

Octavian G. Mustafa

Forma Canonică Jordan a Matricelor

Teorie, aplicații



Publicațiile DAL
Craiova

Fișier prelucrat în data de [May 19, 2018]

Avertisment

Acest eseu nu a fost raportat vreunui referent. În consecință, conținutul său trebuie considerat “ca atare.”

Autorul vă așteaptă comentariile la adresa lui de e-mail¹ și vă mulțumește anticipat pentru efortul depus.

Fiecare proiect de la *Publicațiile DAL* trebuie considerat “șantier” dacă nu este declarat altfel. Versiunea sa este cea a datei de pe pagina cu titlul.

Craiova, Mai 18, 2015

O.G.M.

¹ octawian@yahoo.com

Prefață

În această lucrare discutăm despre aducerea matricelor pătrate, cu elemente (intrări) reale, la forma canonică Jordan, urmând expunerea din cartea profesorilor Hirsch și Smale [10].

Scopul prezentării de față este acela de a avea la îndemână o justificare riguroasă pentru metoda fundamentală de calcul a *exponențialei unei matrice*: Secțiunea 4.3.

Există mai multe modalități clasice de aducere a matricelor la forma canonică Jordan. De exemplu, tehnica descrisă în [19] — traducerea sa în românește este [20] — face apel la *polinomul anulador* al unui operator liniar, la *algebra polinoamelor* de o nedeterminată cu coeficienți în \mathbb{K} etc. Nu am urmat această cale aici, fiind interesat de obținerea rapidă a soluțiilor *sistemelor diferențiale liniare*, cu coeficienți reali: Secțiunea 4.5.

Anumite detalii ale demonstrației principale se regăsesc și în restul procedeelelor de aducere la forma canonică Jordan. Un exemplu notabil îl constituie *proprietatea* ($\mathcal{H}\mathcal{S}$), reformulată în [20, pag. 169, Teoremă] cu ajutorul polinomului anulador.

Aplicațiile dezvoltate în Capitolul 4 au semnificații de sine stătătoare. Astfel, în Exercițiul 4.13 se calculează *soluțiile fundamentale* ale unei ecuații diferențiale ordinare, liniare și omogene, cu ajutorul eigenvectorilor generalizați ai matricei asociate. În Exercițiul 4.35, elementele *bazei reciproce* a bazei unui hiperplan sunt exprimate cu ajutorul operațiilor vectoriale din spațiul ambient.

Craiova, [May 19, 2018]

O.G.M.

Cuprins

1	Operatori liniari	1
1.1	Vectori și covectori	1
1.2	Operatori și matrice	3
1.3	Invarianții algebrici ai operatorului T . Valori proprii și vectori proprii. Polinomul caracteristic. Vectori proprii generalizați	6
1.4	Complexificare, realificare, decomplexificare. Complexificatul unui operator liniar	12
2	Teoreme de descompunere	19
2.1	Suma directă de subspații vectoriale. Suma directă de operatori	19
2.2	Teorema $N + M$	25
2.3	Teorema de descompunere primară	29
3	Forma canonică a matricelor pătrate cu elemente numerice	43
3.1	Cazul operatorilor nilpotenți	43
3.2	Forma canonică Jordan a matricei de reprezentare \mathbb{T}	55
3.3	Cazul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$	57
4	Aplicații	69
4.1	Sumare prin părți. Produsul Cauchy a două serii. Teorema lui F. Mertens	69
4.2	Exponențiala unei matrice pătrate cu elemente numerice	80
4.3	Calculul exponențialei unei matrice pătrate cu elemente complexe ..	83
4.4	Estimarea produsului scalar	84
4.5	Exerciții rezolvate	88
4.6	Soluții fundamentale ale ecuațiilor diferențiale liniare și omogene ..	103
4.7	Matrice strict pozitiv-definite. Reprezentarea covectorilor folosind produsul scalar. Produsul vectorial a $m - 1$ vectori. Produsul tensorial a doi vectori. Reciproca unei baze. Rezoluția identității ...	108
	Referințe Bibliografice	145

Index 147

Capitolul 1

Operatori liniari

1.1 Vectori și covectori

Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ — vezi [10, pag. x] — un spațiu liniar peste corpul \mathbb{K} , unde $n \geq 1$ este un număr natural. Aici, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Setul de vectori

$$\mathcal{S}_1 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}, \quad m \leq n,$$

reprezintă o bază a sa. Atunci, vom scrie că

$$E = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{e}_j \mid \lambda_j \in \mathbb{K} \right\}.$$

Fie $\bar{x} \in E$. Putem folosi formalismul de calcul matriceal *vectori pe linie*, adică

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{e}_j = (\bar{e}_1 \ \dots \ \bar{e}_m) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

respectiv formalismul *vectori pe coloană*,

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{e}_j = (\lambda_1 \ \dots \ \lambda_m) \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \vdots \\ \bar{e}_m \end{pmatrix}.$$

Aici, elementele λ_j constituie *componentele* (coordonatele) vectorului \bar{x} în baza \mathcal{S}_1 . În cele ce urmează, întrebuițăm tehnica (1.1).

Dacă $\mathcal{S}_2 = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$ reprezintă altă bază a spațiului E , atunci există matricea nesingulară $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ astfel încât

$$\begin{aligned}(\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot (\text{col}_{(1)}P \cdots \text{col}_{(m)}P) \\ &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot P\end{aligned}\quad (1.2)$$

unde $\text{col}_{(i)}P$ desemnează cea de-a i -a coloană a matricei P .

Notăm cu $(x_i)_{i \in \overline{1, m}}$ și $(y_i)_{i \in \overline{1, m}}$ componentele vectorului \bar{x} în bazele $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$. Atunci,

$$\bar{x} = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned}&= (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = [(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot P] \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\ &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \left[P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right].\end{aligned}\quad (1.4)$$

Din (1.3), (1.4), ținând seama de liniar independența peste \mathbb{K} a vectorilor din \mathcal{S}_1 , deducem că

$$(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right] = 0,$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

Așadar, legătura *nou-vechi* pentru vectori și coordonate este dată de formulele (1.2), (1.5) [10, pag. 37].

Componentele (1.3) ne conduc la funcționalele liniare (covectorii) $x_i : E \rightarrow \mathbb{K}$ cu formulele

$$\begin{aligned}x_i(\bar{x}) &= x_i \left(\sum_{j=1}^m x_j \cdot \bar{e}_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m x_j \cdot x_i(\bar{e}_j) = \sum_{j=1}^m x_j \cdot \delta_{ij} \\ &= x_i, \quad i \in \overline{1, m},\end{aligned}\quad (1.6)$$

unde $\delta_{ij} = 1 - (\text{sign}(i - j))^2$, cu

$$\text{sign } u = \begin{cases} -1, & u < 0, \\ 0, & u = 0, \\ 1, & u > 0, \end{cases}$$

desemnează¹ simbolul lui *L. Kronecker* [17, pag. 14]. Setul de covectori

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_1(\mathcal{S}_1) = \{x_1, \dots, x_m\} \quad (1.7)$$

alcătuiește o bază² a spațiului $E^* = L(E, \mathbb{K})$, adică — [10, pag. 36] —

$$E^* = \text{Span}_{\mathbb{K}} \{x_1, \dots, x_m\}.$$

1.2 Operatori și matrice

Operatorul liniar (\mathbb{K} -liniar) $T : E \rightarrow E$ — [10, pag. 30] — este descris de vectorii

$$\mathcal{T} = \{T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_m)\}, \quad \bar{e}_i \in \mathcal{S}_1, i \in \overline{1, m}, \quad (1.8)$$

căci

$$\begin{aligned} T(\bar{x}) &= T\left(\sum_{i=1}^m x_i \cdot \bar{e}_i\right) = \sum_{i=1}^m x_i \cdot T(\bar{e}_i) \\ &= (T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_m)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \in E. \end{aligned}$$

Introducem matricea $\mathbb{T} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ prin relațiile

$$\begin{aligned} (T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_m)) &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot (\text{col}_{(1)} \mathbb{T} \cdots \text{col}_{(m)} \mathbb{T}) \\ &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot \mathbb{T}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Atunci, pentru $\bar{x} \in E$, avem

¹ Se întâlnesc și denumirile *delta (lui) Kronecker* [14, pag. 3], respectiv *simbolul delta (al lui) Kronecker* [21, pag. 5].

² Numită *duala* bazei \mathcal{S}_1 [8, pag. 23, Theorem 2]. Se spune și că seturile \mathcal{C}_1 și \mathcal{S}_1 sunt *biortogonale*.

$$\begin{aligned}
T(\bar{x}) &= (T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_m)) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \left[\mathbb{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right]. \tag{1.10}
\end{aligned}$$

Calculule de până acum au ținut seama doar de faptul că *dimensiunea spațiului E peste \mathbb{K} este finită*, spațiul în sine putând fi orice set de obiecte abstracte³. Acum, via relațiile (1.3), (1.10), operatorului T i se asociază matricea (de reprezentare în \mathcal{S}_1) \mathbb{T} care desemnează, la rândul său, un operator $\mathbb{T} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$. Acțiunea (operația) acestui operator \mathbb{T} asupra spațiului \mathbb{C}^m este dată de formula [10, pag. 38]

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \mathbb{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m.$$

Putem, așadar, echivala elementele spațiului vectorial $L(E, E)$ peste corpul \mathbb{K} cu matricele din $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ [10, p. 31], respectiv cu vectori din spațiul linear $L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$ peste corpul \mathbb{C} .

Plecând de la identitatea

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_m \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

introducem baza standard⁴ (canonică⁵) a spațiului \mathbb{C}^m — peste corpul \mathbb{C} —

$$(\bar{i}_1 \cdots \bar{i}_m) = (\text{col}_{(1)} I_m \cdots \text{col}_{(m)} I_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_m. \tag{1.11}$$

Reamintesc formula (1.2). Avem relațiile — operatorul T este linear —

$$\begin{aligned}
T(\bar{f}_j) &= T((\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot \text{col}_{(j)} P) = (T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_m)) \cdot \text{col}_{(j)} P \\
&= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot [\mathbb{T} \cdot \text{col}_{(j)} P], \quad j \in \overline{1, m},
\end{aligned}$$

respectiv

³ Operațiile cu vectori și scalari sunt cele tipice, vezi relațiile din nota de subsol de la pagina 12.

⁴ Vezi [10, pag. 34].

⁵ Vezi [13, pag. 3, Example 1.4].

$$(T(\bar{f}_1) \cdots T(\bar{f}_m)) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \mathbb{T}P. \quad (1.12)$$

De aici, pentru $\bar{x} \in E$, deducem că

$$\begin{aligned} T(\bar{x}) &= T \left((\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) = (T(\bar{f}_1) \cdots T(\bar{f}_m)) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\ &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \left[(\mathbb{T}P) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Notăm cu \mathbb{W} matricea de reprezentare a operatorului T în \mathcal{S}_2 . Adică,

$$(T(\bar{f}_1) \cdots T(\bar{f}_m)) = (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) \mathbb{W}.$$

Atunci,

$$\begin{aligned} T(\bar{x}) &= T \left((\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right) = (T(\bar{f}_1) \cdots T(\bar{f}_m)) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\ &= (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) \mathbb{W} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = [(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) P] \cdot \left[\mathbb{W} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right] \\ &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \left[P\mathbb{W} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Expresiile (1.13), (1.14) ne conduc la

$$(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \left[(\mathbb{T}P - P\mathbb{W}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \right] = 0,$$

respectiv la — vectorii $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ sunt liniar independenți peste \mathbb{K} —

$$\mathbb{T}P - P\mathbb{W} = O_m, \quad \mathbb{W} = P^{-1}\mathbb{T}P, \quad (1.15)$$

vezi [10, pag. 39]. Aici, O_m este matricea-nulă $m \times m$.

În (1.12) am folosit doar faptul că sistemul de vectori $\mathcal{S}_2 = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$ este legat de $\mathcal{S}_1 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ prin matricea P din (1.2). Înlocuindu-l pe \mathcal{S}_2 cu \mathcal{S} din (1.8) și pe P cu \mathbb{T} din (1.9), deducem că

$$(T^2(\bar{e}_1) \cdots T^2(\bar{e}_m)) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot \mathbb{T}^2,$$

respectiv

$$(T^k(\bar{e}_1) \cdots T^k(\bar{e}_m)) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot T^k, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.16)$$

1.3 Invarianții algebrici ai operatorului T . Valori proprii și vectori proprii. Polinomul caracteristic. Vectori proprii generalizați

Plecând de la cea de-a doua dintre relațiile (1.15), spunem că două matrice $\mathbb{W}, \mathbb{T} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ sunt *similare* dacă există matricea nesingulară $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ astfel încât $\mathbb{W} = P^{-1}\mathbb{T}P$, conform [10, pag. 39]. Această similaritate definește o relație de echivalență (\sim) între matricele din $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Într-adevăr, avem *reflexivitate*,

$$\mathbb{T} \sim \mathbb{T}, \quad \mathbb{T} = I_m^{-1}\mathbb{T}I_m,$$

apoi *simetrie* — $\det P \neq 0$ —,

$$\mathbb{W} \sim \mathbb{T} \implies \mathbb{T} \sim \mathbb{W}, \quad \mathbb{W} = P^{-1}\mathbb{T}P \implies \mathbb{T} = (P^{-1})^{-1}\mathbb{W}(P^{-1}), \quad (1.17)$$

și *tranzitivitate* — $\det P, \det R \neq 0$ —,

$$\mathbb{W} \sim \mathbb{T}, \mathbb{T} \sim \mathbb{V} \implies \mathbb{W} \sim \mathbb{V}, \quad \mathbb{W} = P^{-1}\mathbb{T}P, \mathbb{T} = R^{-1}\mathbb{V}R \implies \mathbb{W} = (RP)^{-1}\mathbb{V}(RP).$$

De asemenea, *dacă* $\mathbb{W} \sim \mathbb{T}$, adică $\mathbb{W} = P^{-1}\mathbb{T}P$, *atunci* $\mathbb{W}^k \sim \mathbb{T}^k$ *pentru orice* $k \in \mathbb{N}^*$. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned} \mathbb{W}^2 &= (P^{-1}\mathbb{T}P) \cdot (P^{-1}\mathbb{T}P) = P^{-1}\mathbb{T}(P \cdot P^{-1})\mathbb{T}P \\ &= P^{-1}\mathbb{T}^2P, \end{aligned}$$

respectiv — prin inducție matematică —

$$\mathbb{W}^k = P^{-1}\mathbb{T}^kP, \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (1.18)$$

Determinantul, urma și rangul (unei matrice) — ca funcții de matricele din $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ — sunt invariante la relația de similaritate [10, pag. 40, 41]. Putem, din acest motiv, introduce mărimile

$$\text{Det } T = \det \mathbb{T}, \quad \text{Tr } T = \text{tr } \mathbb{T}, \quad \text{Rank } T = \text{rank } \mathbb{T},$$

unde *det*, *tr* și *rank* desemnează *determinantul*, *urma*⁶, respectiv *rangul*⁷ matricei de reprezentare (în \mathcal{S}_1) \mathbb{T} . Avem la dispoziție, astfel, determinantul, urma și rangul unui operator liniar $T : E \rightarrow E$ — invarianți algebrici —.

