 0$ cu proprietatea că $|V(u)(t) - V(v)(t)| < \beta$ pentru orice $t \in [t_0, T_\beta]$ şi orice u, $v \in B$ satisfăcând $\|u - v\| < \delta$. Aşadar,

$$\|V(u) - V(v)\|_\infty < \beta$$

pentru orice u, $v \in B$ cu $\|u - v\| < \delta$. □

Să comentăm cu privire la tehnica din (3.14), (3.16). Mulţi autori, probabil datorită generalităţii ipotezelor din rezultatele lor, stabilesc continuitatea unui anumit operator integral T introducând şiruri de funcţii $(f_n)_n$ şi apoi examinând convergenţa lui $(T(f_n))_n$ pe baza teoremei de convergenţă dominată a lui Lebesgue [14, p. 54], [70, p. 19]. Vezi detalii în [1, Secţiunea 4]. Această abordare se reflectă, de exemplu, în lucrările lui Bainov şi Simeonov [8, pp. 94, 195], în articolele lui Mâagli şi Masmoudi [49, p. 301], Maatoug şi Zribi [50, p. 725], Miller şi Sell [51, p. 143], Granas şi Guennoun [31, p. 706], Granas et al. [32, p. 156], Frigon şi O'Regan

[29, pp. 39, 47], pentru a cita doar câteva. Pare să origineze din aplicarea teoremei graficului închis [14, p. 20] la stabilirea anumitor rezultate de *admisibilitate* pentru operatori integrali, cf. [22, p. 350]. După părerea mea, tehnica din (3.14) şi (3.16) este mai potrivită pentru studiul comportamentului asimptotic al soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ordinare generale. O procedură similară este dezvoltată de Przeradzki [68], care dovedeşte continuitatea unui operator integral folosind local uniform continuitatea neliniarităţii în chestiune mai degrabă decât teorema de convergenţă dominată a lui Lebesgue şi îşi încheie demonstraţia apelând la gradul topologic al *DC*-aplicaţiilor, cf. [42].

O dificultate semnificativă în lucrul cu spaţiile $X_1(t_0;g)$, $X_3(t_0;\rho_r)$ este lipsa unor criterii de compactitate relativă *generale*. Totuşi, prezentăm în cele ce urmează câteva condiţii suficiente relevante pentru relativa compactitate a unei submulţimi a lui $X_3(t_0;\rho_r)$. În acest scop, urmăm definiţia clasică datorată lui Ascoli şi numim *echicontinuă* orice mulţime $E \subset X_3(t_0;\rho_r)$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ cu

$$\left| \frac{u^{(r)}(t_2)}{\rho_r(t_2)} - \frac{u^{(r)}(t_1)}{\rho_r(t_1)} \right| < \varepsilon$$

pentru orice $0 \le r \le n-1$, orice t_1, $t_2 \in [t_0,+\infty)$ satisfăcând $|t_2 - t_1| < \delta$ şi orice $u \in E$. În mod similar, mulţimea E este considerată *echiconvergentă* dacă $u^{(r)} \in X_2(t_0;\rho_r)$ şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $Q = Q(\varepsilon) > t_0$ astfel încât

$$\left| \frac{u^{(r)}(t)}{\rho_r(t)} - \lim_{s\to+\infty} \frac{u^{(r)}(s)}{\rho_r(s)} \right| < \varepsilon$$

pentru orice $0 \le r \le n-1$ şi orice $u \in E$.

Propoziţia 10 *Fie $\mathscr{P}$ o mulţime mărginită din $X_3(t_0;\rho_r)$ şi $R_k : [t_0,+\infty) \times X_3(t_0;\rho_r) \to \mathbb{R}$, $0 \le k \le n-1$, funcţii continue astfel ca pentru orice $T > t_0$ şi orice mulţime $B \subset X_3(t_0;\rho_r)$ mărginită restricţiile $R_k : [t_0,T] \times B \to \mathbb{R}$ să fie uniform continue. Mai mult, fie $\mathscr{V}$ mulţimea tuturor funcţiilor $v(t)$ din $X_3(t_0;\rho_r)$ pentru care există elementul $p = p(v) \in \mathscr{P}$ cu proprietatea că*

$$v^{(k)}(t) = R_k(t,p), \qquad t \ge t_0, \qquad 0 \le k \le n-1.$$

Presupunem, de asemeni, că

$$\frac{|R_k(t,p)|}{\rho_k(t)} \le H(t), \qquad t \ge t_0,$$

pentru orice $p \in \mathscr{P}$, $0 \le k \le n-1$, unde H este o funcţie continuă, cu valori reale, definită pe $[t_0,+\infty)$ astfel încât

$$\lim_{t\to+\infty} H(t) = 0. \tag{3.17}$$

Atunci, mulţimea $\mathscr{V}$ este echicontinuă.

Demonstraţie. Observăm că, pentru orice $0 \le r \le n-1$, avem

$$\begin{aligned}\frac{v^{(r)}(t_2)}{\rho_r(t_2)} - \frac{v^{(r)}(t_1)}{\rho_r(t_1)} &= \left[\frac{1}{\rho_r(t_2)} - \frac{1}{\rho_r(t_1)}\right] R_r(t_2,p) \\ &\quad + \frac{1}{\rho_r(t_1)}\left[R_r(t_2,p) - R_r(t_1,p)\right].\end{aligned}$$

Fixez $\varepsilon > 0$. Rezultă din (3.17) că există $T_\varepsilon > t_0$ astfel ca $H(t) < \varepsilon/2$ pentru orice $t \ge T_\varepsilon$. Restricţiile $R_r : [t_0, 2T_\varepsilon] \times \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ sunt uniform continue şi mărginite,

$$|R_r(t,p)| \le \|H\|_\infty \cdot M_{2T_\varepsilon}.$$

Deoarece funcţiile $(1/\rho_r(t))_{0\le r\le n-1}$ sunt uniform continue în $[t_0, 2T_\varepsilon]$, există $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ astfel ca

$$\left|\frac{1}{\rho_r(t_2)} - \frac{1}{\rho_r(t_1)}\right| \le \frac{\varepsilon}{2\,\|H\|_\infty M_{2T_\varepsilon}}$$

pentru orice $t_1,\ t_2 \in [t_0, 2T_\varepsilon]$ satisfăcând $|t_2 - t_1| < \delta'$ şi orice $0 \le r \le n-1$. Restricţiile R_r fiind uniform continue, există there $\delta'' = \delta''(\varepsilon) > 0$ astfel ca

$$|R_r(t_2,p) - R_r(t_1,p)| \le \frac{1}{2}\varepsilon \cdot m_{2T_\varepsilon}$$

pentru orice t_1, $t_2 \in [t_0, 2T_\varepsilon]$ cu $|t_2 - t_1| < \delta''$ şi orice $p \in \mathscr{P}$.

Luând $\delta = \min\{\delta', \delta'', T_\varepsilon\}$ pentru orice t_1, $t_2 \ge t_0$ astfel ca $|t_2 - t_1| < \delta$ avem fie $t_1 \ge 2T_\varepsilon$ şi atunci $t_2 \ge T_\varepsilon$ (cazul $t_2 \ge 2T_\varepsilon$ se tratează analog) fie t_1, $t_2 \le 2T_\varepsilon$. În primul caz, obţinem că

$$\begin{aligned}\left|\frac{v^{(r)}(t_2)}{\rho_r(t_2)} - \frac{v^{(r)}(t_1)}{\rho_r(t_1)}\right| &\le \frac{\left|v^{(r)}(t_2)\right|}{\rho_r(t_2)} + \frac{\left|v^{(r)}(t_1)\right|}{\rho_r(t_1)} \\ &\le H(t_2) + H(t_1) < \varepsilon\end{aligned}$$

pentru orice $0 \le r \le n-1$ în timp ce în al doilea concludem că

$$\begin{aligned}\left|\frac{v^{(r)}(t_2)}{\rho_r(t_2)} - \frac{v^{(r)}(t_1)}{\rho_r(t_1)}\right| &\le \frac{\varepsilon}{2 \sup\limits_{t_0 \le s \le 2T_\varepsilon} |H(s)|\, M_{2T_\varepsilon}} \cdot H(t_2)\rho_r(t_2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} m_{2T_\varepsilon} \cdot \frac{1}{\rho_r(t_1)} \\ &\le \varepsilon\end{aligned}$$

pentru orice $0 \le r \le n-1$ şi orice $v \in \mathscr{V}$. $\square$

Propoziţia 11 *Fie g un element fixat al lui $X_3(t_0;\rho_r)$. În ipotezele Propoziţiei 10, înlocuim mulţimea $\mathscr{V}$ cu mulţimea $\mathscr{V}_g$ tuturor funcţiilor $v(t)$ din $X_3(t_0;\rho_r)$ astfel încât*

$$v^{(k)}(t) = g^{(k)}(t) + R_k(t,p), \qquad t \geq t_0, \qquad 0 \leq k \leq n-1.$$

Atunci, mulţimea $\mathscr{V}_g$ este relativ compactă în $X_3(t_0;\rho_r)$.

Demonstraţie. Folosind faptul că, în orice spaţiu normat, proprietatea de compactitate este invariantă la translaţii finite, va fi suficient să stabilim că mulţimea $\mathscr{V}_g - g$ este relativ compactă în $X_3(t_0;\rho_r)$. Conform Propoziţiei 10, mulţimea $\mathscr{V}_g - g$ este mărginită şi echicontinuă. Din (3.17) deducem că

$$v^{(k)} \in X_2(t_0;\rho_k) \quad \text{şi} \quad l_{v^{(k)}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{v^{(k)}(t)}{\rho_k(t)} = 0, \quad k \in \overline{0,n-1},$$

uniform în raport cu elementele v ale lui $\mathscr{V}_g - g$ ceea ce înseamnă că $\mathscr{V}_g - g$ este şi echiconvergentă.

Subliniez un fapt esenţial în discuţia noastră. Deoarece spaţiul de funcţii $X_2(t_0;1)$ este subspaţiu topologic al lui $X_1(t_0;1)$, *putem folosi Teorema 24 drept criteriu de compactitate relativă pentru submulţimile lui* $X_1(t_0;1)$ fiind atenţi la faptul că ipotezele sale sunt doar suficiente şi nu necesare.

Conform acestei observaţii, aplicarea iterată a Teoremei 24 setului de funcţii

$$\left\{ \frac{v^{(r)}(t)}{\rho_r(t)} : v \in \mathscr{V}_g \right\}$$

pentru orice $0 \leq r \leq n-1$ implică relativa compactitate a lui $\mathscr{V}_g$. □

Pentru a da o indicaţie privind scopul calculelor anterioare, dacă luăm drept aplicaţie R în Propoziţia 10 funcţia

$$R(t,u) = \int_t^\infty f\left(s, u(s), u'(s), \ldots, u^{(n-1)}(s)\right) ds,$$

atunci rolul lui H va fi jucat de

$$H(t) = \int_t^\infty F(s, K\rho_0(s), \ldots, K\rho_{n-1}(s))ds.$$

3.4 Formula soluţiilor

Introduc şi comentez în această Secţiune o *reprezentare integrală* fundamentală a soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ordinare neliniare. Se obişnuieşte în teoria integrării asimptotice să privim neliniaritatea ecuaţiei drept o *perturbare* a părţii liniare corespunzătoare. Această abordare este prezentată într-un mod elaborat în cartea lui F. Tricomi [74, p. 142] şi poate fi numită *procedura Fubini-Tricomi*. Ideea centrală a metodei este să considerăm neliniaritatea ca, pur şi simplu, un termen neomogen (de forţaj) al părţii liniare rămase din ecuaţie pentru a obţine apoi o reprezentare integrală a soluţiilor via metoda variaţiei constantelor datorată lui Lagrange. O serie de generalizări ale acestei tehnici, îndepărtându-se de intenţiile mele, conduc la formula lui Alekseev (metoda neliniară a variaţiei constantelor) [4] şi sunt detaliate în [46, p. 78], [47, pp. 78, 83], [45, pp. 141, 151]. Rezultate mai generale de acest fel pentru ecuaţiile integrale şi integro-diferenţiale au fost obţinute de Brauer [13]. Lăsăm de o parte, de asemeni, şi metodele sofisticate de integrare asimptotică date în [62, 40].