⁶ În limba engleză, *trace*.

⁷ În limba engleză, *rank*.

Lema 1.1. ([13, pag. 16]) *Rangul operatorului liniar $T : E \rightarrow E$ este egal cu dimensiunea subspațiului liniar $T(E) \subseteq E$.*

Demonstrație. Să presupunem că setul de vectori $\{T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_h)\}$, unde $h \leq m$, alcătuiește o bază⁸ a subspațiului $T(E)$. Atunci,

$$(T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_h)) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot A,$$

unde $A \in \mathcal{M}_{m,h}(\mathbb{K})$.

Fie $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Observăm că

$$\begin{aligned} T(E) &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\{T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_h)\} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\{T(\bar{e}_1) + \lambda \cdot T(\bar{e}_2), T(\bar{e}_2), T(\bar{e}_3), \dots, T(\bar{e}_h)\}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

respectiv

$$\begin{aligned} E &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1 + \lambda \cdot \bar{e}_2, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \dots, \bar{e}_m\}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Schimbarea de bază (1.19) produce următoarea modificare a matricei A ,

$$\begin{aligned} &((T(\bar{e}_1) + \lambda \cdot T(\bar{e}_2)) \ T(\bar{e}_2) \ T(\bar{e}_3) \cdots T(\bar{e}_h)) \\ &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \cdot ((\text{col}_{(1)}A + \lambda \cdot \text{col}_{(2)}A) \ \text{col}_{(2)}A \ \text{col}_{(3)}A \cdots \text{col}_{(h)}A). \end{aligned}$$

La rândul său, schimbarea de bază (1.20) modifică matricea A ,

$$\begin{aligned} (T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_h)) &= ((\bar{e}_1 + \lambda \cdot \bar{e}_2) \ \bar{e}_2 \ \bar{e}_3 \cdots \bar{e}_m) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \text{lin}_{(1)}A \\ \text{lin}_{(2)}A - \lambda \cdot \text{lin}_{(1)}A \\ \text{lin}_{(3)}A \\ \text{lin}_{(4)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(m)}A \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.21)$$

unde $\text{lin}_{(i)}A$ desemnează cea de-a i -a linie a matricei A .

Trebuie să arătăm că $\text{rank } A = h$, adică există h linii ale matricei A care să fie liniar independente peste corpul \mathbb{K} .

Presupunem că, prin reducere la absurd, toate seturile de câte h linii ale matricei A sunt liniar dependente peste corpul \mathbb{K} . Aceasta înseamnă că, în particular, setul tuturor liniilor matricei A este liniar dependent, deci există numerele

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_m\} \subset \mathbb{K}$$

⁸ Relațiile $\bar{y} = T(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot T(\bar{e}_i)$, unde $\bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \bar{e}_i \in E$, arată că familia de vectori $\{T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_m)\}$ este un sistem de generatori pentru spațiul $T(E)$.

astfel încât

$$\begin{aligned} \text{lin}_{(p)}A &= \lambda_1 \cdot \text{lin}_{(1)}A + \cdots + \lambda_{p-1} \cdot \text{lin}_{(p-1)}A \\ &+ \lambda_{p+1} \cdot \text{lin}_{(p+1)}A + \cdots + \lambda_m \cdot \text{lin}_{(m)}A \end{aligned}$$

pentru un anumit p . Aici, apar două situații. În *prima* dintre ele, $\text{lin}_{(p)}A$ conține cel puțin un element nenul, deci

$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq m, \\ i \neq p}} |\lambda_i|^2 > 0. \quad (1.22)$$

Cea de-a doua situație, când matricea A are (măcar) o linie nulă — formată numai din elemente nule — va fi discutată ulterior.

Au loc relațiile — via (1.21) —

$$\begin{aligned} &(T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_h)) \\ &= ((\bar{e}_1 + \lambda_1 \cdot \bar{e}_p) \cdots (\bar{e}_{p-1} + \lambda_{p-1} \cdot \bar{e}_p) \bar{e}_p (\bar{e}_{p+1} + \lambda_{p+1} \cdot \bar{e}_p) \cdots (\bar{e}_m + \lambda_m \cdot \bar{e}_p)) \\ &\times B, \quad B = \begin{pmatrix} \text{lin}_{(1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(p-1)}A \\ (0 \cdots 0) \\ \text{lin}_{(p+1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(m)}A \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

respectiv — a p -a linie a matricei B este nulă! —

$$T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_h) \in Q = \text{Span}_{\mathbb{K}} \{ \bar{e}_1 + \lambda_1 \cdot \bar{e}_p, \dots, \bar{e}_{p-1} + \lambda_{p-1} \cdot \bar{e}_p, \\ \bar{e}_{p+1} + \lambda_{p+1} \cdot \bar{e}_p, \dots, \bar{e}_m + \lambda_m \cdot \bar{e}_p \}.$$

Se observă că $\bar{e}_p \notin Q$, deci dimensiunea subspațiului $Q \subseteq E$ este mai mică sau egală cu $m - 1$.

Dacă $h = m$, evident, am ajuns la o contradicție: cei h vectori liniar independenți din $T(E)$ nu se pot afla într-un spațiu — cel mult — $(h - 1)$ -dimensional!

Dacă $h \leq m - 1$, avem relația

$$(T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_h)) = (\bar{f}_1 \bar{f}_2 \cdots \bar{f}_{p-1} \bar{f}_{p+1} \cdots \bar{f}_m) \cdot C, \quad (1.23)$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} \text{lin}_{(1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(p-1)}A \\ \text{lin}_{(p+1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(m)}A \end{pmatrix}$$

și $\bar{f}_i = \bar{e}_i + \lambda_i \cdot \bar{e}_p$, $i \neq p$, iar vectorii $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{p-1}, \bar{f}_{p+1}, \dots, \bar{f}_m\}$ sunt liniari independenți.

Ce se întâmplă însă dacă $\text{lin}_{(p)}A$ este o linie nulă a matricei A ? Adică, nu are loc (1.22)! Atunci, relația (1.23) devine

$$(T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_h)) = (\bar{e}_1 \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_{p-1} \bar{e}_{p+1} \cdots \bar{e}_m) \cdot \begin{pmatrix} \text{lin}_{(1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(p-1)}A \\ \text{lin}_{(p+1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(m)}A \end{pmatrix}.$$

Reluăm discuția anterioară: presupunem că *oricare* h din cele $m-1$ linii rămase ale matricei A — vezi matricea C — sunt liniar dependente, de unde rezultă că setul celor $m-1$ linii rămase este liniar dependent etc. Aici, “rolul” matricei A va fi “jucat” de C . Ajungem la alt spațiu, de dimensiune cel mult $m-2$ peste corpul \mathbb{K} .

Procedeeul poate fi repetat atâta timp cât dimensiunea spațiului Q — egală cu numărul liniilor din A rămase în discuție! — este mai mare sau egală cu h . \square

Fie⁹ $\bar{x} \in \text{Ker } T$. Pe baza (1.3), (1.10), avem

$$0_E = T(\bar{x}) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \mathbb{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Liniar independența vectorilor $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$ — peste corpul \mathbb{K} — ne conduce la sistemul algebric

$$\mathbb{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

cu necunoscutele $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$.

⁹ Vezi nota de subsol de la pagina 25: definiția lui Ker .

Dacă $I : E \rightarrow E$ este operatorul-identitate¹⁰ din $L(E, E)$ și $\lambda \in \mathbb{C}$, ne interesează mulțimea¹¹ $\text{Ker}(T - \lambda \cdot I)$. Conform relației (1.25), aceasta înseamnă să rezolvăm în \mathbb{K} sistemul algebric

$$(\mathbb{T} - \lambda \cdot I_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

Evident, este posibil ca sistemul să nu aibă soluții nenule!

Deoarece $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, dacă impunem ca

$$p(\lambda) = \det(\mathbb{T} - \lambda \cdot I_m) = 0, \quad (1.27)$$

atunci sistemul algebric (1.26) va avea întotdeauna soluții nenule în \mathbb{C} — dar nu neapărat în \mathbb{K} ! —.

Numerele $\lambda \in \mathbb{K}$ care sunt soluții ale ecuației¹² algebrice (1.27), deci pentru care sistemul algebric (1.26) admite soluții nenule în \mathbb{K} , se numesc *valori proprii*¹³ sau *eigenvalori*¹⁴ ale operatorului T . Dacă numerele $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{K}$ sunt o soluție nenulă a sistemului (1.26), atunci vectorul

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^m x_i \cdot \bar{e}_i \in \text{Span}_{\mathbb{K}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} = E \quad (1.28)$$

constituie un *vector propriu* sau un *eigenvector*¹⁵ al operatorului T — corespunzător eigenvalorii λ —.

Observăm că — via (1.25), (1.26) — operatorul liniar T admite valoarea proprie $\lambda_0 = 0$ dacă și numai dacă $\text{Ker } T \neq \{0_E\}$, adică dacă T nu este injectiv.

Polinomul $p(\lambda)$ — cu termenul dominant $(-1)^m \lambda^m$, unde m este dimensiunea spațiului E — verifică relațiile, via (1.17),

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbb{T} - \lambda \cdot I_m) = \det(P\mathbb{W}P^{-1} - \lambda \cdot I_m) \\ &= \det(P\mathbb{W}P^{-1} - \lambda \cdot P I_m P^{-1}) = \det(P(\mathbb{W} - \lambda \cdot I_m)P^{-1}) \\ &= \det(\mathbb{W} - \lambda \cdot I_m), \end{aligned}$$

adică este invariant la relația de similaritate. Astfel, el poate fi atașat operatorului T , $p(\lambda) = p_T(\lambda)$, și se numește *polinomul caracteristic*¹⁶ al operatorului.

¹⁰ Adică, $I(\bar{x}) = \bar{x}$ pentru orice $\bar{x} \in E$.

¹¹ Nu insistăm acum asupra semnificației operației $\lambda \cdot I$ atunci când $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$.

¹² Numită *ecuație caracteristică* a operatorului T [10, pag. 71].

¹³ În limba engleză, *proper value* (sing.) [13, pag. 35]. Unii autori folosesc și termenii *autovalori*, *rădăcini caracteristice* [2, pag. 99, 129], *rădăcini ale ecuației caracteristice* [7, pag. 174] sau *valori caracteristice* [13, ibid.].

¹⁴ În limba engleză, *eigenvalue* (sing.), conform [10, pag. 42].

¹⁵ În limba engleză, *eigenvector* [10, ibid.].

¹⁶ În limba engleză, *characteristic polynomial* [10, pag. 43].

Să revenim la ecuația (1.27). Dacă ea admite soluția $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ — adică, λ_0 este eigenvaloare a operatorului T —, atunci au loc, evident, relațiile

$$0 = [\det (\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m)]^k = \det \left((\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m)^k \right), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Ceea ce înseamnă că toate sistemele algebrice

$$(\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m)^k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

admit soluții nenule în \mathbb{K} .

Dacă familia $\{x_1, \dots, x_m\} \subset \mathbb{K}$, $\sum_{i=1}^m |x_i|^2 > 0$, este soluția sistemului (1.29) pentru un anumit $k \geq 2$, atunci vectorul (1.28) poartă numele de *vector propriu* (sau *eigen-vector*) *generalizat*¹⁷ al operatorului T corespunzând eigenvalorii λ_0 . Relația (1.29) poate fi reorganizată, evident, ca

$$(\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m)^{k-1} \cdot \left[(\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

așadar *orice vector propriu este și vector propriu generalizat*.

Exemplul 1.1. Fie $\mu \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ și matricea

$$(\mathbb{T} =) \quad A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Singura eigenvaloare a lui A este $\lambda_0 = \mu$. Sistemul (1.26) devine

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluțiile nenule din \mathbb{K} ale acestui sistem sunt $x_1 = x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $x_2 = 0$, deci $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ este un *eigenvector* corespunzând valorii proprii λ_0 .