Consider acum ecuaţia diferenţială neliniară de ordinul n

$$u^{(n)}+a_1(t)u^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)u+f(t,u,u',\ldots,u^{(n-1)})=0, \qquad t\geq t_0, \quad (3.18)$$

împreună cu ecuaţia liniară asociată

$$z^{(n)}+a_1(t)z^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)z=0, \qquad t\geq t_0. \quad (3.19)$$

Fixez numărul natural $m\geq 2$. O funcţie, notată $W[\varphi_1,\ldots,\varphi_m]$ şi numită *wronskian*, se atribuie în mod natural fiecărei mulţimi de C^{m-1}-funcţii cu valori reale $(\varphi_i)_{1\leq i\leq m}$ definite pe $[t_0,+\infty)$ prin formula

$$W[\varphi_1,\ldots,\varphi_m](t)=\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_m(t) \\ \varphi_1'(t) & \cdots & \varphi_m'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(m-1)}(t) & \cdots & \varphi_m^{(m-1)}(t) \end{vmatrix},$$

unde $t\geq t_0$.

Dacă $(z_i(t))_{1\leq i\leq n}$ este un set de soluţii fundamentale ale ec. (3.19), introducem funcţiile $(w_i)_{1\leq i\leq n}$ prin

$$w_i(t)=\frac{W[z_1,\ldots,z_{i-1},z_{i+1},\ldots,z_n](t)}{W[z_1,\ldots,z_n](t)}, \qquad t\geq t_0, \quad 1\leq i\leq n. \quad (3.20)$$

În cazul $i=1$ primul argument al lui W din (3.20) este z_2 pe când dacă $i=n$ ultimul argument al lui W este z_{n-1}.

Lema 15 *Următoarele identităţi privind funcţiile w_i au loc:*

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}z_i^{(r)}(t)w_i(t)=\delta_{r,n-1}, \qquad 0\leq r\leq n-1.$$

Demonstraţie. Pentru $r=n-1$ avem $\delta_{r,n-1}=1$. Deoarece $(z_i(t))_{1\leq i\leq n}$ este un set de soluţii fundamentale, wronskianul său nu se anulează. Astfel, dezvoltând determinantul $W[z_1,\ldots,z_n](t)$ după ultima linie, obţinem

$$\begin{aligned} W[z_1,\ldots,z_n](t) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}z_k^{(n-1)}(t)W[z_1,\ldots,z_{k-1},z_{k+1},\ldots,z_n](t)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}z_k^{(n-1)}(t)W[z_1,\ldots,z_{k-1},z_{k+1},\ldots,z_n](t). \end{aligned}$$

Împărţind identitatea cu $W[z_1,\ldots,z_n](t)$, ajungem la concluzie.

Luăm acum $r = 1$. Avem

$$\begin{vmatrix} z_1(t) & \cdots & z_n(t)\\ z_1'(t) & \cdots & z_n'(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ z_1^{(n-2)}(t) & \cdots & z_n^{(n-2)}(t)\\ z_1'(t) & \cdots & z_n'(t) \end{vmatrix} = 0, \tag{3.21}$$

unde determinantul din (3.21) este obţinut înlocuind ultima linie din $W[z_1,\ldots,z_n](t)$ cu cea de-a doua linie a sa. Acum, dezvoltând acest ultim determinant după ultima linie, avem

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n+k}z_k'(t)W[z_1,\ldots,z_{k-1},z_{k+1},\ldots,z_n](t)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}z_k'(t)W[z_1,\ldots,z_{k-1},z_{k+1},\ldots,z_n](t). \end{aligned}$$

Concluzia se obţine prin împărţire cu $W[z_1,\ldots,z_n](t)$. $\square$

Reprezentarea integrală în construcţie aici este necesară pentru a defini un *operator integral* potrivit pentru aplicarea teoriilor clasice de punct fix în problema fundamentală a existenţei soluţiilor ec. (3.18) care să se manifeste la $+\infty$ asemenea soluţiilor ecuaţiei liniare (3.19).

Încep prin a transforma ec. (3.18) într-un sistem perturbat de ecuaţii diferen-ţiale liniare de ordinul I, urmând să îi aplic acestuia formula variaţiei constantelor. Obţin

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u\\ \vdots\\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \cdots & -a_1(t) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u\\ \vdots\\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ -f[t,u] \end{pmatrix}.$$

Notând cu $X(t)$ matricea fundamentală principală a sistemului linear, caut o soluţie de forma

$$\begin{pmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

unde $c_i(t)$ sunt C^1-funcţii necunoscute, obţinând astfel

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = [X(t)]^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -f[t,u] \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Relaţia (3.23) devine

$$c_k'(t) = -f[t,u]X_{kn}^{-1}(t), \qquad 1 \le k \le n,$$

unde $X_{kn}^{-1}(t)$ reprezintă cel de-al k-lea element al ultimei coloane a matricei $[X(t)]^{-1}$. Aceasta înseamnă că

$$\begin{aligned} X_{kn}^{-1}(t) &= (-1)^{n+k} \frac{W[z_1, \dots, z_{k-1}, z_{k+1}, \dots, z_n](t)}{W[z_1, \dots, z_n](t)} \\ &= (-1)^{n-k} w_k(t) \end{aligned}$$

şi astfel

$$c_k'(t) = -(-1)^{n-k} w_k(t) f[t,u], \qquad 1 \le k \le n. \tag{3.24}$$

Pentru alte detalii în această privinţă, vezi [24, pp. 68-69], [28, pp. 35-37, 39], [36, p. 98], [76, p. 203].

Formula (3.22) devine

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) X_{1j}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j(t) z_j(t).$$

Este esenţial să extragem din (3.24) formule de calcul convenabile pentru coeficienţii $(c_j)_{1 \le j \le n}$, i.e., *expresii în acord cu datele* (iniţiale şi terminale). O integrare formală a ec. (3.24) implică

$$c_i(t) = c_i(t_0) - \int_{t_0}^{t} f[s,u](-1)^{n-i} w_i(s)\,ds, \qquad 1 \le i \le p-1,$$

şi

$$c_i(t) = c_i(\infty) + \int_{t}^{\infty} f[s,u](-1)^{n-i} w_i(s)\,ds, \qquad p \le i \le n,$$

unde $p \in \overline{1,n+1}$ este fixat. Dacă $p=1$ îl interpretăm pe $p-1$ ca anterior pe când în cazul $p=n+1$ ignorăm, pur şi simplu, ultima identitate.

Reprezentarea integrală a unei soluţii $y(t)$ a ec. (3.18) este

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{i=1}^{p-1} c_i(t_0)z_i(t) + \sum_{i=p}^{n} c_i(\infty)z_i(t) \\ &- \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{n-i}z_i(t)\int_{t_0}^{t} w_i(s)f[s,y]ds \\ &+ \sum_{i=p}^{n}(-1)^{n-i}z_i(t)\int_{t}^{\infty} w_i(s)f[s,y]ds \\ &= \widehat{z}(t) - \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{n-i}z_i(t)\int_{t_0}^{t} w_i(s)f[s,y]ds \qquad (3.25) \\ &+ \sum_{i=p}^{n}(-1)^{n-i}z_i(t)\int_{t}^{\infty} w_i(s)f[s,y]ds. \qquad (3.26) \end{aligned}$$

Remarc că $\widehat{z}(t)$ din (3.25) constituie o soluţie a ec. (3.19).

Lema 16 *Următoarele identităţi au loc pentru orice* $0 \le r \le n-1$*:*

$$\begin{aligned} y^{(r)}(t) &= \widehat{z}^{(r)}(t) - \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{n-i}z_i^{(r)}(t)\int_{t_0}^{t} w_i(s)f[s,y]ds \\ &+ \sum_{i=p}^{n}(-1)^{n-i}z_i^{(r)}(t)\int_{t}^{\infty} w_i(s)f[s,y]ds. \qquad (3.27) \end{aligned}$$

Demonstraţie. Evident, pentru $r=0$ formula (3.27) se reduce la (3.26). Voi stabili identitatea numai în cazul $r=1$. Derivând (3.26) în raport cu t avem

$$\begin{aligned} y'(t) &= \widehat{z}'(t) - \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{n-i}z_i'(t)\int_{t_0}^{t} w_i(s)f[s,y]ds \\ &+ \sum_{i=p}^{n}(-1)^{n-i}z_i'(t)\int_{t}^{\infty} w_i(s)f[s,y]ds \\ &- f[t,y]\cdot\left[\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{n-i}z_i(t)w_i(t) + \sum_{i=p}^{n}(-1)^{n-i}z_i(t)w_i(t)\right]. \end{aligned}$$

Termenul în parantereze pătrate se anulează conform Lemei 15, ceea ce probează identitatea (3.27) pentru $r=1$. $\square$

Ca să aplicăm rezultatele anterioare ecuaţiei diferenţiale neliniare generale de ordinul n

$$u^{(n)} + f(t,u,u',\ldots,u^{(n-1)}) = 0, \qquad t \ge t_0, \qquad (3.28)$$

vom lua, cf. [43, p. 388],

$$z_i(t) = \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} \qquad \text{şi} \qquad w_i(t) = \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}, \qquad i \in \overline{1,n}. \tag{3.29}$$

Alte detalii asupra reprezentării integrale a soluţiilor pot fi citite în [27, pp. 161, 163]. Menţionez şi interesanta lucrare a lui Vasilache [75].

Să sumarizăm discuţia anterioară prin introducerea operatorului integral general de mai jos

$$\begin{aligned} Q(y)(t) &= \widehat{z}(t) - \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{n-i}z_i(t)\int_{t_0}^{t} w_i(s)f[s,y]ds \\ &\quad + \sum_{i=p}^{n}(-1)^{n-i}z_i(t)\int_{t}^{\infty} w_i(s)f[s,y]ds, \end{aligned} \tag{3.30}$$

unde $\widehat{z}(t)$ este o soluţie a ec. (3.19). Dacă $p = n+1$, ignorăm termenul din (3.30). Un caz particular important este dat de operatorul integral

$$Q(y)(t) = \widehat{z}(t) - \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f[s,y]ds, \tag{3.31}$$

asociat lui (3.28), care poate fi scris ca ($p = n+1$)

$$\begin{aligned} Q(y)(t) &= \widehat{z}(t) - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-i}z_i(t)\int_{t_0}^{t} w_i(s)f[s,y]ds \\ &= \widehat{z}(t) - \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}z_{n-i}(t)\int_{t_0}^{t} w_{n-i}(s)f[s,y]ds \end{aligned}$$

pentru $z_i(t)$, $w_i(t)$ date de (3.29), în acord cu formula binomială a lui Newton.

3.5 Teoria Kusano-Trench de integrare asimptotică [43, 44, 73]

3.5.1 Rezultatul general

Fie $\widehat{z}(t)$ o soluţie a ec. (3.19) şi presupunem că există funcţiile pozitive şi continue $(\rho_r)_{0\leq r\leq n-1}$ definite în $[t_0, +\infty)$ care verifică

$$\left|\widehat{z}^{(r)}(t)\right| \leq \rho_r(t), \qquad 0 \leq r \leq n-1.$$

Presupunem, de asemeni, că există $c > 0$ astfel încât inegalitatea

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{p-1}\left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t_0}^{t}|w_i(s)|F(s,(1+c)\rho_0(s),\ldots,(1+c)\rho_{n-1}(s))ds\\
&+\sum_{i=p}^{n}\left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t}^{\infty}|w_i(s)|F(s,(1+c)\rho_0(s),\ldots,(1+c)\rho_{n-1}(s))ds\\
&\leq c\rho_r(t)
\end{aligned}\tag{3.32}$$

să aibă loc pentru orice $t\geq t_0$ şi orice $0\leq r\leq n-1$. În sfârşit, presupunem că

$$\begin{cases}\left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t_0}^{t}|w_i(s)|F(s,(1+c)\rho_0(s),\ldots,(1+c)\rho_{n-1}(s))ds\\
\qquad =o(\rho_r(t)),\qquad 1\leq i\leq p-1,\\
\left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t}^{\infty}|w_i(s)|F(s,(1+c)\rho_0(s),\ldots,(1+c)\rho_{n-1}(s))ds\\
\qquad =o(\rho_r(t)),\qquad p\leq i\leq n,\end{cases}\tag{3.33}$$

pentru $t\to+\infty$ şi orice $0\leq r\leq n-1$.