Deoarece

$$(A - \lambda_0 \cdot I_2)^2 = O_2,$$

sistemul (1.29), unde $k = 2$, devine

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¹⁷ În limba engleză, *generalized eigenvector* [13, pag. 41].

Evident, *toți vectorii nenuli din \mathbb{K}^2 sunt soluții ale sale, deci sunt eigenvectori generalizați ai matricei A* . În particular, vectorul $\bar{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ este un vector propriu generalizat corespunzând valorii proprii λ_0 care *nu este vector propriu* al matricei A .

1.4 Complexificare, realificare, decomplexificare. Complexificatul unui operator liniar

Fie $E \subseteq \mathbb{R}^n$ — [10, pag. 64] — un spațiu liniar real m -dimensional. Aici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, deci

$$E = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{e}_j \mid \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}. \quad (1.30)$$

Mulțimea

$$E_{\mathbb{C}} = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{e}_j \mid \lambda_j \in \mathbb{C} \right\},$$

dotată cu operațiile cu vectori și scalari tipice¹⁸, alcătuiește un spațiu vectorial complex m -dimensional care poartă numele de *complexificatul* spațiului E ¹⁹. Reamintindu-ne de baza canonică (1.11), observăm că spațiul complex \mathbb{C}^m este complexificatul spațiului real \mathbb{R}^m : $\mathbb{C}^m = (\mathbb{R}^m)_{\mathbb{C}}$.

Nu orice spațiu vectorial complex este complexificatul vreunui spațiu vectorial real.

Exemplul 1.2. Fie $z_j = a_j + b_j i \in \mathbb{C}$, unde $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1, 2\}$, și $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Introducem spațiul²⁰ $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \bar{e}_1 = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{\bar{e}_1\}$ și ne întrebăm dacă există $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ astfel ca

$$E_{\mathbb{C}} = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{\bar{x}\} = \left\{ (a + b \cdot i) \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} (ax_1) + i(bx_1) \\ (ax_2) + i(bx_2) \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Adică, $E_{\mathbb{C}}$ este sau nu este complexificatul spațiului $E = \mathbb{R} \bar{x}$?

¹⁸ $\alpha \cdot \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{e}_j \right) + \beta \cdot \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \cdot \bar{e}_j \right) = \sum_{j=1}^m (\alpha \cdot \lambda_j + \beta \cdot \mu_j) \cdot \bar{e}_j$, unde $\alpha, \beta, \lambda_j, \mu_j \in \mathbb{C}$. De asemeni,

$1 \cdot \bar{e}_j = \bar{e}_j$. În particular, $0 \cdot \bar{e}_j = 0_E$ pentru orice $j \in \overline{1, m}$.

¹⁹ La fel ca în cazul $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 +$ (operații speciale), avem $z \cdot \bar{x} = (a + b \cdot i) \bar{x} \equiv (a, b) \cdot \bar{x} = (a \cdot \bar{x}, b \cdot \bar{x}) \equiv a \bar{x} + i(b \bar{x})$, unde $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Nu este obligatoriu, aici, ca $a \cdot \bar{x}, b \cdot \bar{x}$, unde $\bar{x} \in E$, să însemne înmulțirile cu scalari uzuale — pe componente — din \mathbb{R}^n !

²⁰ Operațiile cu vectori și scalari sunt cele tipice, din \mathbb{C}^2 , respectiv \mathbb{R}^2 .

Fie $\lambda = \alpha + \beta \cdot i \in \mathbb{C}$. Atunci, din egalitățile

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{C}} \ni \lambda \cdot \bar{e}_1 &= \left((\alpha a_1 - \beta b_1) + (\alpha b_1 + \beta a_1) \cdot i \right) \\ &= \left((\alpha x_1) + (b x_1) \cdot i \right) \\ &= \left((\alpha x_2) + (b x_2) \cdot i \right) \in \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \bar{x} \}, \end{aligned}$$

în care *necunoscutele* sunt numerele reale a, b, x_1 și x_2 , deducem că

$$\begin{cases} \alpha a_1 - \beta b_1 = (\alpha a_2 - \beta b_2) \frac{x_1}{x_2}, \\ \alpha b_1 + \beta a_1 = (\alpha b_2 + \beta a_2) \frac{x_1}{x_2}, \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{cases} \left(a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2} \right) \cdot \alpha + \left(-b_1 + b_2 \frac{x_1}{x_2} \right) \cdot \beta = 0, \\ \left(b_1 - b_2 \frac{x_1}{x_2} \right) \cdot \alpha + \left(a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2} \right) \cdot \beta = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Numerele α și β fiind *date* — putem, așadar, presupune că $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ —, relațiile (1.31) pot fi privite ca un sistem algebric, liniar și omogen, în necunoscutele α, β , care admite o soluție nenulă. Deci,

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2} & -b_1 + b_2 \frac{x_1}{x_2} \\ b_1 - b_2 \frac{x_1}{x_2} & a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2} \end{vmatrix} = 0,$$

respectiv

$$\left(a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2} \right)^2 + \left(b_1 - b_2 \frac{x_1}{x_2} \right)^2 = 0. \quad (1.32)$$

În concluzie, pentru ca spațiul $\mathbb{C} \bar{e}_1$ să fie complexificatul unui spațiu liniar real, *este necesar* — via egalitatea (1.32) — să existe $q \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$z_1 = q \cdot z_2. \quad \left(q = \frac{x_1}{x_2} \right) \quad (1.33)$$

Fie $F \subseteq \mathbb{C}^n$ un spațiu liniar complex m -dimensional care este și *subspațiu liniar*²¹ [10, pag. 33] al spațiului complex \mathbb{C}^n . Atunci, mulțimea [10, pag. 64]

$$F_{\mathbb{R}} = F \cap \mathbb{R}^n,$$

dotată cu operațiile cu vectori și scalari tipice — preluate de pe \mathbb{R}^n —, constituie un spațiu liniar real, pe care îl numim *realificatul* spațiului F .

Realificarea poate conduce la mulțimi neinteresante.

²¹ Adică, moștenește operațiile *pe componente* ale lui \mathbb{C}^n !

Exemplul 1.3. Fie $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ și $F = \mathbb{C}\bar{e}_1$, vezi [10, pag. 65, Problem 1]. Atunci,

$$\bar{x} = \lambda \cdot \bar{e}_1 = (a + b \cdot i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \cdot i \\ -b + a \cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \in F,$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, respectiv

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \in F \cap \mathbb{R}^2.$$

De aici, $F_{\mathbb{R}} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Observăm că vectorul \bar{e}_1 din acest exemplu nu verifică relația (1.33).

Lema 1.2. *Fie subspațiul liniar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Atunci, realificatul complexificatului său — notat $E_{\mathbb{C}\mathbb{R}}$ — este*

$$(E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = E.$$

Demonstrație. Conform (1.30), introducem vectorii $\bar{e}_j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Fie, de asemenea, $\bar{x} \in E_{\mathbb{C}}$ cu formula — $m \leq n$ —

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{e}_j = \sum_{j=1}^m (a_j + b_j \cdot i) \cdot \bar{e}_j = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_j x_n^j \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m b_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m b_j x_n^j \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_j x_n^j \end{pmatrix} + i \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right], \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Dacă impunem ca $\bar{x} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n$, atunci

$$\left((\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \right. \quad (1.34)$$

Dat fiind că vectorii $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m$, ale căror componente alcătuiesc coloanele matricei sistemului algebric (1.34), sunt liniar independenți peste \mathbb{R} , rangul matricei va fi maxim, adică m . În aceste condiții, sistemul (1.34) admite o singură soluție, cea nulă: $b_j = 0$ pentru orice $j \in \overline{1, m}$.

Am ajuns la

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m a_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_j x_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m a_j \cdot \bar{e}_j \in \text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} = E,$$

adică $\bar{x} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n \subseteq E$. Incluziunea inversă, $E \subseteq E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n$, este evidentă. \square

Lema 1.3. ([10, pag. 67]) *Fie subspațiul liniar $E \subseteq \mathbb{R}^n$ și $F \subseteq E_{\mathbb{C}}$ un subspațiu liniar al spațiului $E_{\mathbb{C}}$. Atunci,*

$$F_{\mathbb{R}} = F \cap E$$

este un subspațiu liniar al spațiului E .

Demonstrație. Plecând de la $E_{\mathbb{C}} = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$, unde $\bar{e}_j \in E$, $j \in \overline{1, m}$, presupunem că $F \subseteq \text{Span}_{\mathbb{C}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$ cu²² $k \leq m$.

La fel ca în lema anterioară — vezi (1.34) —, ajungem la $F_{\mathbb{R}} = F \cap \mathbb{R}^n \subseteq \text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\}$. Însă $\text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k\} \subseteq \text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} = E$, de unde $F \cap \mathbb{R}^n = (F \cap \mathbb{R}^n) \cap E = F \cap (\mathbb{R}^n \cap E) = F \cap E$. \square

Introducem aplicația $\sigma : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ cu formula

$$\sigma \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}, \quad z_j \in \mathbb{C}, j \in \overline{1, n},$$

unde $\bar{z} = a - b \cdot i$ — conjugare complexă — pentru orice $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$. Aici, $a, b \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăți

$$\begin{cases} \sigma(\alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y}) = \bar{\alpha} \cdot \sigma(\bar{x}) + \bar{\beta} \cdot \sigma(\bar{y}), \\ \sigma \circ \sigma = \text{id}_{\mathbb{C}^n}, \end{cases}$$

unde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ și $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{C}^n$ iar $\text{id}_{\mathbb{C}^n}$ este operatorul-identitate din \mathbb{C}^n . Adică, σ este o *involuție* a spațiului liniar complex \mathbb{C}^n [4, pag. 25]. În particular, aplicația σ este \mathbb{R} -liniară iar $\sigma|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ este operatorul-identitate din \mathbb{R}^n .

Lema 1.4. ([10, pag. 64]) *Fiind dat subspațiul liniar complex $F \subseteq \mathbb{C}^n$, există subspațiul liniar real $E \subseteq \mathbb{R}^n$ astfel încât $F = E_{\mathbb{C}}$ dacă și numai dacă $\sigma(F) \subseteq F$.*

Demonstrație. Partea “ \implies ”. Cum $F = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$, unde sistemul $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ constituie o bază a spațiului liniar real E , avem — $\sigma(\bar{e}_j) = \bar{e}_j$ —

²² Subspațiul $\text{Span}_{\mathbb{C}} \{\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_3 + \bar{e}_4\} \subseteq \text{Span}_{\mathbb{C}} \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ este 2-dimensional dar $k = 4$.

$$\sigma(\bar{f}) = \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j \cdot \sigma(\bar{e}_j) = \sum_{j=1}^m \bar{\lambda}_j \cdot \bar{e}_j \in \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\},$$

unde $\bar{f} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{e}_j \in F$.

Partea “ \Leftarrow ”. Pentru orice $\bar{f} \in F$, unde $\bar{f} = \bar{x} + i \cdot \bar{y}$ și $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$, avem $\sigma(\bar{f}) = \bar{x} + i \cdot \bar{y} = \bar{x} - i \cdot \bar{y} \in F$, respectiv

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot \bar{f} + \frac{1}{2} \cdot \sigma(\bar{f}) \in F \quad (1.35)$$

și

$$\bar{y} = \frac{1}{2i} \cdot \bar{f} + \frac{-1}{2i} \cdot \sigma(\bar{f}) \in F. \quad (1.36)$$

Fie $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\} \subset \mathbb{C}^n$ o bază a spațiului liniar F . Atunci, $\bar{f}_j = \bar{x}_j + i \cdot \bar{y}_j$, unde $\bar{x}_j, \bar{y}_j \in \mathbb{R}^n$ și $j \in \overline{1, m}$. Conform (1.35), (1.36), $\bar{x}_j, \bar{y}_j \in F$ pentru orice j .

Pentru $\bar{f} \in F$, putem scrie că — $\lambda_j \in \mathbb{C}$ —

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{f}_j = \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot \bar{x}_j + \sum_{j=1}^m (\lambda_j \cdot i) \cdot \bar{y}_j \in \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m\}.$$

Adică, setul de vectori $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m\}$, din \mathbb{R}^n , constituie un *sistem de generatori* pentru spațiul liniar complex F .

Fie $\{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_p\} \subseteq \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m\}$ un *sistem maximal* de vectori liniar independenți — peste \mathbb{R} —. Atunci, acest sistem va fi baza spațiului F , deci

$$F = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_p\} = E_{\mathbb{C}},$$

unde $E = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\bar{t}_1, \dots, \bar{t}_p\}$. \square

Un subspațiu liniar complex $F \subseteq \mathbb{C}^n$ este *decomplexificabil* [10, pag. 64] dacă există subspațiul liniar real $E \subseteq \mathbb{R}^n$ astfel încât $F = E_{\mathbb{C}}$.

Lema 1.5. Fie subspațiul decomplexificabil $F \subseteq \mathbb{C}^n$. Atunci, complexificatul realificalului său — notat $F_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ — este

$$(F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = F.$$

Demonstrație. Conform Lemei 1.2, cum $F = E_{\mathbb{C}}$, avem $F_{\mathbb{R}} = E_{\mathbb{C}\mathbb{R}} = E$. De aici, $(F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = E_{\mathbb{C}} = F$. \square

Operația de realificare poate fi aplicată oricărui subspațiu complex $F \subseteq \mathbb{C}^n$. Cum $F_{\mathbb{R}} \subseteq F$, deducem că

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{R}\mathbb{C}} &= (F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \text{Span}_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{R}}) \\ &\subseteq \text{Span}_{\mathbb{C}}(F) = F, \end{aligned} \quad (1.37)$$

vezi [10, pag. 344]. Exemplul 1.3 — via observația că $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ — ne arată că putem avea și incluziune strictă în (1.37).

Fie $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un subspațiu liniar real cu baza²³ \mathcal{S}_1 și $T : E \rightarrow E$ un operator liniar. Pe baza formulei (1.10), introducem operatorul liniar $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ astfel

$$T_{\mathbb{C}}(\bar{z}) = \sum_{j=1}^m z_j \cdot T(\bar{e}_j) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \mathbb{T} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

unde $\bar{z} = \sum_{j=1}^m z_j \cdot \bar{e}_j$ și $z_j \in \mathbb{C}$ pentru orice j . Operatorul $T_{\mathbb{C}}$ poartă numele de *complexificatul* operatorului T [10, pag. 65]. Având aceeași matrice de reprezentare, operatorii T și $T_{\mathbb{C}}$ au același polinom caracteristic [10, pag. 66].

Lema 1.6. ([10, pag. 65, Proposition]) *Operatorul liniar $Q : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ este complexificatul unui operator liniar $T : E \rightarrow E$ — adică, $Q = T_{\mathbb{C}}$ — dacă și numai dacă*

$$Q \circ \sigma = \sigma \circ Q, \quad Q = \sigma \circ Q \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ Q \circ \sigma.$$

Demonstrație. Observăm că, aplicația σ fiind o involuție, avem $\sigma^{-1} = \sigma$.

Partea “ \implies ”. Fie $\bar{z} = \sum_{j=1}^m z_j \cdot \bar{e}_j \in E_{\mathbb{C}}$, unde $\bar{e}_j \in E$. Atunci — reamintesc că $\sigma(\bar{e}_j) = \bar{e}_j$ și $T_{\mathbb{C}}(\bar{e}_j) = T(\bar{e}_j)$ pentru orice j —,

$$\begin{aligned} (\sigma \circ Q \circ \sigma)(\bar{z}) &= (\sigma \circ T_{\mathbb{C}} \circ \sigma)(\bar{z}) = (\sigma \circ T_{\mathbb{C}}) \left(\sum_{j=1}^m \bar{z}_j \cdot \bar{e}_j \right) = \sigma \left(\sum_{j=1}^m \bar{z}_j \cdot T_{\mathbb{C}}(\bar{e}_j) \right) \\ &= \sigma \left(\sum_{j=1}^m \bar{z}_j \cdot T(\bar{e}_j) \right) = \sum_{j=1}^m \bar{\bar{z}}_j \cdot T(\bar{e}_j) = \sum_{j=1}^m z_j \cdot T(\bar{e}_j) = T_{\mathbb{C}}(\bar{z}) \\ &= Q(\bar{z}). \end{aligned}$$

Partea “ \impliedby ”. Să arătăm că $Q(E) \subseteq E$. Pentru $\bar{z} = Q(\bar{x}) \in E_{\mathbb{C}}$, unde $\bar{x} \in E$, avem²⁴

$$\sigma(\bar{z}) = (\sigma \circ Q)(\bar{x}) = (Q \circ \sigma)(\bar{x}) = Q(\bar{x}) = \bar{z},$$

deci $\bar{z} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n = E_{\mathbb{C}\mathbb{R}} = E$. Am folosit Lema 1.2.

Fie $T = Q|_E : E \rightarrow E$. Cum $E_{\mathbb{C}} = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ și $\bar{e}_j \in E$, putem scrie că

$$\begin{aligned} Q(\bar{z}) &= Q \left(\sum_{j=1}^m z_j \cdot \bar{e}_j \right) = \sum_{j=1}^m z_j \cdot T(\bar{e}_j) = T_{\mathbb{C}} \left(\sum_{j=1}^m z_j \cdot \bar{e}_j \right) \\ &= T_{\mathbb{C}}(\bar{z}), \quad \bar{z} \in E_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Am obținut că

²³ Introdusă la pagina 1.

²⁴ $\sigma(\bar{e}) = \bar{e}$ pentru orice $\bar{e} \in E$.

$$Q = (Q|_E)_\mathbb{C},$$

adică Q este complexificatul restricției sale la spațiul liniar E . \square

Lema 1.7. *Dacă operatorii liniari $Q_k : E_\mathbb{C} \rightarrow E_\mathbb{C}$ sunt complexificările operatorilor liniari (reali) $T_k : E \rightarrow E$, unde $k \in \{1, 2\}$, atunci,*

$$Q_1 \circ Q_2 = (T_1 \circ T_2)_\mathbb{C}.$$

Demonstrație. Conform (1.38), dacă $\mathbb{T}_k \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ este matricea de reprezentare în \mathcal{S}_1 a operatorilor T_k și $(T_k)_\mathbb{C}$, atunci $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cdot \mathbb{T}_2$ este matricea de reprezentare în \mathcal{S}_1 a operatorilor $T_1 \circ T_2$ și $(T_1 \circ T_2)_\mathbb{C}$.

Pe de altă parte, matricea de reprezentare \mathbb{Q} în \mathcal{S}_1 a operatorului $Q_1 \circ Q_2$ este produsul matricelor de reprezentare ale acestor operatori, adică

$$\mathbb{Q} = \mathbb{T}_1 \cdot \mathbb{T}_2.$$

Concluzia rezultă din (1.38). \square

Capitolul 2

Teoreme de descompunere

2.1 Suma directă de subspații vectoriale. Suma directă de operatori

Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ un spațiu liniar peste corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ cu baza \mathcal{S}_1 — introdusă la pagina 1 —.

Lema 2.1. *Dacă $V \subseteq E$ este un \mathbb{K} -subspațiu liniar¹, atunci există $W \subseteq E$ alt \mathbb{K} -subspațiu liniar astfel încât $V \cap W = \{0_E\}$ și orice element $\bar{e} \in E$ să se scrie sub forma*

$$\bar{e} = \bar{v} + \bar{w}, \quad \bar{v} \in V, \bar{w} \in W. \quad (2.1)$$

Demonstrație. Renumerotând, eventual, vectorii din \mathcal{S}_1 , putem presupune că $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\}$, unde $h \leq m$. Atunci, fie — pentru $h < m$ —

$$W = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_{h+1}, \dots, \bar{e}_m\}. \quad (2.2)$$

Dacă $h = m$, adică $V = E$, luăm $W = \{0_E\}$.

Fie $\bar{e} \in E$. Au loc relațiile

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \sum_{j=1}^m k_j \cdot \bar{e}_j \quad (k_j \in \mathbb{K} \text{ pentru orice } j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^h k_j \cdot \bar{e}_j + \sum_{j=h+1}^m 0 \cdot \bar{e}_j \right) + \left(\sum_{j=1}^h 0 \cdot \bar{e}_j + \sum_{j=h+1}^m k_j \cdot \bar{e}_j \right) \\ &= \bar{v} + \bar{w}. \end{aligned}$$

În particular, dacă $\bar{e} \in V \cap W$, putem scrie că

¹ Adică, operațiile cu *scalari* folosesc numai elemente (scalari) din corpul \mathbb{K} .

$$\bar{e} = \sum_{j=1}^h k_j \cdot \bar{e}_j = \sum_{j=h+1}^m k_j \cdot \bar{e}_j,$$

respectiv

$$\sum_{j=1}^h k_j \cdot \bar{e}_j + \sum_{j=h+1}^m (-k_j) \cdot \bar{e}_j = 0.$$

Vectorii $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ fiind liniar independenți, rezultă că toate coordonatele vectorului \bar{e} în baza \mathcal{S}_1 sunt nule, deci $\bar{e} = 0_E$.

Descompunerea (2.1) este *unică* datorită faptului că $V \cap W = \{0_E\}$. Într-adevăr, în caz contrar am avea

$$\begin{aligned} \bar{e} = \bar{v}_1 + \bar{w}_1 &= \sum_{j=1}^m k_j^{(1)} \cdot \bar{e}_j \\ &= \bar{v}_2 + \bar{w}_2 = \sum_{j=1}^m k_j^{(2)} \cdot \bar{e}_j, \end{aligned}$$

unde $k_j^{(1)}, k_j^{(2)} \in \mathbb{K}$ pentru orice j , respectiv

$$0 = (\bar{v}_1 - \bar{v}_2) + (\bar{w}_1 - \bar{w}_2) \quad (2.3)$$

$$= \left[\sum_{j=1}^h (k_j^{(1)} - k_j^{(2)}) \cdot \bar{e}_j \right] + \left[\sum_{j=h+1}^m (k_j^{(1)} - k_j^{(2)}) \cdot \bar{e}_j \right]. \quad (2.4)$$

Concluzia poate fi obținută în două moduri. Mai întâi, conform (2.3), deducem că

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{w}_2 - \bar{w}_1 \in V \cap W,$$

deci

$$\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \quad \text{și} \quad \bar{w}_1 = \bar{w}_2. \quad (2.5)$$

Aici nu am ținut seama de dimensiunea spațiului ambient E !

Pe de altă parte, via (2.4), liniar independența vectorilor $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ ne conduce la $k_j^{(1)} = k_j^{(2)}$ pentru orice j , adică tot la (2.5). \square

Lema 2.2. *În contextul Lemei 2.1, dacă V este un subspațiu propriu², atunci spațiul W nu este unic.*

Demonstrație. În demonstrația anterioară am arătat, via formula (2.2), existența unui subspațiu W pentru care să aibă loc descompunerea (2.1).

² Adică, $h < m$. Vezi și [10, pag. 33].

Putem construi *alt* subspațiu, notat W_1 , cu aceleași proprietăți ca W . Mai precis, fie — pentru $h < m - 1$ —

$$W_1 = \text{Span}_{\mathbb{K}} \{\bar{e}_h + \bar{e}_{h+1}, \bar{e}_{h+2}, \bar{e}_{h+3}, \dots, \bar{e}_m\}.$$

Evident, spațiul V își păstrează formula, $V = \text{Span}_{\mathbb{K}} \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$. Când $h = m - 1$, luăm $W_1 = \mathbb{K}(\bar{e}_h + \bar{e}_{h+1})$.

Se observă că

$$\bar{e}_h + \bar{e}_{h+1} \in W_1 \setminus W, \quad \bar{e}_{h+1} \in W \setminus W_1,$$

deci subspațiile W și W_1 sunt distincte. \square

Subspațiul W constituie un *complement*³ al subspațiului V iar existența descompunerii (2.1) se notează cu expresia $E = V \oplus W$ [8, pag. 29, Theorem], numită *suma directă* a spațiilor V și W . Prin partiționarea bazei \mathcal{S}_1 , putem scrie că⁴

$$\bar{e} = \sum_{r=1}^s \left[\sum_{j=h_r+1}^{h_{r+1}} k_j^{(r)} \cdot \bar{e}_j \right] = \sum_{r=1}^s \left[\sum_{j \leq h_r} 0 \cdot \bar{e}_j + \sum_{j=h_r+1}^{h_{r+1}} k_j^{(r)} \cdot \bar{e}_j + \sum_{j \geq h_{r+1}+1} 0 \cdot \bar{e}_j \right],$$

unde

$$\{1, \dots, m\} = \{h_1 + 1, \dots, h_2\} \cup \{h_2 + 1, \dots, h_3\} \cup \dots \cup \{h_s + 1, \dots, h_{s+1}\}$$

și $h_1 = 0 < h_2 < h_3 < \dots < h_s < h_{s+1} = m$. De unde,

$$\begin{aligned} E &= V_1 \oplus (V_2 \oplus (\dots \oplus (V_{s-1} \oplus V_s) \dots)) \\ &= V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Lema 2.3. *Dacă $V_1, V_2, \dots, V_s \subseteq E$, unde $s \geq 2$, sunt \mathbb{K} -subspații liniare și orice egalitate de forma*

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \dots + \bar{v}_s = 0_E, \quad \bar{v}_i \in V_i, \quad i \in \overline{1, s},$$

ne conduce la $\bar{v}_i = 0_E$ pentru orice $1 \leq i \leq s$, atunci subspațiile au în comun, două câte două, numai vectorul nul. Reciproca este adevărată doar pentru $s = 2$.

Demonstrație. Dacă ar exista $i \neq j \in \overline{1, s}$ astfel încât $V_i \cap V_j \neq \{0_E\}$, atunci, luând $\bar{u} \in (V_i \cap V_j) \setminus \{0_E\}$, am putea introduce vectorii $\bar{v}_i = \bar{u}$, $\bar{v}_j = -\bar{u}$, respectiv $\bar{v}_k = 0_E$ pentru orice $k \neq i, j$. Evident, $\sum_{r=1}^s \bar{v}_r = 0$, ceea ce ar contrazice ipoteza.

Pentru partea a doua, să presupunem că $s \geq 3$. Subspațiile $V_1 = \mathbb{K}(\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$, $V_2 = \mathbb{K}\bar{e}_1$ și $V_3 = \mathbb{K}\bar{e}_2$ au, două câte două, în comun doar vectorul nul chiar dacă are loc relația

³ Mai precis, un *complement algebraic*, vezi [6, pag. 45, Definiția 2.1.6].

⁴ Facem convenția ca orice sumă cu zero termeni să fie nulă.