Teorema 30 *Presupunem că funcţia f satisface inegalitatea*

$$\left|f\left(s,u,u',\ldots,u^{(n-1)}\right)\right|\leq F\left(s,|u|,|u'|,\ldots,\left|u^{(n-1)}\right|\right)\tag{3.34}$$

iar (3.32), (3.33) sunt valabile.

Atunci, ec. (3.18) are o soluţie $y(t)$ definită în $[t_0,+\infty)$ astfel ca

$$y^{(r)}(t)=\widehat{z}^{(r)}(t)+o(\rho_r(t)),\qquad 0\leq r\leq n-1,$$

pentru $t\to+\infty$.

Demonstraţie. În spaţiul $X_3(t_0;\rho_r)$ consider bila închisă de rază c centrată în $\widehat{z}$, adică,

$$B=\left\{y\in X_3(t_0;\rho_r):\left|y^{(r)}(t)-\widehat{z}^{(r)}(t)\right|\leq c\rho_r(t),\ 0\leq r\leq n-1\right\}.$$

Afirm că operatorul $Q:B\to B$ dat de (3.30) este bine definit şi complet continuu. În acest scop, remarc că

$$\begin{aligned}
&\left|y^{(r)}(t)\right|\leq\left|\widehat{z}^{(r)}(t)\right|+c\rho_r(t)\leq(1+c)\rho_r(t),\\
&\int_{t_0}^{t}|w_i(s)f[s,y]|ds\leq\int_{t_0}^{t}|w_i(s)|F(s,(1+c)\rho_0(s),\ldots,(1+c)\rho_{n-1}(s))ds,\\
&\int_{t}^{\infty}|w_i(s)f[s,y]|ds\leq\int_{t}^{\infty}|w_i(s)|F(s,(1+c)\rho_0(s),\ldots,(1+c)\rho_{n-1}(s))ds.
\end{aligned}$$

Atunci,

$$\left|[Q(y)]^{(r)}(t)-\widehat{z}^{(r)}(t)\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{p-1} \left|z_i^{(r)}(t)\right| \int_{t_0}^{t} |w_i(s)| F(s,(1+c)\rho_0(s),\dots,(1+c)\rho_{n-1}(s))ds$$
$$+ \sum_{i=p}^{n} \left|z_i^{(r)}(t)\right| \int_{t}^{\infty} |w_i(s)| F(s,(1+c)\rho_0(s),\dots,(1+c)\rho_{n-1}(s))ds$$
$$\leq c\rho_r(t)$$

şi astfel operatorul Q este bine definit.

Apoi, introduc operatorul $V_r : B \to X_1(t_0;1)$ cu formula

$$\begin{aligned}(V_r(y))(t) &= \frac{[Q(y)]^{(r)}(t)}{\rho_r(t)} \\ &= g_r(t) - \sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{n-i} \frac{z_i^{(r)}(t)}{\rho_r(t)} \int_{t_0}^{t} w_i(s) f[s,y] ds \\ &+ \sum_{i=p}^{n} (-1)^{n-i} \frac{z_i^{(r)}(t)}{\rho_r(t)} \int_{t}^{\infty} w_i(s) f[s,y] ds,\end{aligned}$$

unde

$$g_r(t) = \frac{\widehat{z}^{(r)}(t)}{\rho_r(t)}.$$

Aplicând Teorema 29, cu $K = 1+c$, conclud că toate funcţiile $(V_r)_{r\in\overline{0,n-1}}$ sunt uniform continue. Astfel, operatorul $Q : B \to X_3(t_0;\rho_r)$ este uniform continuu.

Arăt în continuare că mulţimea $Q(B)$ este relativ compactă în $X_3(t_0;\rho_r)$. Într-adevăr, elementele lui $Q(B)$ se pot scrie ca

$$[Q(y)]^{(r)}(t) = g^{(r)}(t) + \sum_{i=1}^{n} R_r^i(t,y), \qquad g = \widehat{z},$$

unde

$$R_r^i(t,y) = -(-1)^{n-i} z_i^{(r)}(t) \int_{t_0}^{t} w_i(s) f[s,y] ds, \qquad 1 \leq i \leq p-1,$$

şi

$$R_r^i(t,y) = (-1)^{n-i} z_i^{(r)}(t) \int_{t}^{\infty} w_i(s) f[s,y] ds, \qquad p \leq i \leq n,$$

pentru orice $r \in \overline{0,n-1}$. Compactitatea relativă a lui $Q(B)$ rezultă din Propoziţia 11. Validitatea afirmaţiei mele a fost probată.

În sfârşit, conform teoremei Schauder-Tikhonov, operatorul Q are un punct fix $y(t)$ în B. $\square$

3.5.2 Ecuaţii disconjugate

O teorie accesibilă a *disconjugării* pentru ec. (3.19) poate fi citită în [18, Capitolul 3]. În acest caz, mărimile $z_i(t)$ şi $w_i(t)$ sunt presupuse pozitive şi astfel ca

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{w_i(t)}{w_j(t)}\right] > 0, \qquad t \geq t_0,$$

şi

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{w_i(t)}{w_j(t)} = +\infty \qquad \text{şi} \qquad \lim_{t\to+\infty}\frac{z_i(t)}{z_j(t)} = 0$$

pentru orice $i < j$. Fiind dat $p \in \overline{1,n}$, introducem [43, p. 386] mărimile

$$v_{rp}(t) = \frac{1}{w_p(t)} \cdot \sum_{s=1}^{n} w_s(t)\left|z_s^{(r)}(t)\right|, \qquad 0 \leq r \leq n-1.$$

Deoarece dorim să îl folosim pe z_p în rol de $\widehat{z}$, Lema următoare este esenţială.

Lema 17 *Presupunem că există $K > 0$ astfel ca*

$$\int^{\infty} w_p(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds < +\infty. \tag{3.35}$$

Atunci,

$$\int_{t_0}^{t} w_i(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds = o\left(\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\right),\ 1 \leq i \leq p-1,$$

şi

$$\int_{t}^{\infty} w_i(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds = o\left(\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\right),\ p \leq i \leq n,$$

când $t \to +\infty$.

Demonstraţie. Încep cu cazul $1 \leq i \leq p-1$. Deoarece

$$\int_{t}^{\infty} w_p(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds = o(1) \qquad \text{când } t \to +\infty,$$

este evident că

$$\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\int_{t}^{\infty} w_p(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds = o\left(\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\right),$$

unde $1 \leq i \leq p-1$. Mai mult, avem

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t} w_i(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds\\
&=\int_{t_0}^{t}\frac{w_i(s)}{w_p(s)}w_p(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds\\
&\leq \frac{w_i(t)}{w_p(t)}\int_{t_0}^{t} w_p(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

Conform (3.36), obţinem că

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\right)^{-1}\cdot\int_{t_0}^{t} w_i(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds \qquad (3.37)\\
&\leq \int_{t_0}^{t} w_p(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds = O(1) \qquad \text{pentru } t\to+\infty.
\end{aligned}$$

Dacă integrala din (3.37) este mărginită, demonstraţia s-a încheiat. Altfel, voi adăuga un $o(1)$ la (3.37) şi apoi voi aplica regula lui L'Hospital:

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty}\left\{\left(\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\right)^{-1}\cdot\left[\int_{t_0}^{t} w_i(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds\right.\right.\\
&\left.\left.+\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\int_{t}^{\infty} w_p(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds\right]\right\}\\
&=\lim_{t\to+\infty}\left\{\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\right]\right\}^{-1}\cdot\Big\{w_i(t)F(t,Kv_{0p}(t),\ldots,Kv_{n-1p}(t))\right.\\
&+\left[\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\right]\cdot[-w_p(t)F(t,Kv_{0p}(t),\ldots,Kv_{n-1p}(t))]+\frac{d}{dt}\left[\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\right]\\
&\left.\times\int_{t}^{\infty} w_p(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds\Big\}\right\}\\
&=\lim_{t\to+\infty}\int_{t}^{\infty} w_p(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds=0. \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

Trucul (3.38) este adaptat după un articol de Constantin [17, p. 133].

Consider acum cazul $p\leq i\leq n$. Avem,

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\right]^{-1}\int_{t}^{\infty} w_i(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds\\
&\leq\int_{t}^{\infty}\frac{w_p(s)}{w_i(s)}w_i(s)F(s,Kv_{0p}(s),\ldots,Kv_{n-1p}(s))ds\\
&=o(1) \qquad \text{pentru } t\to+\infty,
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Fixez acum $p\in\overline{1,n}$ şi presupun că pentru un anumit $c>0$ are loc următoarea variantă de (3.32):

$$\sum_{i=1}^{p-1}\left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t_0}^{t} w_i(s)F(s,(1+c)v_{0p}(s),\dots,(1+c)v_{n-1p}(s))ds$$
$$+\sum_{i=p}^{n}\left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t}^{\infty} w_i(s)F(s,(1+c)v_{0p}(s),\dots,(1+c)v_{n-1p}(s))ds$$
$$\le cv_{rp}(t), \qquad 0\le r\le n-1.$$

În particular, (3.35) are loc pentru $K=1+c$. Acum, Lema 17 şi inegalitatea evidentă

$$\max_{1\le i\le n}\left[\frac{w_i(t)}{w_p(t)}\left|z_i^{(r)}(t)\right|\right]\le v_{rp}(t), \qquad t\ge t_0,$$

implică

$$\begin{cases}\left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t_0}^{t} w_i(s)F(s,(1+c)v_{0p}(s),\dots,(1+c)v_{n-1p}(s))ds\\ \qquad\qquad = o(v_{rp}(t)), \qquad 1\le i\le p-1,\\ \left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t}^{\infty} w_i(s)F(s,(1+c)v_{0p}(s),\dots,(1+c)v_{n-1p}(s))ds\\ \qquad\qquad = o(v_{rp}(t)), \qquad p\le i\le n,\end{cases}$$

ceea ce este o variantă a condiţiei (3.33).

Remarc că, în cazul ec. (3.28), putem lua [43, p. 388]

$$v_{rp}(t)=c_{rp}t^{p-r-1}, \tag{3.39}$$

unde

$$c_{rp}=(n-p)!\sum_{i=r+1}^{n}\frac{1}{(n-i)!(i-r-1)!}=2^{n-r-1}\frac{(n-p)!}{(n-r-1)!}.$$

Rezultatul principal al acestei Secţiuni este dat în continuare.

Teorema 31 *Presuunem că neliniaritatea f din ec. (3.28) verifică inegalitatea (3.34). Presupunem, de asemeni, că pentru c, $\theta_0>0$ avem*

$$\sum_{i=1}^{p-1}\left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t_0}^{t} w_i(s)F(s,(\theta_0+c)v_{0p}(s),\dots,(\theta_0+c)v_{n-1p}(s))ds$$
$$+\sum_{i=p}^{n}\left|z_i^{(r)}(t)\right|\int_{t}^{\infty} w_i(s)F(s,(\theta_0+c)v_{0p}(s),\dots,(\theta_0+c)v_{n-1p}(s))ds$$
$$\le cv_{rp}(t), \qquad 0\le r\le n-1,$$

unde $p\in\overline{1,n}$ este fixat.

Atunci, pentru orice $\theta\in\mathbb{R}$ satisfăcând $|\theta|\le\theta_0$, ec. (3.28) are o soluţie $y_{p\theta}(t)$ definită pe $[t_0,+\infty)$ astfel încât

$$y_{p\theta}^{(r)}(t)=\theta\cdot z_p^{(r)}(t)+o(v_{rp}(t)), \qquad 0\le r\le n-1,$$

când $t \to +\infty$.

Demonstraţie. Fie

$$\widehat{z}(t) = \theta \cdot z_p(t) \qquad \text{şi} \qquad \rho_r(t) = v_{rp}(t).$$

Atunci, pentru orice $y \in B$ avem

$$\begin{aligned} \left| y^{(r)}(t) \right| &\leq \left| \widehat{z}^{(r)}(t) \right| + c v_{rp}(t) \leq (|\theta| + c) v_{rp}(t) \\ &\leq (\theta_0 + c) v_{rp}(t), \end{aligned}$$

şi demonstraţia parcurge aceeaşi paşi ca anterior. □

Conform (3.39), soluţiile ec. (3.28) au dezvoltările asimptotice

$$y_{p\theta}^{(r)}(t) = \theta \cdot \frac{t^{p-r-1}}{(p-r-1)!} + o\left(t^{p-r-1}\right) \qquad \text{când } t \to +\infty \tag{3.40}$$

pentru orice $0 \leq r \leq p-1$ şi, respectiv,

$$y_{p\theta}^{(r)}(t) = o\left(t^{p-r-1}\right) \qquad \text{când } t \to +\infty \tag{3.41}$$

pentru orice $p \leq r \leq n-1$.

3.6 Soluţii pseudo-polinomiale: o teorie de integrare asimptotică

Mă interesează în această Secţiune existenţa soluţiilor ec. (3.28) având următorul comportament asimptotic

$$\begin{cases} y^{(n-1)}(t) = a_1 + o(1), \\ y^{(n-2)}(t) = a_1 t + a_2 + o(1), \\ \vdots \\ y^{(n-q)}(t) = \sum\limits_{i=0}^{q} \frac{a_i}{(q-i)!} t^{q-i} + o(1), \end{cases} \tag{3.42}$$

pentru $t \to +\infty$. În (3.42) iau $a_0 = 0$ şi $1 \leq q \leq n$.

Introduc funcţia de comparaţie $F\left(t, |u|, |u'|, \dots, \left|u^{(n-1)}\right|\right)$ prin formula

$$F\left(t, |u|, \left|u'\right|, \dots, \left|u^{(n-1)}\right|\right) = h(t) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} p_i \left(\frac{\left|u^{(i)}\right|}{t^{n-1-i}} \right), \tag{3.43}$$

unde $p_i(x)$ sunt funcţii pozitive, nedescrescătoare şi continue în timp ce $h(t)$ este o funcţie continuă nenegativă satisfăcând

$$\int^{\infty} s^{q-1}h(s)ds < +\infty.$$

Spre a motiva această alegere a funcţiei de comparaţie (3.43), remarc că, pentru a obţine existenţa globală a soluţiilor, T. Kusano şi W. Trench au fost forţaţi să impună condiţii destul de restrictive. După cum s-a văzut în Secţiunea 3.5, convergenţa unei anumite sume de integrale exprimate în termeni de funcţia de comparaţie nu a fost suficientă, trebuind ca, în plus, o margine superioară pentru sumă să fie precizată (mai multe restricţii de acest fel apar în formularea originală [43, 44, 73]). În schimb, utilizând o funcţie de comparaţie de tip Bihari [1, Secţiunea 2], se pot formula ipotezele principale *numai* în termeni de convergenţă a unei anumite integrale. Pentru alte comentarii, vezi [56].

Împart demonstraţia rezultatului central al Secţiunii în trei părţi. Voi demonstra primele două dintre acestea înainte să enunţ rezultatul de integrare asimptotică.

Mai întâi voi examina existenţa soluţiilor problemei ($q \in \overline{1,n-1}$)

$$\begin{cases} u^{(n)} + f(t,u,u',\ldots,u^{(n-1)}) = 0, \qquad t \ge t_*, \\ \lim\limits_{t\to+\infty}\left[u^{(n-1-k)}(t) - \sum\limits_{i=0}^{k} \frac{a_i}{(k+1-i)!}t^{k+1-i}\right] = a_{k+1}, \qquad 0 \le k \le q-1, \\ u^{(n-q-j)}(t_*) = u_{n-q-j}, \qquad 1 \le j \le n-q, \end{cases} \tag{3.44}$$

unde $t_* \ge 1$, a_i şi u_{n-q-j} sunt numere reale satisfăcând anumite condiţii introduse ulterior. Remarc că problema la limită (3.44) are atât date iniţiale cât şi terminale.

Iată cum poate fi construit operatorul integral asociat problemei (3.44). Deşi concluzia calculelor se va afla în acord perfect cu Secţiunea 3.4 un survol rapid al literaturii arată că este util să avem la îndemână şi o metodă directă, bazată pe iteraţii. În mod cert, dacă $y(t)$ este soluţie a problemei, ea va avea de verificat identităţile

$$\begin{aligned} y^{(n-p)}(t) &= \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{(p-k)!}t^{p-k} \\ &\quad + (-1)^{p-1}\int_t^{\infty}\int_{s_{p-1}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty} f[s_0,y]ds_0\cdots ds_{q-1} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} A_p[t] + (-1)^{p-1}B_p[t,y], \qquad t \ge t_*, \end{aligned} \tag{3.45}$$

unde $p \in \overline{1,q}$. Integrarea formală a lui (3.45) poate fi verificată prin derivare în raport cu variabila t. Când $p = 1$, avem

$$B_1[t,y] = \int_t^{\infty} f[s_0,y]ds_0.$$

Mai mult, pentru $1 \le k \le p-1$, este uşor de observat că

$$A_p^{(k)}[t] = A_{p-k}[t], \qquad B_p^{(k)}[t,y] = (-1)^k B_{p-k}[t,y].$$

Când s-a ajuns la $p = q$ datele terminale au fost epuizate.

Mai departe, integrăm identitatea (3.45) de $d+1$ ori, ţinând seama de data iniţială încă nefolosită, ca să obţinem

$$y^{(n-q-1-d)}(t) = \sum_{b=0}^{d} u_{n-q-1-d+b}\frac{(t-t_*)^b}{b!} + \int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^d}{d!}A_q[s]ds + (-1)^{q-1}\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^d}{d!}B_q[s,y]ds, \tag{3.46}$$

unde $d \in \overline{0, n-q-1}$. Un calcul direct implică

$$\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^d}{d!}A_q[s]ds = \sum_{k=0}^{q} a_k \sum_{r=0}^{q-k}\frac{(t-t_*)^{d+1+r}}{(d+1+r)!}\,\frac{t_*^{q-k-r}}{(q-k-r)!}.$$

Deoarece $a_0 = 0$, rezultatul integrării este un polinom, cu gradul mai mic decât $d+q \leq n-1$, care depinde de datele terminale şi de valoarea iniţială t_*.

Expresia din partea dreaptă a lui (3.46) oferă, pentru $d = n-q-1$, formula operatorului integral asociat problemei la limită (3.44). Calculul ce urmează ne foloseşte la obţinerea unei reprezentări integrale mai convenabile a acestui operator. Mai întâi, avem

$$\begin{aligned}
&\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^d}{d!}B_q[s,y]ds \\
&= \left(\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^d}{d!}ds\right)\cdot\left(\int_{t_*}^{\infty}\int_{s_{q-1}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty} f[s_0,y]ds_1\cdots ds_{q-1}\right) \\
&- \int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^d}{d!}\int_{t_*}^{s}\int_{s_{q-1}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty} f[s_0,y]ds_0\cdots ds_{q-1}ds.
\end{aligned}$$

Cel de-al doilea termen din ultima ecuaţie se poate scrie ca

$$\begin{aligned}
&\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^d}{d!}\int_{t_*}^{s}\int_{s_{q-1}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty} f[s_0,y]ds_0\cdots ds_{q-1}ds \\
&= \int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{d+1}}{(d+1)!}\int_{s}^{\infty}\int_{s_{q-2}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty} f[s_0,y]ds_0\cdots ds_{q-2}ds \\
&= \int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{d+1}}{(d+1)!}ds\cdot\int_{t_*}^{\infty}\int_{s_{q-2}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty} f[s_0,y]ds_0\cdots ds_{q-2} \\
&- \int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{d+1}}{(d+1)!}\int_{t_*}^{s}\int_{s_{q-2}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty} f[s_0,y]ds_0\cdots ds_{q-2}ds.
\end{aligned}$$

Aşadar, avem

$$y^{(n-q-1-d)}(t) = \sum_{b=0}^{d} u_{n-q-1-d+b}\frac{(t-t_*)^b}{b!} + \int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^d}{d!}A_q[s]ds$$

$$+\sum_{v=0}^{q-2}(-1)^{q-1-v}\frac{(t-t_*)^{d+1+v}}{(d+1+v)!}\int_{t_*}^{\infty}\int_{s_{q-1-v}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty}f[s_0,y]ds_0...ds_{q-1-v}$$
$$+\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{d+q-1}}{(d+q-1)!}\int_{s}^{\infty}f[s_0,y]ds_0ds. \tag{3.47}$$

Rearanjăm ultimul termen din (3.47):

$$\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{d+q-1}}{(d+q-1)!}\int_{s}^{\infty}f[s_0,y]ds_0ds$$
$$=\frac{(t-t_*)^{d+q}}{(d+q)!}\int_{t_*}^{\infty}f[s,y]ds-\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{d+q}}{(d+q)!}f[s,y]ds.$$

O lemă simplă este extrem de utilă în această investigaţie.

Lema 18 *Presupunem că funcţia continuă nenegativă $h(t)$ verifică ipoteza*

$$\int_{t_*}^{\infty}s^{q-1}h(s)ds<+\infty.$$

Atunci,

$$\int_{t_*}^{\infty}\int_{s_{q-1-v}}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty}h(s_0)ds_0\cdots ds_{q-1-v}=\int_{t_*}^{\infty}\frac{(s-t_*)^{q-1-v}}{(q-1-v)!}h(s)ds$$

pentru orice $v\in\overline{0,q-2}$.

Demonstraţie. Să considerăm cazul $q=v-2$. Deoarece

$$0\le t\int_{t}^{\infty}h(s_0)ds_0\le\int_{t}^{\infty}s_0h(s_0)ds_0,\qquad t\ge t_*,$$

obţinem

$$\lim_{t\to+\infty}t\int_{t}^{\infty}h(s_0)ds_0=0.$$

Astfel, printr-o integrare prin părţi, avem

$$\int_{t_*}^{t}\int_{s_1}^{\infty}h(s_0)ds_0ds_1=\int_{t_*}^{t}s_1h(s_1)ds_1-t_*\int_{t_*}^{\infty}h(s_0)ds_0+o(1)$$

când $t\to+\infty$. □

Fie acum B bila închisă de rază c a spaţiului $X_4^q(t_*)$ centrată în 0. Reamintesc că operatorul integral $T:B\to X_4^q(t_*)$, cerut pentru prima parte a demonstraţiei, este definit de partea dreaptă a lui (3.47).

Deoarece

$$\int_{t_*}^{\infty} s^r |f[s,y]| ds \leq \left(\int_{t_*}^{\infty} s^r h(s) ds\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i(c)\right) < +\infty$$

pentru orice $y \in B$ şi orice $r \in \overline{0,q}$, deduc din Lema 18 că

$$\begin{aligned}
T(y)(t) = & \sum_{b=0}^{n-q-1} u_b \frac{(t-t_*)^b}{b!} + \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} A_q[s] ds \\
& + \sum_{v=0}^{q-1} (-1)^{q-1-v} \frac{(t-t_*)^{n-q+v}}{(n-q+v)!} \int_{t_*}^{\infty} \frac{(s-t_*)^{q-1-v}}{(q-1-v)!} f[s,y] ds \\
& - \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f[s,y] ds \\
& = P(y, a_{k+1}, u_{n-q-j}) - \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f[s,y] ds,
\end{aligned}$$

unde $y \in B$, $t \geq t_*$ şi P este un polinom. Remarc că relaţiile (3.45) implică formal că $a_k^{T(y)} = a_k$ pentru orice $k \in \overline{1,q}$. De asemeni, se vede cu destulă uşurinţă că formula lui T este în acord cu consideraţiile de la Secţiunea 3.4.