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^s \bar{v}_r &= \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3 + 0_E + \cdots + 0_E \\
&= (\bar{e}_1 + \bar{e}_2) + (-\bar{e}_1) + (-\bar{e}_2) + 0_E + \cdots + 0_E \\
&= 0_E.
\end{aligned}$$

În sfârșit, dacă $s = 2$ și ar exista $\bar{v}_i \in V_i \setminus \{0_E\}$ cu $\bar{v}_1 + \bar{v}_2 = 0$, atunci am ajunge la

$$\bar{u} = \bar{v}_1 = -\bar{v}_2 \in (V_i \cap V_j) \setminus \{0_E\},$$

ceea ce ar contrazice ipoteza. \square

Lema 2.4. ([12, pag. 204, Propoziția 2.2]) *Fie $V_1, V_2, \dots, V_s \subseteq E$, unde $s \geq 2$, \mathbb{K} -subspații liniare. Atunci, orice egalitate de forma*

$$\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \cdots + \bar{v}_s = 0_E, \quad \bar{v}_i \in V_i, \quad i \in \overline{1, s},$$

ne va conduce la $\bar{v}_i = 0_E$ pentru orice $1 \leq i \leq s$ dacă și numai dacă

$$V_i \cap \text{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ \bigcup_{j \in \overline{1, s} \setminus \{i\}} V_j \right\} = \{0_E\}$$

pentru orice $1 \leq i \leq s$.

Demonstrație. Fie $\bar{v}_i \in \left(V_i \cap \text{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ \bigcup_{j \in \overline{1, s} \setminus \{i\}} V_j \right\} \right) \setminus \{0_E\}$ pentru un anumit i . Atunci, există vectorii $\mathscr{W} = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_t\} \subset \text{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ \bigcup_{j \in \overline{1, s} \setminus \{i\}} V_j \right\}$, unde $t \geq 1$, și scalarii $(\alpha_{\bar{w}_q})_{q \in \overline{1, t}} \subset \mathbb{K}$, nu toți nuli, astfel încât⁵

$$\begin{aligned}
\bar{v}_i &= \sum_{q=1}^t \alpha_{\bar{w}_q} \bar{w}_q = \sum_{\bar{w} \in \mathscr{W}} \alpha_{\bar{w}} \bar{w} = \sum_{j \in \overline{1, s} \setminus \{i\}} \left(\sum_{\bar{w} \in \mathscr{W} \cap V_j} \alpha_{\bar{w}} \bar{w} \right) \\
&= \sum_{j \in \overline{1, s} \setminus \{i\}} (-\bar{v}_j),
\end{aligned}$$

unde $\bar{v}_j \in V_j$ pentru orice $j \neq i$ și cel puțin unul dintre acești vectori este nenul.

Am obținut că

$$\bar{v}_i + \sum_{j \in \overline{1, s} \setminus \{i\}} \bar{v}_j = 0_E.$$

Reciproc, dacă $\bar{v}_i \neq 0_E$ pentru un anumit i , atunci

⁵ Reamintesc convenția ca orice sumă de vectori cu 0 termeni să aibă valoarea 0_E .

$$\bar{v}_i = \sum_{j \in \overline{1,s} \setminus \{i\}} (-\bar{v}_j) \in \text{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ \bigcup_{j \in \overline{1,s} \setminus \{i\}} V_j \right\},$$

de unde $\{\bar{v}_i\} \subset V_i \cap \text{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ \bigcup_{j \in \overline{1,s} \setminus \{i\}} V_j \right\} \neq \{0_E\}$. \square

Păstrând contextul Lemei 2.1, fie $T : V \rightarrow V$ un operator liniar cu matricea de reprezentare \mathbb{T}_V , unde

$$(T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_h)) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_h) \mathbb{T}_V, \quad \mathbb{T}_V \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K}).$$

Operatorul T poate fi *prelungit cu zero* la întregul spațiu E . Mai precis, noul operator — notat tot cu T — verifică relația

$$(T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_h) T(\bar{e}_{h+1}) \cdots T(\bar{e}_m)) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_h \bar{e}_{h+1} \cdots \bar{e}_m) \mathbb{T},$$

unde⁶

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_V & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & O_{m-h} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K}).$$

Mai departe, fiind dați operatorii liniari $T : V \rightarrow V$ și $P : W \rightarrow W$, cu matricele \mathbb{T}_V și \mathbb{P}_W , deducem că suma prelungirilor lor cu zero în spațiul E este un operator liniar $M : E \rightarrow E$ a cărui matrice de reprezentare în baza \mathcal{S}_1 are formula

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &= \mathbb{T} + \mathbb{P} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_V & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & O_{m-h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{P}_W \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{T}_V & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{P}_W \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dacă spațiul E este descompus în suma directă a spațiilor V_1, \dots, V_s — vezi (2.6) —, atunci, fiind dați operatorii liniari $T_r : V_r \rightarrow V_r$ de matrice \mathbb{T}_{V_r} , unde $r \in \overline{1,s}$, suma prelungirilor lor cu zero în spațiul E este operatorul $T : E \rightarrow E$ cu matricea

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_{V_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{T}_{V_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{T}_{V_s} \end{pmatrix}.$$

Acesta se notează cu expresia $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$ și se numește *suma directă* a operatorilor $(T_r)_{r \in \overline{1,s}}$ [10, pag. 41].

Lema 2.5. *Fie $T : E \rightarrow E$ un operator liniar și $E = V \oplus W$. Dacă $T(V) \subseteq V$ și $T(W) \subseteq W$, atunci există operatorii \mathbb{K} -liniari $T_1 : V \rightarrow V$ și $T_2 : W \rightarrow W$ astfel încât*

⁶ $O_{p,q}$ reprezintă matricea-nulă cu p linii și q coloane. Aici, $O_p = O_{p,p}$.

$$T = T_1 \oplus T_2.$$

Demonstrație. Pentru $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\}$, $W = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_{h+1}, \dots, \bar{e}_m\}$, deducem că

$$T(\bar{e}_j) \in \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\}, \quad j \in \overline{1, h},$$

și

$$T(\bar{e}_k) \in \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_{h+1}, \dots, \bar{e}_m\}, \quad k \in \overline{h+1, m},$$

respectiv matricea de reprezentare a operatorului în raport cu baza \mathcal{S}_1 are forma

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} A & O_{h, m-h} \\ O_{m-h, h} & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{m-h}(\mathbb{K}). \quad (2.7)$$

Avem $T_1 = T|_V$ cu matricea $\mathbb{T}_V = A$ și $T_2 = T|_W$ cu matricea $\mathbb{T}_W = B$. \square

Lema 2.6. Fie $E = V \oplus W \subseteq \mathbb{C}^n$ un spațiu liniar peste corpul \mathbb{K} și operatorul liniar $T : E \rightarrow E$ astfel încât $T(V) \subseteq V$ și $T(W) \subseteq W$. Dacă $\lambda \in \mathbb{K}$ este o valoare proprie a operatorului T , atunci λ este valoare proprie pentru cel puțin unul dintre operatorii

$$T|_V, T|_W.$$

Demonstrație. Fie $\bar{e} = \bar{v} + \bar{w} \in E$, unde $\bar{v} \in V$ și $\bar{w} \in W$, un vector propriu corespunzător valorii proprii λ .

Din relațiile

$$\begin{aligned} T(\bar{e}) &= T(\bar{v}) + T(\bar{w}) = T|_V(\bar{v}) + T|_W(\bar{w}) \\ &= \lambda \cdot \bar{e} \\ &= \lambda \cdot \bar{v} + \lambda \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

deducem că

$$\begin{aligned} T|_V(\bar{v}) - \lambda \cdot \bar{v} &= \lambda \cdot \bar{w} - T|_W(\bar{w}) \quad (\in V \cap W) \\ &= 0_E, \end{aligned}$$

respectiv

$$T|_V(\bar{v}) = \lambda \cdot \bar{v}, \quad T|_W(\bar{w}) = \lambda \cdot \bar{w}.$$

Cum $\bar{e} \neq 0_E$, cel puțin unul dintre vectorii \bar{v} , \bar{w} este nenul. Presupunem că $\bar{w} \neq 0$. Atunci, \bar{w} este eigenvector pentru valoarea proprie λ a operatorului corespunzător, adică $T|_W$. \square

Exemplul 2.1. În contextul Lemei 2.2, fie $T : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^6$ operatorul liniar bijectiv dat de relațiile

$$\begin{aligned} T(\bar{i}_1) &= \bar{i}_2, & T(\bar{i}_2) &= \bar{i}_1, & T(\bar{i}_3) &= \bar{i}_3, \\ T(\bar{i}_4) &= \bar{i}_4, & T(\bar{i}_5) &= \bar{i}_6, & T(\bar{i}_6) &= \bar{i}_5, \end{aligned}$$

unde sistemul $\mathcal{S}_1 = \{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_6\}$ desemnează baza canonică (1.11). Avem

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \mathbb{T} = 1.$$

Introducem subspațiile liniare

$$V = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3\}, \quad W = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{i}_4, \bar{i}_5, \bar{i}_6\}, \quad W_1 = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{i}_3 + \bar{i}_4, \bar{i}_5, \bar{i}_6\}.$$

Atunci, avem

$$(E =) \quad \mathbb{R}^6 = V \oplus W = V \oplus W_1$$

și — $T(\bar{i}_3 + \bar{i}_4) = \bar{i}_3 + \bar{i}_4$ —

$$T(V) = V, \quad T(W) = W, \quad T(W_1) = W_1.$$

Cu alte cuvinte, subspațiul V poate admite mai multe complemente, fiecare dintre acestea invariabil de către operatorul T !

2.2 Teorema $N + M$

Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ un spațiu liniar m -dimensional peste corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ și $T : E \rightarrow E$ un operator \mathbb{K} -liniar.

Introducem mulțimile⁷

$$K_i(T) = \text{Ker}(T^i), \quad L_i(T) = \text{Im}(T^i), \quad i \in \mathbb{N}.$$

Aici, $T^0 = I$, unde I este operatorul-identitate din $L(E, E)$, și $T^i = T \circ T \circ \dots \circ T$ — i factori T —.

Lema 2.7. Pentru orice $i \geq 0$, mulțimile $K_i(T)$ și $L_i(T)$, împreună cu operațiile liniare de pe E , sunt spații liniare peste corpul \mathbb{K} .

⁷ Fiind dat operatorul liniar $P : E \rightarrow E$, mulțimile $\text{Ker} P = \{\bar{v} | P(\bar{v}) = 0_E\}$ și $\text{Im} P = \{P(\bar{v}) | \bar{v} \in E\} = P(E)$, dotate cu operațiile spațiului ambient E , sunt spații liniare peste corpul \mathbb{K} [8, pag. 88].

Demonstrație. Aplicația $T^i : E \rightarrow E$ fiind un operator liniar, nucleul⁸ (Ker) și imaginea⁹ sa (Im) sunt subspații liniare ale spațiului E . \square

Lema 2.8. *Mulțimile*

$$N = \bigcup_{i \geq 0} K_i(T), \quad M = \bigcap_{i \geq 0} L_i(T)$$

sunt subspații liniare ale spațiului E .

Demonstrație. Fie $\bar{x} \in K_i(T)$, adică $T^i(\bar{x}) = 0$. Avem $T^{i+1}(\bar{x}) = (T \circ T^i)(\bar{x}) = T(T^i(\bar{x})) = T(0_E) = 0_E$, de unde $\bar{x} \in K_{i+1}(T)$. De aici,

$$K_0(T) = \text{Ker } I = \{0_E\} \subseteq K_1(T) \subseteq \cdots \subseteq K_i(T) \subseteq K_{i+1}(T) \subseteq \cdots \subseteq E. \quad (2.8)$$

Fie $\bar{y} \in L_{i+1}(T)$, adică $\bar{y} = T^{i+1}(\bar{x})$ pentru un anumit $\bar{x} \in E$. Avem $\bar{y} = (T^i \circ T)(\bar{x}) = T^i(T(\bar{x})) = T^i(\bar{z})$, de unde $\bar{y} \in L_i(T)$. De aici,

$$L_0(T) = \text{Im } I = E \supseteq L_1(T) \supseteq \cdots \supseteq L_i(T) \supseteq L_{i+1}(T) \supseteq \cdots \supseteq \{0_E\}. \quad (2.9)$$

Facem următoarea observație: dacă $V \subset E$ este un subspațiu liniar propriu, de bază \mathcal{S} , al spațiului liniar E iar $\bar{e} \in E \setminus V$, atunci vectorii din sistemul $\mathcal{B} = \mathcal{S} \cup \{\bar{e}\}$ sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{K} . Într-adevăr, cum $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}(\mathcal{S})$, dacă \bar{e} ar fi o combinație liniară de elemente din \mathcal{S} , deci $\bar{e} \in \text{Span}_{\mathbb{K}}(\mathcal{S})$, atunci am ajunge la $\bar{e} \in V$, adică la o contradicție.

Pe baza observației anterioare, deducem că în niciunul din șirurile de spații (2.8), (2.9) nu putem avea o *infinițate* de incluziuni stricte. O asemenea situație ar conduce fie la o *infinițate* de vectori $\bar{x}_i \in K_{i+1}(T) \setminus K_i(T) \subset E$ fie la o *infinițate* de vectori $\bar{y}_i \in L_i(T) \setminus L_{i+1}(T) \subset E$ care să fie liniar independenți peste corpul \mathbb{K} . Numai că numărul maxim de elemente liniar independente din E este m !