Un element specific în discuţia de faţă este că *numerele* a_i, u_{n-q-j} *şi* t_* *trebuie să verifice anumite condiţii tehnice*. Mai precis, pentru $\lambda \in (0,1)$ şi $c > 0$ fixate, trebuie alese a_i, u_{n-q-j} şi t_* astfel ca

$$(n-q)t_*^{-q} \sum_{b=0}^{n-q-1} |u_b| + n|a_1| + (n+1) \sum_{k=2}^{q} |a_k| < (1-\lambda)c$$

şi

$$\int_{t_*}^{\infty} s^{q-1} h(s) ds < \lambda c \left[(n+q-1) \sum_{i=0}^{n-1} p_i(c)\right]^{-1}.$$

Arăt acum că operatorul T este bine definit. Amintesc că am stabilit deja că

$$\begin{aligned}
[T(y)]^{(n-1-j)}(t) &= \{[T(y)]^{(n-q)}\}^{(q-1-j)}(t) \\
&= A_{1+j}[t] + (-1)^j B_{1+j}[t,y]
\end{aligned} \tag{3.48}$$

pentru $0 \leq j \leq q-1$ şi respectiv

$$\begin{aligned}
[T(y)]^{(n-1-j)}(t) = & \sum_{b=0}^{j-q} u_{n-1-j+b} \frac{(t-t_*)^b}{b!} + \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{j-q}}{(j-q)!} A_q[s] ds \\
& + (-1)^{q-1} \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{j-q}}{(j-q)!} B_q[s,y] ds
\end{aligned} \tag{3.49}$$

pentru $q \leq j \leq n-1$. Reamintesc că

$$B_r[t,y] = \int_t^{\infty} \frac{(s-t)^{r-1}}{(r-1)!} f[s,y]ds$$

pentru orice $1 \le r \le q$, orice $y \in B$ şi orice $t \ge t_*$.

Pentru a evalua primul termen din formula normei, remarc că

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{q-1} t^{-j} \left|[T(y)]^{(n-1-j)}(t)\right| \le \sum_{j=0}^{q-1} t^{-j} \left[\left|A_{1+j}[t]\right| + \left|B_{1+j}[t,y]\right|\right] \\
&\le \sum_{j=0}^{q-1} t^{-j} \left[\sum_{k=1}^{j} |a_k| t^{j-1} + \left(\int_{t_*}^{\infty} s^j h(s)ds\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i(c)\right)\right] \\
&\le q \left[\sum_{k=1}^{q} |a_k| + \left(\int_{t_*}^{\infty} s^{q-1} h(s)ds\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i(c)\right)\right]
\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=q}^{n-1} t^{-j} \left|[T(y)]^{(n-1-j)}(t)\right| \\
&\le \sum_{j=q}^{n-1} t^{-j} \left[\sum_{b=0}^{j-q} \left|u_{n-1-j+b}\right| t^{j-q} + \sum_{k=1}^{q} |a_k| t^{q-1} \frac{(t-t_*)^{j-q+1}}{(j-q+1)!} + \frac{(t-t_*)^{j-q+1}}{(j-q+1)!}\right. \\
&\left. \times \left(\int_{t_*}^{\infty} \frac{(s-t_*)^{q-1}}{(q-1)!} h(s)ds\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i(c)\right)\right] \\
&\le (n-q) \left[\sum_{r=0}^{n-q-1} |u_r| t_*^{-q} + \sum_{k=1}^{q} |a_k| + \left(\int_{t_*}^{\infty} s^{q-1} h(s)ds\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} p_i(c)\right)\right].
\end{aligned}$$

Astfel,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} t^{-j} \left|[T(y)]^{(n-1-j)}(t)\right| &\le (n-q) t_*^{-q} \sum_{r=0}^{n-q-1} |u_r| \\
&+ n \sum_{k=1}^{q} |a_k| + n \int_{t_*}^{\infty} s^{q-1} h(s)ds \cdot \sum_{i=0}^{n-1} p_i(c).
\end{aligned}$$

Pentru a evalua cel de-al doilea termen din expresia normei, observ că

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{a_i^{T(y)}}{(k+1-i)!} t^{k+1-i} = A_{k+1}[t] - a_{k+1}, \qquad 1 \le k \le q-1.$$

Astfel,

$$\sum_{k=1}^{q-1} \left|[T(y)]^{(n-1-k)}(t) - \sum_{i=0}^{k} \frac{a_i^{T(y)}}{(k+1-i)!} t^{k+1-i}\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{q-1}[|a_{k+1}|+|B_{1+k}[t,y]|]$$
$$\leq \sum_{r=2}^{q}|a_r|+(q-1)\left(\int_{t_*}^{\infty}s^{q-1}h(s)ds\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_i(c)\right)$$

şi estimarea normei operatorului T este dată de

$$\begin{aligned}\|T(y)\| \leq\ & (n-q)t_*^{-q}\sum_{r=0}^{n-q-1}|u_r|+n|a_1|+(n+1)\sum_{k=1}^{q}|a_k| \\ &+ (n+q-1)\left(\int_{t_*}^{\infty}s^{q-1}h(s)ds\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_i(c)\right) \\ &< (1-\lambda)c+\lambda c=c, \qquad y\in B,\end{aligned}$$

ceea ce implică $T(B)\subseteq B$, adică operatorul T este bine definit.

Uniform continuitatea operatorului T va rezulta din Teorema 29 trăgând avantaje din faptul că topologia lui $X_4^q(t_*)$ este mai tare ca topologia lui $X_3(t_*;t^{n-1-r})$:

$$\|y\|_{X_3(t_*;t^{n-1-r})}\leq \|y\|_{X_4^q(t_*)}, \qquad y\in X_4^q(t_*),$$

datorită celui de-al doilea termen (tip de) din formula normei.

Încep prin a arăta că operatorul $T:\left(B,\mathscr{T}_{X_3(t_*;t^{n-1-r})}\right)\to\left(B,\mathscr{T}_{X_4^q(t_*)}\right)$ este continuu. Aici, $\mathscr{T}_X$ reprezintă topologia mulţimii X. Ca de obicei, topologia unei submulţimi B este relativizarea (urma) topologiei spaţiului [41, p. 51].

Introduc acum operatorul $V_r: B\to X_1(t_*;1)$ prin formula

$$V_r(y)(t)=t^{-r}[T(y)]^{(n-1-r)}(t), \qquad 0\leq r\leq n-1.$$

Pentru $0\leq r\leq q-1$ avem

$$\begin{aligned}t^{-r}|B_{1+r}[t,y]| &\leq t^{-r}\int_t^{\infty}\frac{(s-t)^r}{r!}|f[s,y]|ds \\ &\leq t^{-r}\left(\int_t^{\infty}s^{q-1}h(s)ds\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_i(c)\right) \\ &\leq \left(\int_t^{\infty}s^{q-1}h(s)ds\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_i(c)\right) \\ &= o(1) \qquad \text{as } t\to+\infty. \end{aligned} \tag{3.50}$$

Din (3.50), (3.48), Teorema 29 şi Lema 18 rezultă că V_r este uniform continuu în B în raport cu topologia lui $X_3(t_*;t^{n-1-r})$.

Pentru $q\leq r\leq n-1$, folosim faptul că, în virtutea regulii lui L'Hospital,

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} t^{-r}\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{r-q}}{(r-q)!}\int_{s}^{\infty}\frac{(\tau-s)^{q-1}}{(q-1)!}h(\tau)d\tau ds\\
&=\frac{1}{r(r-1)\cdot\ldots\cdot q}\lim_{t\to+\infty} t^{1-q}\int_{t}^{\infty}\frac{(\tau-t)^{q-1}}{(q-1)!}h(\tau)d\tau\\
&\le \lim_{t\to+\infty}\int_{t}^{\infty}s^{q-1}h(s)ds=0. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Aşadar, deducem că

$$\begin{aligned}
&t^{-r}\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{r-q}}{(r-q)!}\left|B_q[s,y]\right|ds\\
&\le t^{-r}\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{r-q}}{(r-q)!}\int_{s}^{\infty}\frac{(\tau-s)^{q-1}}{(q-1)!}h(\tau)d\tau ds\sum_{i=0}^{n-1}p_i(c)\\
&=o(1) \qquad \text{pentru } t\to+\infty.
\end{aligned}$$

Ultima estimare ne permite să concludem, pe baza Teoremei 29, uniform continuitatea operatorilor $(V_r)_{r\in\overline{0,n-1}}$ în raport cu topologia lui $X_3(t_*;t^{n-1-r})$.

Am stabilit până acum continuitatea lui

$$T:\left(B,\mathscr{T}_{X_3(t_*;t^{n-1-r})}\right)\to\left(B,\mathscr{T}_{X_3(t_*;t^{n-1-r})}\right).$$

Pentru a manipula cel de-al doilea (tip de) termen din definiţia normei lui $X_4^q(t_*)$, unde $1\le r\le q-1$, introduc $W_r:B\to X_1(t_*;1)$ prin formula

$$W_r(y)(t)=[T(y)]^{(n-1-r)}(t)-\sum_{i=0}^{r}\frac{a_i}{(k+1-i)!}t^{r+1-i}.$$

Ţinând seama de

$$W_r(y)(t)=a_{1+r}+(-1)^rB_{1+r}[t,y],$$

continuitatea uniformă a lui W_r în B în raport cu topologia lui $X_3(t_*;t^{n-1-r})$ rezultă direct din (3.48), Lema 18 şi Teorema 29. Continuitatea lui

$$T:\left(B,\mathscr{T}_{X_4^q(t_*)}\right)\to\left(B,\mathscr{T}_{X_4^q(t_*)}\right)$$

este astfel stabilită.

În continuare, demonstrez compactitatea relativă a lui $T(B)$ în $X_4^q(t_*)$ (Teorema 27). La fel ca anterior, stabilesc mai întâi compactitatea relativă a lui $T(B)$ în $X_3(t_*;t^{n-1-r})$ după care strâng informaţii suplimentare cu privire la cel de-al doilea termen al normei.

Din (3.48)-(3.51) rezultă că

$$[T(y)]^{(n-1-j)}=g^{(n-1-j)}(t)+R_{n-1-j}(t,y), \qquad 0\le j\le n-1,$$

unde

$$g(t) = \sum_{b=0}^{n-q-1} u_b \frac{(t-t_*)^b}{b!} + \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{n-q-1}}{(n-q-1)!} A_q[s]ds$$

şi

$$\begin{aligned} t^{-j}\left|R_{n-1-j}(t)\right| &\leq H(t) \\ &= \int_t^{\infty} s^{q-1}h(s)ds + \sum_{i=0}^{n-1} p_i(c) \times \\ &\times \max_{q\leq r\leq n-1}\left[t^{-r}\int_{t_*}^{t}\frac{(t-s)^{r-q}}{(r-q)!}\int_s^{\infty}\frac{(\tau-s)^{q-1}}{(q-1)!}h(\tau)d\tau ds\right]. \end{aligned}$$

Ţinând seama de faptul că $g \in X_3(t_*;t^{n-1-r})$, compactitatea relativă a lui $T(B)$ în $X_3(t_*;t^{n-1-r})$ decurge în mod direct din Propoziţia 11, unde $\mathscr{P} = B$ şi $\mathscr{V} = T(B)$.

În finalul demonstraţiei, este nevoie să aplicăm Teorema 24 ca să stabilim, pentru $1 \leq r \leq q-1$, compactitatatea relativă a lui $W_r(B)$ în $X_2(t_*;1)$. Remarc că mărginirea lui $W_r(B)$ este o consecinţă a estimării

$$\begin{aligned} \|W_r(y)\|_{X_2(t_*;1)} &= \sup_{t\geq t_*}|W_r(y)(t)| \leq \|T(y)\|_{X_4^q(t_*)} \\ &\leq \sup_{z\in B}\|z\|_{X_4^q(t_*)}, \qquad y\in B, \end{aligned}$$

echicontinuitatea rezultă din

$$\begin{aligned} |W_r(y)(t_2) - W_r(y)(t_1)| &= |B_{1+r}[t_2,y] - B_{1+r}[t_1,y]| \\ &\leq \int_{t_1}^{t_2}\int_{s_r}^{\infty}\cdots\int_{s_1}^{\infty}|f[s_0,y]|\,ds_0\cdots ds_r \\ &\leq (t_2-t_1)\left(\int_{t_*}^{\infty}s^{q-1}h(s)ds\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_i(c)\right) \end{aligned}$$

ceea ce are loc pentru $y \in B$ şi $t_2 \geq t_1$, pe când estimarea

$$|W_r(y)(t) - a_{1+r}| = |B_{1+r}[t,y]| \leq \left(\int_t^{\infty}s^{q-1}h(s)ds\right)\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}p_i(c)\right)$$

implică echiconvergenţa lui $W_r(B)$.

Deoarece toate mulţimile $W_r(B)$ sunt relativ compacte, putem extrage din orice şir $(y_n)_{n\geq 1}$ din B un subşir, notat tot cu $(y_n)_{n\geq 1}$, astfel ca, pentru orice $1 \leq r \leq q-1$, şirurile $(W_r(y_n))_{n\geq 1}$ să fie convergente în $X_2(t_*;1)$. Aceasta implică relativa compactitate a lui $T(B)$ în $X_4^q(t_*)$. În cazuri particulare, dată fiind pletora de condiţii, este convenabil să se scurteze calculele via Lema 14, ca în [54, pp. 356-357].

Condiţiile teoremei Schauder-Tikhonov fiind verificate de operatorul T, aplicarea acesteia ne conduce la existenţa unei soluţii pentru problema la limită (3.44).

Următorul rezultat stabileşte existenţa soluţiilor ec. (3.28) cu comportament polinomial la infinit.

Teorema 32 *Presupunem că*

$$\int^{\infty} s^{q-1}h(s)ds < +\infty. \tag{3.52}$$

Atunci, pentru orice set de numere reale $(a_k)_{k\in\overline{1,q}}$ există $t_* \geq t_0$ şi o soluţie $y(t)$ a ec. (3.28) definită pe $[t_*,+\infty)$ astfel încât să aibă loc condiţiile (3.42).

Demonstraţie. Fixez numerele $(a_k)_{k\in\overline{1,q}}$, fie $\lambda = 1/2$ şi aleg $c > 0$ astfel ca

$$n\,|a_1| + (n+1)\sum_{k=2}^{q}|a_k| < \frac{c}{2}$$

(dacă $q = 1$, neglijăm suma din această formulă). Fixez şi numerele $(u_r)_{0\leq r\leq n-q-1}$ astfel încât să verifice

$$(n-q)\sum_{b=0}^{n-q-1}|u_b| + n\,|a_1| + (n+1)\sum_{k=2}^{q}|a_k| < \frac{c}{2}.$$

Atunci, este suficient să găsesc $t_* \geq t_0$ convenabil pe mare pentru ca

$$\int_{t_*}^{\infty} s^{q-1}h(s)ds < c\left[2(n+q-1)\sum_{i=0}^{n-1}p_i\,(c)\right]^{-1},$$

ceea ce este întotdeauna posibil graţie lui (3.52). □

Consider acum chestiunea existenţei soluţiilor problemei de valori finale

$$\begin{cases} u^{(n)} + f(t,u,u',...,u^{(n-1)}) = 0, & t \in [t_0,t_*], \\ u^{(n-j)}(t_*) = u^{n-j}, & 1 \leq j \leq n, \end{cases} \tag{3.53}$$

unde $t_* \geq t_0$ şi u^{n-j} sunt fixate fără restricţii.

Prin integrarea repetată a ecuaţiei diferenţiale, deducem că o soluţie $z(t)$ a problemei (3.53) va satisface ecuaţia

$$z^{(n-1-d)}(t) = \sum_{b=0}^{d}(-1)^b u^{n-1-d+b}\frac{(t_*-t)^b}{b!} + (-1)^d\int_t^{t_*}\frac{(s-t)^d}{d!}f[s,z]ds \tag{3.54}$$

pentru orice $t \in [t_0,t_*]$ şi orice $0 \leq d \leq n-1$.

Teorema 33 *Presupunem că funcţia de comparaţie F este dată de*

$$F\left(t,|u|,\left|u'\right|,...,\left|u^{(n-1)}\right|\right) = h(t)\cdot\sum_{i=0}^{n-1}p_i\left(\left|u^{(i)}\right|\right),$$

unde $p_i(x)$ sunt funcţii pozitive, nedescrecătoare şi continue iar $h(t)$ este o funcţie nenegativă, continuă şi care satisface (3.52). Presupunem, de asemeni, că

$$\int_0^\infty \left[\sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)\right]^{-1} dx = +\infty. \tag{3.55}$$

Atunci, pentru orice set de numere reale $(u^r)_{r\in\overline{0,n-1}}$, există o soluţie $u(t)$ a problemei (3.53).

Demonstraţie. Introduc spaţiul Banach

$$E = (C^{n-1}([t_0,t_*],\mathbb{R}), \|\cdot\|)$$

(reamintesc formula (3.4)) şi definesc operatorul integral $T : E \to E$ ca fiind membrul drept la identităţii (3.54) pentru $d = n-1$. Continuitatea uniformă a lui T pe submulţimile mărginite ale lui E decurge din (3.54) printr-o modificare directă a demonstraţiei de la Teorema 28. Mai mult, folosind Teorema 23, se poate stabili relativa compactitate a lui $T(B)$ pentru orice mulţime mărginită B din E.

Putem, aşadar, aplica alternativa Leray-Schauder (Lema 3, [26, p. 61], [54, p. 352]) operatorului T alegând $C = E$. În fapt, dacă $z \in E(T)$ atunci, pentru orice $0 \le d \le n-1$, avem

$$\left|z^{(n-1-d)}(t)\right| \le t_*^{n-1}\left(\sum_{b=0}^{d}\left|u^{n-1-d+b}\right|\right) + \int_t^{t_*} t_*^{n-1} h(s) \sum_{i=0}^{n-1} p_i\left(\left|z^{(i)}(s)\right|\right) ds$$

şi respectiv

$$Z(t) \le c + \int_t^{t_*} n t_*^{n-1} h(s) P(Z(s)) ds, \qquad t \in [t_0,t_*],$$

unde

$$c = n t_*^{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left|u^{n-j}\right|, \quad Z(t) = \sum_{i=0}^{n-1}\left|z^{(i)}(t)\right|, \quad P(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i(x).$$

Conform Lemei 4, [54, p. 353], pentru orice $t \in [t_0,t_*]$, avem

$$Z(t) \le G^{-1}\left(G(c) + \int_{t_0}^{t_*} n t_*^{n-1} h(s) ds\right) < +\infty,$$

unde

$$G(\alpha) = \int_0^\alpha \left[\sum_{i=0}^{n-1} p_i(x)\right]^{-1} dx, \qquad \alpha \ge 0,$$

ceea ce stabileşte mărginirea lui $E(T)$. În consecinţă, există o soluţie $u(t)$ a problemei de valori finale (3.53). $\square$

În final, sumarizăm discuţia din această Secţiune stabilind, pentru valori *prescrise* ale mărimilor $(a_k)_{k\in\overline{1,q}}$, existenţa unei soluţii globale a ec. (3.28) ce satisface (3.42). Rezultatul central al Secţiunii este următorul.

Teorema 34 *Fixăm numărul natural $1 \le q \le n$ şi presupunem că ipotezele (3.43), (3.55) şi (3.52) sunt satisfăcute. Atunci, pentru orice set de numere reale $(a_k)_{k\in\overline{1,q}}$ există o soluţie $u(t)$ a ec. (3.28) care este definită pe $[t_0,+\infty)$ şi satisface (3.42).*

Demonstraţie. Fie $y(t)$ soluţia problemei la limită (3.44) a cărei existenţă a fost probată la Teorema 32 şi $z(t)$ soluţia problemei de valori finale (3.53) a cărei existenţă a fost stabilită la Teorema 33, unde, pentru $q \le n-1$, alegem datele astfel încât

$$\begin{cases} u^{n-p} = y^{(n-p)}(t_*), & 1 \le p \le q, \\ u^{n-q-j} = u_{n-q-j}, & 1 \le j \le n-q. \end{cases} \tag{3.56}$$

Atunci, funcţia $u(t)$ dată de

$$u(t) = \begin{cases} y(t), & t \ge t_*, \\ z(t), & t \in [t_0, t_*] \end{cases}$$

este soluţia ec. (3.28) cu comportamentul asimptotic dorit. În cazul $q = n$ vom neglija al doilea set de condiţii din (3.56). $\square$

Din frumoasele lucrări aparţinând lui Philos, Tsamatos şi Purnaras [65, 66] privind soluţiile pseudo-polinomiale ale ecuaţiilor diferenţiale ordinare neliniare se desprind concluzii asemănătoare celor de la Secţiunile 3.5, 3.6 ale capitolului de faţă.

3.7 Evoluţia derivatelor: factorul t^{-1}

Există o anumită diferenţă, la prima vedere, între estimările asimptotice (3.40), (3.41) şi (3.42). Ea poate fi remarcată frecvent în literatură [43, 54, 48, 66], vezi şi prezentarea din [1, Secţiunea 2]. Voi comenta această situaţie pentru ecuaţia diferenţială de ordinul al II-lea

$$u'' + f(t,u) = 0, \qquad t \ge t_0 \ge 1, \tag{3.57}$$

caz particular al ec. (3.18).

O teorie, e.g. [43], afirmă că o soluţie $u(t)$ a ec. (3.57) cu dezvoltarea asimptotică

$$u(t) = c + o(1) \qquad \text{pentru } t \to +\infty, \qquad c \in \mathbb{R},$$

are o derivată cu comportament de genul

$$u'(t) = o(t^{-1}). \tag{3.58}$$

Cealaltă teorie [54, 48] arată numai că

$$u'(t) = a + o(1) \qquad \text{pentru } t \to +\infty \tag{3.59}$$

atunci când

$$u(t) = at + b + o(1), \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.60}$$

Dacă $a = 0$ şi $b = c$, s-ar părea că (3.58) oferă mai multă informaţie ca (3.59). Afirm că *în situaţiile obişnuite nu există nici o diferenţă între aceste estimări*. Adică, ori de câte ori are loc (3.60) trebuie verificat dacă ipotezele nu permit şi dezvoltarea

$$u'(t) = a + o(t^{-1}) \qquad \text{pentru } t \to +\infty.$$

Verificarea aşa-zisului *factor* t^{-1} se bazează pe o situaţie descrisă de Lema 18. Vezi şi [59]. Reamintesc că, fiind dată funcţia continuă nenegativă $h(t)$ astfel ca

$$\int_{t_0}^{\infty} th(t)dt < +\infty, \tag{3.61}$$

avem

$$H^* \in L^1((t_0, +\infty), \mathbb{R}) \qquad \text{şi} \qquad H^*(t) = o(t^{-1}) \text{ când } t \to +\infty \tag{3.62}$$

pentru $H^*(t)$ cu formula

$$H^*(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_t^{\infty} h(s)ds, \qquad t \geq t_0.$$

Conform Secţiunii 3.4, soluţiile ec. (3.57) trebuie să verifice o ecuaţie integrală de tipul

$$u(t) = at + b + \int_{t_0}^{t} sf(s, u(s))ds + t\int_t^{\infty} f(s, u(s))ds, \qquad t \geq t_0.$$

Astfel, cum avem

$$u'(t) = a + \int_t^{\infty} f(s, u(s))ds, \tag{3.63}$$

în ipoteza (3.61) (reamintesc (3.52)) care implică integrabilitatea absolută a lui $tf(t, u(t))$, putem considera

$$H^*(t) = \int_t^{\infty} f(s, u(s))ds, \qquad t \geq t_0.$$

Afirmaţia este justificată.