Deducția anterioară poate fi îmbunătățită. Astfel, să presupunem că avem $K_t(T) = K_{t+1}(T)$ pentru un anumit $t \in \mathbb{N}^*$. Atunci, $K_{t+1}(T) = K_{t+2}(T)$. Pentru a proba acest fapt, fie $\bar{x} \in K_{t+2}(T)$. Atunci, $0_E = T^{t+2}(\bar{x}) = T^{t+1}(T(\bar{x}))$, de unde $T(\bar{x}) \in K_{t+1}(T)$, respectiv $T(\bar{x}) \in K_t(T)$. Am ajuns la $T^{t+1}(\bar{x}) = T^t(T(\bar{x})) = 0_E$, adică $\bar{x} \in K_{t+1}(T)$. În concluzie, $K_{t+2}(T) \subseteq K_{t+1}(T)$. Incluziunea inversă provine din (2.8). Mai departe, să presupunem că avem $L_t(T) = L_{t+1}(T)$ pentru un anumit $t \in \mathbb{N}^*$. Atunci, $L_{t+1}(T) = L_{t+2}(T)$. Pentru a proba acest fapt, fie $\bar{x} = T^{t+1}(\bar{y}) \in L_{t+1}(T)$. Atunci, $\bar{x} = T(T^t(\bar{y})) = T(\bar{z})$, unde $\bar{z} \in L_t(T) = L_{t+1}(T)$. Avem $\bar{z} = T^{t+1}(\bar{v})$, de unde $\bar{x} = T(\bar{z}) = T^{t+2}(\bar{v})$. Am ajuns la $\bar{x} \in L_{t+2}(T)$. Incluziunea inversă provine din (2.9).

Așadar, există numerele naturale p, r pentru care

$$\begin{cases} K_i(T) = K_{i+1}(T) = K_{i+2}(T) = \cdots, \\ L_j(T) = L_{j+1}(T) = L_{j+2}(T) = \cdots, \end{cases} \quad (2.10)$$

⁸ În limba engleză, *kernel* [13, pag. 16]. Sau *spațiul nul* al operatorului T , vezi [13, pag. 16], [8, ibid.].

⁹ În limba engleză, *image* [10, pag. 34].

unde $i \geq p$ și $j \geq r$, și

$$K_0(T) \subsetneq K_1(T) \subsetneq \cdots \subsetneq K_p(T), \quad (2.11)$$

respectiv

$$L_0(T) \supsetneq L_1(T) \supsetneq \cdots \supsetneq L_r(T).$$

De aici, $N = K_p(T)$ și $M = L_r(T)$. Concluzia rezultă din Lema 2.7. \square

Lema 2.9. În contextul Lemei 2.8,

$$T(N) \subseteq N, \quad T(M) \subseteq M.$$

Demonstrație. Fie $\bar{e} \in N$. Atunci, fixăm $i \geq 0$ astfel încât $\bar{e} \in K_i(T)$. În cazul $i \geq 1$ au loc relațiile

$$\begin{aligned} T^i(T(\bar{e})) &= T^{i+1}(\bar{e}) = T(T^i(\bar{e})) = T(0_E) \\ &= 0_E, \end{aligned}$$

din care deducem că $T(\bar{e}) \in K_i(T) \subseteq N$.

Mai departe, fie $\bar{e} \in M$. Atunci, via (2.10), $M = T^r(E)$, deci există $\bar{f} \in E$ cu proprietatea că $\bar{e} = T^r(\bar{f})$. Avem

$$T(\bar{e}) = T^{r+1}(\bar{f}) \in \text{Im } T^{r+1} = \text{Im } T^r = M,$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Lema 2.10. ([10, pag. 333, Theorem]) În contextul Lemei 2.9, fie $P : E \rightarrow E$ un operator \mathbb{K} -liniar care comută cu T , adică

$$T \circ P = P \circ T.$$

Atunci,

$$P(N) \subseteq N. \quad (2.12)$$

Demonstrație. Din $T \circ P = P \circ T$ rezultă că $T^2 \circ P = T \circ (T \circ P) = T \circ (P \circ T) = (T \circ P) \circ T = (P \circ T) \circ T = P \circ T^2$, respectiv

$$T^k \circ P = P \circ T^k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $\bar{x} \in N = K_p(T)$ — vezi (2.10) —. Au loc relațiile

$$T^p(P(\bar{x})) = (T^p \circ P)(\bar{x}) = (P \circ T^p)(\bar{x}) = P(0_E) = 0_E,$$

adică $P(\bar{x}) \in K_p(T)$. \square

Teorema 2.1. ([10, pag. 332, Lemma]) Spațiul liniar E admite descompunerea

$$E = N \oplus M. \quad (2.13)$$

Demonstrație. Fie $T_1 = T|_M$. Conform Lemei 2.9, operatorul $T_1 : M \rightarrow M$ este bine-definit. Mai mult, ținând seama de (2.10), putem scrie că

$$M = T^r(E) = T^{r+1}(E) = T(T^r(E)) = T(M) = T_1(M),$$

adică T_1 este *surjectiv*. Deoarece spațiul liniar M este finit dimensional iar operatorul T_1 este \mathbb{K} -liniar, deducem că T_1 este *bijectiv*, deci și *injectiv*¹⁰.

Cum operatorul T_1 este bijectiv, *toate puterile sale sunt bijectiv*, adică $\text{Ker}(T_1^v) = \{0_E\}$, unde $v \geq 0$. Așadar, *pentru orice $\bar{e} \in M \setminus \{0_E\}$, șirul $(T_1^v(\bar{e}))_{v \geq 1}$ conține doar vectori nenuli din M* . În particular, fie $\bar{x} \in N \cap M \setminus \{0_E\}$. Atunci, cum $\bar{x} \in N$, există $i \geq 1$ astfel încât $\bar{x} \in K_i(T)$, adică $T^i(\bar{x}) = 0_E$. Deoarece $\bar{x} \in M \setminus \{0_E\}$, relațiile

$$0_E = T^i(\bar{x}) = T_1^i(\bar{x}) \neq 0_E$$

ne conduc la o contradicție. Am obținut că

$$N \cap M = \{0_E\}.$$

Rămâne să stabilim că are loc descompunerea (2.1). Fie $\bar{e} \in E$. Atunci, $T^r(\bar{e}) \in M$. Cum¹¹ $M = T_1^r(M)$, există și este unic vectorul $\bar{w} \in M$ cu proprietatea că

$$T^r(\bar{e}) = T_1^r(\bar{w}).$$

Luând $\bar{v} = \bar{e} - \bar{w}$, observăm că $T^r(\bar{v}) = T^r(\bar{e}) - T^r(\bar{w}) = T^r(\bar{e}) - T_1^r(\bar{w}) = 0_E$, adică $\bar{v} \in K_r(T) \subseteq N$. \square

Lema 2.11. *În contextul Teoremei 2.1,*

$$T = T_1 \oplus T_2, \quad (2.14)$$

unde $T_1 = T|_N$ și $T_2 = T|_M$. De asemenea, există $p \in \mathbb{N}^*$ astfel ca

$$\mathbb{T}_N^p = O_h, \quad (2.15)$$

unde h este dimensiunea \mathbb{K} -subspațiului N .

Demonstrație. Conform (2.10), fixăm $p \geq 1$ pentru care $K_i(T) = K_p(T)$ oricare ar fi $i \geq p$. Atunci, $N = K_p(T)$.

Formulele (1.24), (1.25) ne conduc la — reamintesc relația (1.16) —

¹⁰ Vezi [10, pag. 35, 327, Proposition 3] sau [8, pag. 62, Theorem 2].

¹¹ Operatorul T_1^r este bijectiv!

$$0_E = T^p(\bar{v}) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \left[\begin{pmatrix} \mathbb{T}_N & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{T}_M \end{pmatrix}^p \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

unde $N = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\}$, $M = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_{h+1}, \dots, \bar{e}_m\}$ și $\bar{v} = \sum_{i=1}^h x_i \cdot \bar{e}_i + \sum_{i=h+1}^m 0 \cdot \bar{e}_i \in N$, respectiv la identitatea dublă

$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}_N & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{T}_M \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_N^p & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{T}_M^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

valabilă pentru orice $x_1, \dots, x_h \in \mathbb{K}$.

Singura matrice care poate fi pusă în locul lui \mathbb{T}_N^p în (2.16) pentru a satisface identitatea este matricea-nulă, O_h . Relația (1.18) ne arată că formula (2.15) este independentă de baza spațiului N . \square

Operatorul liniar $T_1 : N \rightarrow N$ din Lema 2.11 este numit *nilpotent* [10, pag. 109].

2.3 Teorema de descompunere primară

Lema 2.12. Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ un \mathbb{K} -spațiu liniar de dimensiune $m \leq n$ și $T : E \rightarrow E$ un operator \mathbb{K} -liniar cu valoarea proprie $\lambda_0 \in \mathbb{K}$.

Presupunem că T verifică proprietatea ($\mathcal{H}\mathcal{S}$): sau ecuația caracteristică

$$p_T(\lambda) = 0$$

are toate rădăcinile reale sau

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Fie subspațiul liniar¹²

$$V = \bigcup_{k \geq 0} \text{Ker}(T - \lambda_0 \cdot I)^k$$

¹² Subspațiul V se mai numește și λ_0 -eigenspațiul generalizat al operatorului T iar mulțimea $\text{Ker}(T - \lambda_0 \cdot I) \subseteq V$ poartă numele de λ_0 -eigenspațiul operatorului T [10, pag. 110].

și W un complement al acestuia cu proprietatea că $T(W) \subseteq W$. Atunci, sau $W = \{0_E\}$ sau polinomul caracteristic $p_T(\lambda)$ al operatorului T admite un zero $\lambda_1 \neq \lambda_0$ în \mathbb{K} .

Demonstrație. Începem prin a arăta că situația din ipoteză — existența subspațiilor V, W — are loc întotdeauna.

Pasul întâi. Aplicând Teorema 2.1 și Lema 2.9 operatorului liniar $T - \lambda_0 \cdot I$, deducem că V este un subspațiu liniar al spațiului E care este invariant de $T - \lambda_0 \cdot I$. De asemeni, subspațiul V admite un complement, și anume

$$W = \bigcap_{k \geq 0} \text{Im} (T - \lambda_0 \cdot I)^k,$$

care să fie invariant la acțiunea lui $T - \lambda_0 \cdot I$.

Pasul al doilea. Facem observația că, fiind dat $\mu \in \mathbb{K}$, operatorul liniar $T - \mu \cdot I$ invariază un subspațiu liniar $H \subseteq E$ dacă și numai dacă și operatorul T invariază subspațiul în cauză. Într-adevăr, dacă $(T - \mu \cdot I)(\bar{e}) = T(\bar{e}) - \mu \cdot \bar{e} \in H$ pentru un anumit $\bar{e} \in H$, atunci $T(\bar{e}) = [T(\bar{e}) - \mu \cdot \bar{e}] + \mu \cdot \bar{e} \in H$, adică $T(H) \subseteq H$. Afirmția reciprocă este evidentă: $(T - \mu \cdot I)(H) \subseteq H$ când $T(H) \subseteq H$.

În consecință, spațiile V, W , care sunt invariante de $T - \lambda_0 \cdot I$, vor fi invariante și de operatorul T , respectiv de toți operatorii $(T - \mu \cdot I)_{\mu \in \mathbb{K}}$. Am ajuns, așadar, la cele două descompuneri (2.13), (2.14) — bazată pe Lema 2.5 —.

Revenind la firul principal al demonstrației, ipotezele ne situează în contextul Lemei 2.5. Pentru $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\}$, $W = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_{h+1}, \dots, \bar{e}_m\}$, matricea de reprezentare a operatorului T în baza $\mathcal{S}_1 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\}$ a spațiului E are forma (2.7). În particular, dacă $h < m$ — vezi (2.7) — și $\lambda \in \mathbb{K}$ este o eigenvaloare a operatorului T , atunci matricea de reprezentare a operatorului $T - \lambda \cdot I$ în baza \mathcal{S}_1 are forma

$$\mathbb{T} - \lambda \cdot I_m = \mathbb{T} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & I_{m-h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \lambda \cdot I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B - \lambda \cdot I_{m-h} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

de unde

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} A - \lambda \cdot I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B - \lambda \cdot I_{m-h} \end{vmatrix} \\ &= \det(A - \lambda \cdot I_h) \cdot \det(B - \lambda \cdot I_{m-h}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Fie $\bar{v} \in V$, unde $\bar{v} = \sum_{i=1}^h x_i \cdot \bar{e}_i$. Conform (2.10), există numărul $p \geq 1$ astfel încât $V = K_p(T - \lambda_0 \cdot I)$.