În concluzie, o folosire ”la maxim” a lui (3.52) conduce la

$$\begin{cases} y^{(n-1)}(t) = a_1 + o(t^{1-q}), \\ y^{(n-2)}(t) = a_1 t + a_2 + o(t^{2-q}), \\ \vdots \\ y^{(n-q)}(t) = \sum\limits_{i=0}^{q} \frac{a_i}{(q-i)!} t^{q-i} + o(1), \end{cases} \tag{3.64}$$

ceea ce este o îmbunătăţire a concluziilor din [65, 66, 56], măcar la nivelul formulei de dezvoltare asimptotică.

Lema următoare exprimă un punct de vedere în legătură cu proprietăţile lui H^* din (3.62).

Lema 19 *Presupunem că $k : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ este continuă şi integrabilă pe $[t_0, +\infty)$. Atunci, există funcţia continuă $w : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ care este integrabilă pe $[t_0, +\infty)$ şi are comportamentul asimptotic descris prin*

$$w(t) = o(t^{-1}) \qquad \text{când } t \to +\infty$$

astfel încât

$$\int_{t_0}^{t} k(s)ds = \int_{t_0}^{t} w(s)ds + o(1)$$

pentru $t \to +\infty$.

Demonstraţie. O alegere pentru $w(t)$ este dată de

$$w(t) = \frac{1}{t^2} \int_{t_0}^{t} sk(s)ds, \qquad t \geq t_0.$$

Concluzia decurge din integrarea prin părţi şi aplicarea regulii lui L'Hospital. Vezi [1, Secţiunea 4]. □

Se poate da, folosind Lema 19, o *reprezentare integrală* a lui $u'(t)$ în (3.63). Aceasta este

$$u'(t) = a + \frac{c}{t^2} + \frac{1}{t^2} \int_{t_0}^{t} sv(s)ds,$$

unde $c = t_0^2 \int_{t_0}^{\infty} f(s, u(s))ds$ şi $v(t)$ este o funcţie continuă, integrabilă pe $[t_0, +\infty)$ şi având formula

$$v(t) = 2 \int_{t}^{\infty} f(s, u(s))ds - t f(t, u(t)), \qquad t \geq t_0.$$

Remarc că pentru o demonstraţie *independentă* a lui (3.64) norma spaţiului $X_4^q(t_*)$ trebuie rescrisă ca

$$\|u\| = \sum_{j=1}^{n-1} \sup_{t \geq t_0} \left\{ \frac{\left| u^{(n-1-j)}(t) \right|}{t^j} \right\}$$

$$+\sum_{k=0}^{q-1}\sup_{t\geq t_0}\left\{t^{q-1-k}\left|u^{(n-1-k)}(t)-\sum_{i=0}^{k+1}\frac{a_i^u}{(k+1-i)!}t^{k+1-i}\right|\right\}.$$

3.8 Comportament indus de termenul liber

Un interes ridicat este manifestat recent pentru studiile referitoare la efectul perturbărilor speciale (termeni liberi) asupra soluţiilor ecuaţiilor diferenţiale ordinare, vezi, e.g., articolele [55, 57, 58] şi referinţele acestora. Voi închide capitolul cu o îmbunătăţire a [58, Teorema 1] care permite să ilustrez tehnicile descrise în Secţiunile anterioare şi în [1].

Fie cazul particular al ec. (3.18) dat de

$$u''+f(t,u)=p(t), \qquad t\geq t_0\geq 1, \tag{3.65}$$

unde $f:[t_0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $p:[t_0,+\infty)\to\mathbb{R}$ şi alte funcţii ce urmează a fi definite sunt presupuse continue. Considerăm că inegalitatea

$$|f(t,u)|\leq h(t)g\left(\frac{|u|}{R(t)}\right), \qquad t\geq t_0,\, u\in\mathbb{R},$$

are loc pentru funcţia pozitivă şi nedescrescătoare $g(q)$, pentru funcţia pozitivă $R(t)$ cu $1/R(t)$ mărginită (pe întregul interval $[t_0,+\infty)$) şi pentru coeficientul nenegativ $h(t)$. Introduc $P(t)$ prin $P''(t)=p(t)$ şi presupun, de asemeni, că există funcţia $P_0(t)$ cu $|P(t)|\leq P_0(t)$, $t\geq t_0$, astfel ca funcţia $P_0(t)/R(t)$ să fie mărginită în $[t_0,+\infty)$. În sfârşit, admitem că are loc inegalitatea

$$g\left(\left(\frac{P_0}{R}\right)_*+r_0\left(\frac{1}{R}\right)_*\right)\leq\frac{r_0}{H^*}, \tag{3.66}$$

unde $r_0>0$ este fixat fără restricţii şi

$$\int_{t_0}^{\infty}(s-t_0)h(s)ds\stackrel{\text{def}}{=}H^*<+\infty.$$

Aici, $(w)_*$ desemnează $\|w\|_{X_1(t_0;1)}$, $w\in X_1(t_0;1)$.

Teorema 35 *Ec. (3.65) are o soluţie definită în $[t_0,+\infty)$ cu alura asimptotică $u(t)=P(t)+o(1)$ pentru $t\to+\infty$.*

Remarc că pentru $P(t)=at+b$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, putem lua $P_0(t)=|a|t+|b|$, $R(t)=t$ obţinând astfel un rezultat din [1, Section 4] (adică Teorema 13).

Demonstraţie. (a Teoremei 35) Introduc bila închisă de rază r_0 centrată în 0 a lui $X_1(t_0;1)$, pe care o notez cu B, şi operatorul integral $T:B\to B$ cu formula

$$T(v)(t)=\int_t^{\infty}(t-s)f(s,P(s)+v(s))ds, \quad v\in B,\, t\geq t_0.$$

Inegalitatea (3.66) arată că T este bine definit.

Soluţia pe care o căutăm are forma $u(t)=P(t)+v_0(t)$, unde $v_0\in B$ este un punct fix al operatorului T. Pentru a stabili existenţa lui v_0 via teorema Schauder-Tikhonov trebuie probate continuitatea lui T în B şi relativa compactitate a lui $T(B)$ în $X_1(t_0;1)$.

Fixez $\varepsilon>0$. Există $T_\varepsilon>t_0$ astfel ca

$$\int_{T_\varepsilon}^{\infty} sh(s)ds<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\left[g\left(\left(\frac{P_0}{R}\right)_*+r_0\left(\frac{1}{R}\right)_*\right)\right]^{-1}.$$

Definesc $m_\varepsilon\stackrel{\text{def}}{=}\sup\limits_{s\in[t_0,T_\varepsilon]}|P(s)|$. Acum, continuitatea uniformă a restricţiei $f:[t_0,T_\varepsilon]\times[-m_\varepsilon-r_0,m_\varepsilon+r_0]\to\mathbb{R}$ implică existenţa lui $\delta(\varepsilon)>0$ pentru care

$$|f(t,u)-f(t,v)|<\frac{2\varepsilon}{3(T_\varepsilon^2-t_0^2)}$$

unde $t\in[t_0,T_\varepsilon]$ şi $u,v\in[-m_\varepsilon-r_0,m_\varepsilon+r_0]$ cu $|u-v|<\delta(\varepsilon)$.

Deducem că

$$\begin{aligned}|T(u)(t)-T(v)(t)| &\le \int_{t_0}^{T_\varepsilon} s\,|n(s,u(s))-n(s,v(s))|\,ds\\ &+\int_{T_\varepsilon}^{\infty} s\,|n(s,u(s))|\,ds+\int_{T_\varepsilon}^{\infty} s\,|n(s,v(s))|\,ds\\ &\le \frac{\varepsilon}{3}+2\int_{T_\varepsilon}^{\infty} sh(s)ds\cdot g\left(\left(\frac{P_0}{R}\right)_*+r_0\left(\frac{1}{R}\right)_*\right)\\ &\le \varepsilon,\qquad u,v\in B,\ \|u-v\|<\delta(\varepsilon),\end{aligned}$$

unde $n(s,u)=f(s,P(s)+u)$, ceea ce probează continuitatea lui T.

În privinţa relativ compactităţii lui $T(B)$, conform observaţiei făcute în cadrul Propoziţiei 11, ea va fi stabilită în $X_2(t_0;1)$. În fapt, este evident că $T(B)\subseteq B$ este mărginită pe când

$$\begin{aligned}\left|[T(v)(t)]'\right| &\le \int_t^{\infty} sh(s)ds\cdot g\left(\left(\frac{P_0}{R}\right)_*+r_0\left(\frac{1}{R}\right)_*\right)\\ &\le \frac{r_0}{H^*}\cdot\int_{t_0}^{\infty} sh(s)ds<+\infty\end{aligned}$$

implică echicontinuitatea lui $T(B)$. Echiconvergenţa (reamintesc Teorema 24) rezultă imediat observând că $l_{T(v)}=0$ uniform în raport cu $v\in B$. $\square$

Fac un comentariu despre transformarea

$$\begin{cases} ty(t)=\int_t^{\infty} sf(s,u(s))ds\\ u(t)=P(t)-t\int_t^{\infty}\frac{y(s)}{s}ds\end{cases}\tag{3.67}$$

folosită în [58, p. 179] la stabilirea unui caz particular al Teoremei 35. Deşi nu poate funcţiona mai bine decât clasica translaţie $u(t) = P(t) + v(t)$ în privinţa expansiunii asimptotice a soluţiilor ec. (3.65), se vede că

$$u'(t) - \frac{u(t)}{t} = P'(t) - \frac{P(t)}{t} + y(t), \quad t \geq t_0, \tag{3.68}$$

ceea ce înseamnă că obligându-l pe $y(t)$ să rămână într-un anumit set de funcţii este posibil să controlăm comportamentul *pseudo-Wronskianului* dat în partea stângă a lui (3.68) într-un mod eficient, vezi [1, Secţiunea 4], de asemeni cu privire la oscilaţii. Asemenea chestiuni sunt comentate pe larg în [1] (vezi Capitolul anterior).

O analiză diferită poate fi făcută aici, legând (3.67) de topica *problemelor Kummer* [12, 61]. Fie ecuaţia diferenţială liniară

$$z'' + q(t)z = 0, \qquad t \geq t_0, \tag{3.69}$$

unde coeficientul cu valori reale $q(t)$ este continuu şi astfel încât ec. (3.69) să aibă o soluţie *non-principală*, adică o soluţie pozitivă $a(t)$ definită pe $[t_0, +\infty)$ ce verifică

$$\int^{\infty} \frac{dt}{a^2(t)} < +\infty$$

(vezi [18, pp. 7, 8]). Presupunem, de asemeni, că

$$\int^{\infty} |g(t)| \left[a^2(t) \int_t^{\infty} \frac{ds}{a^2(s)} \right] dt < +\infty. \tag{3.70}$$

Atunci, transformarea (3.67) devine

$$\begin{cases} a(t)y(t) = \int_t^{\infty} a(s) \left[f(s, u(s)) + q(s)a(s) \int_s^{\infty} \frac{y(\tau)}{a(\tau)} d\tau \right] ds \\ u(t) = P(t) - a(t) \int_t^{\infty} \frac{y(s)}{a(s)} ds. \end{cases}$$

Cerând, precum în [58, p. 178], ca $y \in X_2(t_0; 1/a(t))$ şi $l_y = 0$, obţinem o soluţie a ec. (3.65) ce poate fi descrisă asimptotic prin

$$u(t) = P(t) + o\left(a(t) \int_t^{\infty} \frac{ds}{a^2(s)} \right) \qquad \text{când } t \to +\infty. \tag{3.71}$$

Impunem acum ca

$$\int^{\infty} t\, |q(t)|\, dt < +\infty. \tag{3.72}$$

Această condiţie este foarte importantă în teoria integrării asimptotice [54, p. 365], [69, p. 634] şi face ca toate soluţiile ec. (3.69) să aibă alura asimptotică

$$z(t) = ct + o(t) \qquad \text{pentru } t \to +\infty,\ c \in \mathbb{R}. \tag{3.73}$$

Formula (3.73) implică

$$a(t)\int_t^{\infty}\frac{ds}{a^2(s)} = 1+o(1) \qquad \text{pentru } t\to+\infty,$$

ceea ce face să coincidă condiţiile (3.70), (3.72). De asemeni, dezvoltarea (3.71) conduce la aceeaşi concluzie ca şi Teorema 35 în cazurile obişnuite, evidenţiindu-i generalitatea.

Referinţe Bibliografice

1. Agarwal, R.P., Djebali, S., Moussaoui, T., Mustafa, O.G.: On the asymptotic integration of nonlinear differential equations. J. Comput. Appl. Math. **202**, 352–376 (2007)
2. Ahiezer, N.I., Babenko, K.I.: On weighted polynomials of approximation to functions continuous on the whole axis. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **57**, 315–318 (1947)
3. Ahiezer, N.I.: On the weighted approximation of continuous functions by polynomials on the entire number axis. Amer. Math. Soc. Translations **22**, 95–137 (1962)
4. Alekseev, V.M.: An estimate for perturbations of the solution of ordinary differential equations. Vestnik Moskov. Univ. Math. Mek. **2**, 28–36 (1961) (în rusă)
5. Amann, H.: Ordinary differential equations. Introduction to nonlinear analysis. de Gruyter, Berlin (1990)
6. Atkinson, K.: The numerical solution of integral equations on the half-line. SIAM J. Num. Anal. **6**, 375–397 (1969)
7. Avramescu, C.: Sur l'existence des solutions convergentes de systèmes d'équations différentielles non linéaires. Ann. Mat. Pura Appl. **81**, 147–168 (1969)
8. Bainov, D.D., Simeonov, P.S.: Impulse differential equations. Asymptotic properties of the solutions. World Scientific, Singapore (1995)
9. Bellman, R.: Stability theory of differential equations. McGraw-Hill, New York (1953)
10. Bernstein, S.N.: Sur les équations du calcul des variations. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. **29**, 431–485 (1912)
11. Bihari, I.: Notes on a nonlinear integral equation. Studia Sci. Math. Hung. **2**, 1–6 (1967)
12. Boruvka, O.: Linear differential transformations of the second order. London Univ. Press, London (1971)
13. Brauer, F.: A nonlinear variation of constants formula for Volterra equations. Math. Syst. Theory **6**, 226–234 (1972)
14. Brézis, H.: Analyse fonctionelle. Théorie et applications. Masson, Paris (1992)
15. Brown, R.F.: A topological introduction to nonlinear analysis. Birkhäuser, Boston (1993)
16. Carleson, L.: On Bernstein's approximation problem. Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 953–961 (1951)
17. Constantin, A.: On the existence of positive solutions of second order differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. **184**, 131–138 (2005)
18. Coppel, W.A.: Disconjugacy. Lect. Notes Math. **220**, Springer-Verlag, Berlin (1971)
19. Copson, E.T.: Metric spaces. Cambridge Tracts Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge (1968)
20. Corduneanu, C.: Global existence theorems for differential systems with retarded argument. Stud. Cercet. Ştiinţ. **12**, 249–258 (1961) (în română)
21. Corduneanu, C.: Sur les inégalités différentielles. Mathematica **6**, 31–33 (1964)
22. Corduneanu, C.: Problèmes globaux dans la théorie des équations intégrales de Volterra. Ann. Mat. Pura Appl. **67**, 349–363 (1965)

23. Corduneanu, C.: Almost periodic functions. Interscience, New York (1968)
24. Corduneanu, C.: Principles of differential and integral equations. Chelsea Publ., New York (1977)
25. Corduneanu, C.: Integral equations and stability of feedback systems. Academic Press, New York (1973)
26. Dugundji, J., Granas, A.: Fixed point theory, I. Monogr. Mat. **61**, PWN, Warszawa (1982)
27. Dzyadyk, V.K.: Approximation methods for solutions of differential and integral equations. VSP, Utrecht, The Netherlands (1995)
28. Eastham, M.S.P.: Theory of ordinary differential equations. Van Nostrand, London (1970)
29. Frigon, M., O'Regan, D.: Some general existence principles for ordinary differential equations. Top. Methods Nonlin. Anal. **2**, 35–54 (1993)
30. Grammatikopoulos, M.K.: Oscillatory and asymptotic behavior of differential equations with deviating arguments. Hiroshima Math. J. **6**, 31–53 (1976)
31. Granas, A., Guennoun, Z.: Quelques résultats dans la théorie de Bernstein-Carathéodory de l'équation $y'' = f(t,y,y')$. C.R. Acad. Sci. Paris **306**, 703–706 (1988)
32. Granas, A., Guenther, R.B., Lee, J.W.: Some general existence principles in the Carathéodory theory of nonlinear differential systems. J. Math. Pures Appl. **70**, 153–196 (1991)
33. Hale, J.K.: Ordinary differential equations. Wiley-Interscience, New York (1969)
34. Hartman, P.: A remark on a teorema of Arzela. Amer. J. Math. **59**, 436 (1937)
35. Hartman, P.: Ordinary differential equations. Wiley, New York (1964)
36. Hsieh, P.F., Sibuya, Y.: Basic theory of ordinary differential equations. Springer-Verlag, New York (1999)
37. Hille, E.: Lectures on ordinary differential equations. Addison-Wesley, Reading, Mass. (1969)
38. Hukuhara, M.: Sur la fonction $S(x)$ de M. E. Kamke. Japanese J. Math. **17**, 289–298 (1940)
39. Kartsatos, A.G.: Advanced ordinary differential equations. Mariner Publ., Tampa, FL (1980)
40. Kato, J.: The asymptotic relations of two systems of ordinary differential equations. Contributions Diff. Eqns. **3**, 141–161 (1964)
41. Kelley, J.L.: General topology. Van Nostrand, New York (1970)
42. Kryzewski, W., Przeradzki, B.: The topological degree and fixed points of *DC*-mappings. Fund. Math. **126**, 15–26 (1985)
43. Kusano, T., Trench, W.F.: Existence of global solutions with prescribed asymptotic behavior for nonlinear ordinary differential equations. Ann. Mat. Pura Appl. **142**, 381–392 (1985)
44. Kusano, T., Trench, W.F.: Global existence theorems for solutions of nonlinear differential equations with prescribed asymptotic behavior. J. London Math. Soc. **31**, 478–486 (1985)
45. Ladas, G.E., Lakshmikantham, V.: Differential equations in abstract spaces. Academic Press, New York (1972)
46. Lakshmikantham, V., Leela, S.: Differential and integral inequalities, I, II. Academic Press, New York (1969)
47. Lakshmikantham, V., Leela, S., Martynyuk, A.A.: Stability analysis of nonlinear systems. Marcel Dekker, New York (1989)
48. Lipovan, O.: On the asymptotic behavior of the solutions to a class of second order nonlinear differential equations. Glasgow Math. J. **45**, 179–187 (2003)
49. Mâagli, H., Masmoudi, S.: Sur les solutions d'un opérateur différentiel singulier semi-linéaire. Potential Anal. **10**, 289–304 (1999)
50. Maatoug, L., Zribi, M.: On the existence of positive solutions of nonlinear differential equations of high order. Nonlinear Anal. **43**, 721–731 (2001)
51. Miller, R.K., Sell, G.R.: Existence, uniqueness and continuity of solutions of integral equations. Ann. Mat. Pura Appl. **80**, 135–152 (1968)
52. Montel, P.: Sur l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure d'une équation différentielle. Bull. Sci. Math. **50**, 204–217 (1926)
53. Müller, M.: Über das fundamentaltheorem in der theorie der gewöhnlichen differentialgleichungen. Math. Z. **26**, 619–645 (1927)
54. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: Global existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for second-order nonlinear differential equations. Nonlinear Anal. **51**, 339–368 (2002)

55. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: Existence of square integrable solutions of perturbed nonlinear differential equations. Proc. Fourth Internat. Conf. Dynam. Systems Differential Equations, Wilmington, USA. Discrete Contin. Dynam. Systems supplement volume, 647–655 (2003)
56. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: Asymptotic integration of nonlinear differential equations. Nonlinear Anal. **63**, e2135–e2145 (2005)
57. Mustafa, O.G., Rogovchenko, Y.V.: Oscillation of second-order perturbed differential equations. Math. Nachr. **278**, 460–469 (2005)
58. Mustafa, O.G.: On the existence of solutions with prescribed asymptotic behavior for perturbed nonlinear differential equations of second order. Glasgow Math. J. **47**, 177–185 (2005)
59. Mustafa, O.G.: Positive solutions of nonlinear differential equations with prescribed decay of the first derivative. Nonlinear Anal. **60**, 179–185 (2005)
60. Mustafa, O.G.: Banach function spaces in the study of asymptotic behavior of solutions of a class of differential equations of arbitrary order. PhD thesis, Univ. Craiova, Romania (2000) (în română)
61. Neuman, F.: Global properties of linear ordinary differential equations. Kluwer, London (1991)
62. Onuchic, N.: Applications of the topological method of Ważewski to certain problems of asymptotic behavior in ordinary differential equations. Pacific J. Math., 1511–1527 (1961)
63. Philos, C.G.: Asymptotic behavior of a class of nonoscillatory solutions of differential equations with deviating arguments. Math. Slovaca **33**, 409–428 (1983)
64. Philos, C.G., Staikos, V.A.: A basic asymptotic criterion for differential equations with deviating arguments and its applications to the nonoscillation of linear ordinary differential equations. Nonlinear Anal. **6**, 1095–1113 (1982)
65. Philos, C.G., Purnaras, I.K., Tsamatos, P.C.: Asymptotic to polynomials solutions for nonlinear differential equations. Nonlinear Anal. **59**, 1157–1179 (2004)
66. Philos, C.G., Tsamatos, P.C.: Solutions approaching polynomials at infinity to nonlinear ordinary differential equations. Electron. J. Differential Eqs. **79**, 1–25 (2005)
67. Pollard, H.: Solution of Bernstein's approximation problem. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 869–875 (1953)
68. Przeradzki, B.: On a two-point boundary value problem for differential equations on the half-line. Ann. Pol. Math. **50**, 53–61 (1989)
69. Putnam, C.R.: An oscillation criterion involving a minimum principle. Duke Math. J. **16**, 633–636 (1949)
70. Rudin, W.: Real and complex analysis. McGraw-Hill, New York (1966)
71. Satō, T.: Sur l'équation intégrale nonlinéaire de Volterra. Comp. Math. **11**, 271–290 (1953)
72. Stokes, A.: The applications of a fixed point theorem to a variety of non-linear stability problems. Contributions Diff. Eqs. **V**, Princeton Univ. Press, Princeton (1960)
73. Trench, W.F.: Global solutions of nonlinear perturbations of linear differential equations. WSSIAA **1**, 543–557 (1992)
74. Tricomi, F.G.: Differential equations. Blackie & Son, Glasgow (1966)
75. Vasilache, S.: Sur la détermination d'un système fondamental de solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre *n*. Ann. Pol. Math. **3**, 172–182 (1957)
76. Walter, W.: Ordinary differential equations. Springer-Verlag, New York (1998)
77. Yosida, K.: Functional analysis. Springer-Verlag, Berlin (1966)
78. Yin, Z.: Monotone positive solutions of second-order nonlinear differential equations. Nonlinear Anal. **54**, 391–403 (2003)