Relațiile (2.16) devin — vezi (2.17) —

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda_0 \cdot I_h)^p & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & (B - \lambda_0 \cdot I_{m-h})^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

La fel ca în demonstrația Lemei 2.11, pentru ca identitatea (2.19) să aibă loc este obligatoriu să avem

$$(A - \lambda_0 \cdot I_h)^p = O_h, \quad (2.20)$$

ceea ce ne conduce la o formulă de reprezentare a matricei A , și anume

$$A = \lambda_0 \cdot I_h + M, \quad M \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K}), M = \text{nilpotentă}. \quad (2.21)$$

Facem următoarea observație: dacă $T_1 : E \rightarrow E$ este prelungirea cu zero a operatorului $T_1 : V \rightarrow V$, adică

$$\mathbb{T}_1 = \begin{pmatrix} A & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & O_{m-h} \end{pmatrix},$$

și $\bar{e} = \sum_{i=1}^m x_i \cdot \bar{e}_i \in E$ este un *eigenvector* (generalizat) corespunzând valorii proprii $\mu \neq 0$ — a acestei prelungiri T_1 —, atunci sistemul algebric

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_1 - \mu \cdot I_m)^k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ x_{h+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A - \mu \cdot I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & O_{m-h} - \mu \cdot I_{m-h} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ x_{h+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A - \mu \cdot I_h)^k & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & (-\mu \cdot I_{m-h})^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ x_{h+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{N}^*, \end{aligned} \quad (2.22)$$

are drept soluție nenulă setul de coordonate în baza \mathcal{S}_1 al vectorului \bar{e} . Prezența termenului $(-\mu \cdot I_{m-h})^k$ în (2.22) ne arată că sistemul poate avea (asemenea) soluții nenule dacă și numai dacă $\det(A - \mu \cdot I_h) = 0$ și $x_{h+1} = \dots = x_m = 0$. Adică, μ trebuie să fie eigenvaloare pentru operatorul “mic” $T_1 : V \rightarrow V$ și $\bar{e} = \sum_{i=1}^h x_i \cdot \bar{e}_i \in V$ un eigenvector (generalizat) corespunzându-i lui μ . Cu alte cuvinte, valorile proprii nenule și vectorii proprii (generalizați) ai unui operator $T_1 : V \rightarrow V$ coincid cu valorile proprii nenule, respectiv cu vectorii proprii (generalizați) ai prelungirii acestui operator cu zero în întregul spațiu E . Evident, o observație similară se face în privința operatorului $T_2 : W \rightarrow W$ și a prelungirii sale cu zero, notată tot cu T_2 , în întreg spațiul ambient E !

Numărul $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, fiind o valoare proprie a operatorului $T : E \rightarrow E$, este o rădăcină, de multiplicitate¹³ $m_0 \in \mathbb{N}^*$, a polinomului caracteristic $p_T(\lambda)$. Atunci, avem

$$p_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_0} \cdot q(\lambda), \quad (2.23)$$

unde q este tot un polinom cu coeficienți în \mathbb{K} , având gradul mai mic decât m — gradul polinomului $p_T(\lambda)$ —, care nu se anulează pentru $\lambda = \lambda_0$.

Formula (2.20) ne arată că numărul λ_0 este valoare proprie a matricei A . În plus, via (2.18), deducem că există $1 \leq n_0 \leq m_0$ astfel încât $(\lambda - \lambda_0)^{n_0} | \det(A - \lambda \cdot I_h)$.

Afirmăm că $n_0 = m_0$, adică λ_0 nu este un zero al polinomului $\det(B - \lambda \cdot I_{m-h})$. Pentru a proba aceasta, presupunem că, prin absurd, λ_0 este un asemenea zero, adică o valoare proprie a matricei B . Observația anterioară, pentru operatorul $T_2 : W \rightarrow W$ și $\mu = \lambda_0$, ne conduce la sistemul algebric

$$\begin{pmatrix} -\lambda_0 \cdot I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B - \lambda_0 \cdot I_{m-h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ x_{h+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m. \quad (2.24)$$

Cum $\det(B - \lambda_0 \cdot I_{m-h}) = 0$, dacă luăm $x_1 = \dots = x_h = 0$, atunci va exista vectorul nenul $\bar{w} = \sum_{i=h+1}^m x_i \cdot \bar{e}_i \in \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_{h+1}, \dots, \bar{e}_m\} = W$ ale cărui componente să verifice sistemul algebric (2.24). Astfel, \bar{w} devine un eigenvector¹⁴ al (prelungirii cu zero a) operatorului T_2 , de unde, dată fiind unicitatea descompunerii (2.1), deducem că

$$T(\bar{w}) = T(0_E + \bar{w}) = T_2(\bar{w}) = \lambda_0 \cdot \bar{w},$$

respectiv $\bar{w} \in \text{Ker}(T - \lambda_0 \cdot I) \subseteq V$. Am ajuns, evident, la o contracție: $\bar{w} \in V \cap W$.

¹³ Această cantitate se numește *multiplicitatea algebrică* a eigenvalorii λ_0 , vezi [1, pag. 157].

¹⁴ Dacă $\lambda_0 = 0$, atunci nu este obligatoriu ca $x_1 = \dots = x_h = 0$! Putem, în schimb, impune noi această restricție, deoarece suntem interesați de construcția unui anumit vector \bar{w} .

Mai facem o afirmație¹⁵: *numărul λ_0 este singura valoare proprie a matricei $A \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$. La fel ca până acum, presupunem că, prin absurd, există $\mu \neq \lambda_0$ în \mathbb{K} astfel încât $\det(A - \mu \cdot I_h) = 0$. Folosind sistemul algebric (2.22), cu $k = 1$, deducem existența¹⁶ unui vector nenul $\bar{v} \in \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\} = V$ pentru care este valabilă dubla egalitate $T(\bar{v}) = T_1(\bar{v}) = \mu \cdot \bar{v}$.*

Cum $\bar{v} \in V$, există $j \geq 1$ cu proprietatea că $\bar{v} \in \text{Ker}(T - \lambda_0 \cdot I)^j$. Adică, $(T - \lambda_0 \cdot I)^j(\bar{v}) = 0_E$. Însă, remarcăm că

$$\begin{aligned} (T - \lambda_0 \cdot I)^2(\bar{v}) &= (T - \lambda_0 \cdot I)((T - \lambda_0 \cdot I)(\bar{v})) = (T - \lambda_0 \cdot I)(T(\bar{v}) - \lambda_0 \cdot \bar{v}) \\ &= (T - \lambda_0 \cdot I)((\mu - \lambda_0) \cdot \bar{v}) = (\mu - \lambda_0) \cdot (T - \lambda_0 \cdot I)(\bar{v}) \\ &= (\mu - \lambda_0)^2 \cdot \bar{v}, \end{aligned}$$

respectiv — prin inducție matematică —

$$0_E = (T - \lambda_0 \cdot I)^j(\bar{v}) = (\mu - \lambda_0)^j \cdot \bar{v}.$$

Am ajuns, din nou, la o contradicție: $\bar{v} = 0_E$.

Demonstrația afirmației se bazează, așadar, pe construcția unui vector $\bar{v} \neq 0_E$. Acest vector nu poate fi folosit dacă $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{K}$ pentru că am avea

$$\bar{v} \in \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\} \supsetneq \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\} = V,$$

adică *este posibil ca $\bar{v} \notin V$* . Ca să evităm asemenea complicații, am introdus proprietatea ($\mathcal{H}\mathcal{S}$) [10, pag. 128, Theorem 1].

În concluzie,

$$\det(A - \lambda \cdot I_h) = (-1)^{m_0} \cdot (\lambda - \lambda_0)^{m_0}, \quad \lambda \in \mathbb{K}, \quad (2.25)$$

deci am obținut următoarea formulă pentru polinomul caracteristic al operatorului T , și anume

$$p_T(\lambda) = (-1)^{m_0} (\lambda - \lambda_0)^{m_0} \cdot \det(B - \lambda \cdot I_{m-h}). \quad (2.26)$$

Expresia (2.25) ne arată că gradul polinomului $\det(A - \lambda \cdot I_h)$ — adică, h , dimensiunea subspațiului V peste \mathbb{K} — este egal cu m_0 , multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ_0 . Cu alte cuvinte,

$$\dim_{\mathbb{K}} \left(\bigcup_{i \geq 0} \text{Ker}(T - \lambda_0 \cdot I)^i \right) = m_0. \quad (2.27)$$

Vezi [10, pag. 333].

În sfârșit, cum suma dimensiunilor celor două subspații, $\dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W$, este dimensiunea spațiului E , adică m , dacă $W \neq \{0_E\}$, adică $\dim_{\mathbb{K}} W \geq 1$, deducem că

¹⁵ Vezi [10, pag. 332, ecuația (2)].

¹⁶ Aici, impunem ca $x_{h+1} = \dots = x_m = 0$.

$\dim_{\mathbb{K}} V = m_0 \leq m - 1$. Dat fiind că gradul polinomului $p_T(\lambda)$ este m , rezultă că factorul $\det(B - \lambda \cdot I_{m-h})$ din (2.26) este un polinom cu gradul cel puțin 1. Numărul (complex) λ_1 căutat este o soluție a ecuației algebrice $\det(B - \lambda \cdot I_{m-h}) = 0$. \square

Vom lucra, până la sfârșitul secțiunii de față, cu scalari din corpul

$$\mathbb{K} = \mathbb{C} \quad (2.28)$$

și vom aplica în mod inductiv Lema 2.12.

În contextul Teoremei 2.1, dacă am fixat baza \mathcal{S}_1 a spațiului ambient E , atunci operatorul $T_2 : W \rightarrow W$ este reprezentat de matricea

$$\mathbb{T}_W = B, \quad B \in \mathcal{M}_{m-m_0}(\mathbb{K}),$$

iar prelungirea cu zero în E a operatorului T_2 , pe care o notăm cu $\bar{T}_2 : E \rightarrow E$, are matricea

$$\mathbb{T}_2 = \begin{pmatrix} O_{m_0} & O_{m_0, m-m_0} \\ O_{m-m_0, m_0} & B \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Polinomul caracteristic $p_T(\lambda)$ se scrie în mod unic sub forma¹⁷

$$p_T(\lambda) = (-1)^m \cdot (\lambda - \lambda_0)^{m_0} \cdot (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}, \quad s \in \mathbb{N}^*, \quad (2.30)$$

unde numerele *complexe* $\{\lambda_0, \dots, \lambda_s\}$ desemnează valorile proprii distincte ale operatorului liniar T iar numerele $\{m_0, \dots, m_s\} \subset \mathbb{N}^*$ sunt multiplicitățile algebrice ale acestor valori proprii. Evident, $\sum_{i=0}^s m_i = m$. Vezi [10, pag. 330].

Reprezentarea (2.26) a polinomului $p_T(\lambda)$ ne conduce la următoarea expresie a polinomului caracteristic $p_{T_2}(\lambda)$ al operatorului liniar $T_2 : W \rightarrow W$. Adică,

$$p_{T_2}(\lambda) = (-1)^{m-m_0} \cdot (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_s)^{m_s}.$$

Aplicând Lema 2.12 operatorului¹⁸ $T_2 : W \rightarrow W$, obținem relațiile omoloage celor care au caracterizat operatorul T :

$$W = V_1 \oplus W_1, \quad T_2 = T_2^1 \oplus T_2^2,$$

unde

$$V_1 = \bigcup_{k \geq 0} \text{Ker} (T_2 - \lambda_1 \cdot I)^k, \quad W_1 = \bigcap_{k \geq 0} \text{Im} (T_2 - \lambda_1 \cdot I)^k.$$

¹⁷ Atenție, în [10, pag. 110] se folosește ca polinom caracteristic mărimea $(-1)^m \cdot p_T(\lambda)$.

¹⁸ Atenție, operatorul \bar{T}_2 admite întotdeauna și *valoarea proprie* 0, a cărei multiplicitate algebrică este *cel puțin* m_0 . Cum operatorul T ar putea avea și el valoarea proprie 0, dacă i-am aplica Lema 2.12 operatorului \bar{T}_2 , atunci argumentația s-ar complica excesiv.

Aici, $I : W \rightarrow W$ este operatorul-identitate din $L(W, W)$, respectiv¹⁹ $T_2^1 = T_2|_{V_1} = T|_{V_1}$ și $T_2^2 = T_2|_{W_1} = T|_{W_1}$. În plus, dacă $\bar{v}_1 \in E$ este un eigenvector (generalizat) corespunzând valorii proprii λ_1 a operatorului liniar $T : E \rightarrow E$, atunci avem $\bar{v}_1 \in W$ — am văzut că subspațiul V conține doar eigenvectori (generalizați) ai valorii proprii λ_0 —. Ceea ce înseamnă că [10, pag. 332, ecuația (1)]

$$\text{Ker}(T - \lambda_1 \cdot I)^i = \text{Ker}(T_2 - \lambda_1 \cdot I)^i, \quad i \geq 1, \quad (2.31)$$

respectiv

$$V_1 = \bigcup_{k \geq 0} \text{Ker}(T - \lambda_1 \cdot I)^k.$$

Pentru a ne convinge de acest fapt, nu avem decât să analizăm sistemul algebric asociat membrului stâng al egalității (2.31). Mai precis, fiind dată ecuația matriceală

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda_1 \cdot I_{m_0})^i & O_{m_0, m-m_0} \\ O_{m-m_0, m_0} & (B - \lambda_1 \cdot I_{m-m_0})^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_0} \\ x_{m_0+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

existența unui set $\{x_1, \dots, x_{m_0}\}$ de numere complexe care să conțină măcar un număr nenul²⁰ va însemna că sistemul algebric omogen

$$(A - \lambda_1 \cdot I_{m_0})^i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_0}$$

admite soluții nenule. Astfel, ajungem la $\det(A - \lambda_1 \cdot I_{m_0}) = 0$. Adică, matricea A ar trebui să aibă valoarea proprie $\lambda_1 \neq \lambda_0$, ceea ce contrazice demonstrația Lemei anterioare!

Mai departe, matricea B are forma

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & O_{h_1, m-m_0-h_1} \\ O_{m-m_0-h_1, h_1} & B_1 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

unde $A_1 \in \mathcal{M}_{h_1}(\mathbb{K})$, $B_1 \in \mathcal{M}_{m-m_0-h_1}(\mathbb{K})$.

Inserăm expresia matricei B din (2.32) în (2.29) și ajungem la matricea de reprezentare a (prelungirii cu zero a) operatorului $T_2^1 : E \rightarrow E$, și anume

¹⁹ Evident, $T_2|_{V_1} = (T|_W)|_{V_1} = T|_{V_1}$ pentru că $V_1 \subseteq W$.

²⁰ Adică, de exemplu, $x_{m_0} \neq 0$ și $\bar{v}_1 = x_{m_0} \cdot \bar{e}_{m_0} + \left(\sum_{i=m_0+1}^m x_i \cdot \bar{e}_i \right) \in K_i(T - \lambda_1 \cdot I) \setminus W$.

$$\mathbb{T}_2^1 = \begin{pmatrix} O_{m_0} & O_{m_0, m-m_0} \\ O_{m-m_0, m_0} & \begin{pmatrix} A_1 & O_{h_1, m-m_0-h_1} \\ O_{m-m_0-h_1, h_1} & O_{m-m_0-h_1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Este clar că avem, în fapt, următoarea matrice:

$$\mathbb{T}_2^1 = \begin{pmatrix} O_{m_0} & O_{m_0, h_1} & O_{m_0, m-m_0-h_1} \\ O_{h_1, m_0} & A_1 & O_{h_1, m-m_0-h_1} \\ O_{m-m_0-h_1, m_0} & O_{m-m_0-h_1, h_1} & O_{m-m_0-h_1} \end{pmatrix}.$$

În mod analog,

$$\mathbb{T}_2^2 = \begin{pmatrix} O_{m_0} & O_{m_0, h_1} & O_{m_0, m-m_0-h_1} \\ O_{h_1, m_0} & O_{h_1} & O_{h_1, m-m_0-h_1} \\ O_{m-m_0-h_1, m_0} & O_{m-m_0-h_1, h_1} & B_1 \end{pmatrix}.$$

Așadar, am dedus că²¹ $E = V_0 \oplus V_1 \oplus W_1$ și $T = T_0 \oplus T_1 \oplus T_2$, unde

$$V_i = \bigcup_{k \geq 0} \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I)^k, \quad \dim_{\mathbb{K}} V_i = m_i, \quad T_i = T|_{V_i}, \quad i \in \{0, 1\},$$

și

$$T_2 = T|_{W_1}.$$

Teorema 2.2. *Fiind date spațiul linear complex $E \subseteq \mathbb{C}^n$, de dimensiune $m \leq n$, și operatorul \mathbb{C} -liniar $T : E \rightarrow E$, are loc descompunerea*

$$T = \mathcal{D} + \mathcal{N},$$

unde operatorul \mathbb{C} -liniar $\mathcal{N} : E \rightarrow E$ este nilpotent iar operatorul \mathbb{C} -liniar $\mathcal{D} : E \rightarrow E$ admite o matrice-diagonală²² de reprezentare.

Demonstrație. Ne găsim în contextul Lemei 2.12 și al cerinței (2.28). Există, așadar, subspațiile liniare complexe $V_i \subseteq E$, unde

$$V_i = \bigcup_{j \geq 0} \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I)^j, \quad \dim_{\mathbb{C}} V_i = m_i \text{ (vezi (2.30))}$$

pentru $0 \leq i \leq s$, și²³ [10, pag. 110, Theorem 1]

$$E = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_s. \quad (2.33)$$

²¹ Aici, $V_0 = V$.

²² Matricea $M = (m_{vw})_{v,w} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ este matrice-diagonală dacă singurele elemente (intrări) nenule ale sale se găsesc pe diagonala principală a matricei. Adică, $m_{vw} = 0$ pentru orice $v \neq w \in \overline{1, q}$. Prin extensie de limbaj, o matrice definită pe blocuri este matrice-diagonală dacă numai blocurile de pe diagonala principală pot fi nenule.

²³ La ultima aplicare a Lemei 2.12, obținem $W = W_s = \{0_E\}$.

Matricea de reprezentare a operatorului liniar T în baza \mathcal{S}_1 are forma

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} A_0 & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & A_s \end{pmatrix}, \quad A_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}).$$

Aici, conform (2.21),

$$A_i = \lambda_i \cdot I_{m_i} + M_i, \quad M_i \in \mathcal{M}_{m_i}(\mathbb{C}), \quad (2.34)$$

și există numărul $p_i \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$M_i^{p_i} = O_{m_i}. \quad (2.35)$$

Introducem matricele

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_0 & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & D_s \end{pmatrix}, \quad D_i = \lambda_i \cdot I_{m_i}, \quad i \in \overline{0, s},$$

și

$$\mathbb{N} = \begin{pmatrix} M_0 & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & M_s \end{pmatrix}.$$

Îl notăm cu p pe cel mai mare dintre numerele $\{p_0, \dots, p_s\}$ [10, pag. 112]. Atunci,

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^p &= \begin{pmatrix} M_0^p & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & M_s^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0^{p_0} \cdot M_0^{p-p_0} & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & M_s^{p_s} \cdot M_s^{p-p_s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O_{m_0} & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & O_{m_s} \end{pmatrix} = O_m. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Via (1.9), definim operatorul \mathcal{D} de matrice \mathbb{D} și operatorul \mathcal{N} de matrice \mathbb{N} . \square

Un operator \mathbb{K} -liniar $\mathcal{D} : E \rightarrow E$ care admite o matrice-diagonală de reprezentare este numit *diagonalizabil* [10, pag. 45] atunci când $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ și *semi-simplu* pentru $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ [10, pag. 63]. În cazul particular când $s = 0$, deci $\mathbb{D} = D_0 = \lambda_0 \cdot I_{m_0} = \lambda_0 \cdot I_m$, operatorul poartă numele de *operator diagonal* [10, pag. 46]. Tot aici se observă că, pentru orice matrice $\mathbb{W} \sim \mathbb{D}$, avem $\mathbb{W} = \lambda_0 \cdot I_m = \mathbb{D}$ [10, pag. 111].

Lema 2.13. *În contextul Teoremei 2.2, avem*

$$\mathcal{D} \circ \mathcal{N} = \mathcal{N} \circ \mathcal{D}.$$

Demonstrație. La fel ca în (1.16), operatorul $\mathcal{D} \circ \mathcal{N}$ este reprezentat de matricea \mathbb{DN} în baza \mathcal{S}_1 a spațiului E iar operatorul $\mathcal{N} \circ \mathcal{D}$ de matricea \mathbb{ND} .

Mai departe,

$$\begin{aligned} \mathbb{DN} &= \begin{pmatrix} D_0 M_0 & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & D_s M_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_0 I_{m_0}) M_0 & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & (\lambda_s I_{m_s}) M_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_0 (\lambda_0 I_{m_0}) & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & M_s (\lambda_s I_{m_s}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 D_0 & \cdots & O_{m_0, m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s, m_0} & \cdots & M_s D_s \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{ND}. \end{aligned}$$

□

Lema 2.14. ([10, pag. 120, Problema 8]) *În contextul Teoremei 2.2, au loc inegalitățile*

$$p_i \leq m_i, \quad i \in \overline{0, s}, \quad (2.37)$$

unde numerele p_i au fost definite în (2.35). Adică, matricele M_i din (2.34) îndeplinesc condițiile

$$M_i^{m_i} = O_{m_i} \quad \text{pentru orice } i. \quad (2.38)$$

Demonstrație. Știm că $V_i = K_{p_i}(T - \lambda_i \cdot I)$. Incluziunile stricte (2.11), și anume

$$\{0_E\} \subsetneq \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I) \subsetneq \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I)^2 \subsetneq \cdots \subsetneq \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I)^{p_i} = V_i,$$

ne permit să alegem vectorii $\bar{x}_1 \in \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I) \setminus \{0_E\}$, $\bar{x}_2 \in \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I)^2 \setminus \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I)$, \dots , $\bar{x}_{p_i} \in \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I)^{p_i} \setminus \text{Ker}(T - \lambda_i \cdot I)^{p_i-1}$. Setul $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{p_i}\} \subset V_i$ este liniar independent peste \mathbb{K} . Cum $\dim_{\mathbb{K}} V_i = m_i$, ajungem la (2.37). În sfârșit,

$$M_i^{m_i} = M_i^{p_i} \cdot M_i^{m_i-p_i} = O_{m_i},$$

unde $0 \leq i \leq s$. □

Via (2.33), (2.36), (2.37), remarcăm că

$$p = \max\{p_0, \dots, p_s\} \leq \max\{m_0, \dots, m_s\} \leq m,$$

respectiv

$$\mathbb{N}^m = O_m. \quad (2.39)$$

Lema 2.15. ([10, pag. 121, problema 17]) *În contextul Lemei 2.5, fie $P_i : E \rightarrow E$, unde $1 \leq i \leq 3$, operatori \mathbb{K} -liniari astfel încât P_1 să fie diagonalizabil, P_2 să fie nilpotent și P_3 să fie diagonal. Atunci, dacă*

$$P_i(V) \subseteq V, \quad P_i(W) \subseteq W \quad \text{pentru orice } i,$$

$P_1|_V$ este diagonalizabil, $P_2|_V$ este nilpotent și $P_3|_V$ este diagonal.

Demonstrație. Dacă operatorul \mathbb{K} -liniar $T : E \rightarrow E$ invariază subspațiile V și W , atunci există baza \mathcal{S}_1 a spațiului E pentru care $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\}$, $W = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}_{h+1}, \dots, \bar{e}_m\}$ și matricea de reprezentare are forma

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} A & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{m-h}(\mathbb{K}).$$

De aici, evident,

$$\mathbb{T}^j = \begin{pmatrix} A^j & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B^j \end{pmatrix}, \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

Matricea A îl reprezintă pe $T|_V$ în baza $(\mathcal{S}_1)_V = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\}$.

Dacă $\mathbb{T}^p = O_m$ pentru un anumit $p \in \mathbb{N}^*$ — adică, $T = P_2$ —, atunci $A^p = O_h$.

Dacă există setul de numere $\{d_1, \dots, d_m\} \subset \mathbb{K}$ pentru care

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_m \end{pmatrix},$$

deci $T = P_1$, atunci

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & d_{h-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_h \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

În sfârșit, dacă $T = P_3$, există $\lambda \in \mathbb{K}$ cu proprietatea că $T = \lambda \cdot I$, unde $I \in L(E, E)$ este operatorul-identitate. Atunci, evident $T|_V = \lambda \cdot I|_V$.

Facem observația că

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O_{m-h,h} & B \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & C_k \\ O_{m-h,h} & B^k \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

unde $A \in \mathcal{M}_h(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m-h}(\mathbb{K})$, $C_k \in \mathcal{M}_{h,m-h}(\mathbb{K})$, deci condiția $P_i(W) \subseteq W$ nu este necesară aici — am introdus-o deoarece ea intervine în demonstrația Lemei 2.16 —. \square

Lema 2.16. ([10, pag. 333, Theorem]) *În contextul Teoremei 2.2, există o singură descompunere a operatorului T sub forma*

$$T = P_1 + P_2,$$

unde $P_1 : E \rightarrow E$ este un operator \mathbb{K} -liniar diagonalizabil iar $P_2 : E \rightarrow E$ este un operator \mathbb{K} -liniar nilpotent, astfel încât P_1 să comute cu P_2 .

Demonstrație. Existența unei asemenea descompuneri este dată de Teorema 2.2 și de Lema 2.13.

Deoarece P_1 și P_2 comută, au loc relațiile

$$P_1 \circ T = P_1 \circ (P_1 + P_2) = P_1^2 + P_1 \circ P_2 = P_1^2 + P_2 \circ P_1 = (P_1 + P_2) \circ P_1 = T \circ P_1.$$

În mod analog, $P_2 \circ T = T \circ P_2$, respectiv $T \circ \mathcal{D} = \mathcal{D} \circ T$ și $T \circ \mathcal{N} = \mathcal{N} \circ T$.

Lema 2.10 arată că fiecare dintre \mathbb{K} -subspațiile din descompunerea (2.33) este invariabil de operatorii $P_1, P_2, \mathcal{D}, \mathcal{N}$.

Introducem operatorii

$$P_1^i = P_1|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i, \quad P_2^i = P_2|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i$$

și

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{D}|_{V_i} = \lambda_i \cdot I : V_i \rightarrow V_i, \quad \mathcal{N}_i = \mathcal{N}|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i, \quad (2.41)$$

unde $0 \leq i \leq s$. Evident, operatorii $\mathcal{D}_i, \mathcal{N}_i$ sunt reprezentați — în submulțimea din baza \mathcal{S}_1 a spațiului E care este bază în V_i — de matricele $\lambda_i \cdot I_{m_i}$ și M_i , cu $M_i^{m_i} = O_{m_i}$, conform (2.38).

Afirmăm că operatorii P_2^i și \mathcal{N}_i comută. Într-adevăr, conform (2.44),

$$\begin{aligned} P_2^i \circ \mathcal{N}_i &= P_2^i \circ (T|_{V_i} - \lambda_i \cdot I) = (P_2 \circ T)|_{V_i} - \lambda_i \cdot P_2^i \\ &= (T \circ P_2)|_{V_i} - \lambda_i \cdot P_2^i = (T|_{V_i} - \lambda_i \cdot I) \circ P_2^i \\ &= \mathcal{N}_i \circ P_2^i, \quad i \in \overline{0, s}. \end{aligned}$$

Comutarea operatorilor P_2^i și \mathcal{N}_i implică, evident, comutarea matricelor lor de reprezentare, $(P_2)_i$ și M_i . Din ipoteză²⁴, există numerele $q_i \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $((P_2)_i)^{q_i} = O_{m_i}$ pentru orice i . Atunci, pentru $t = 2 \cdot \max\{q_i, m_i\}$, avem²⁵ — via binomul lui Newton —

²⁴ Vezi Lema 2.15, cazul operatorului P_2 .

²⁵ Vezi pagina 106, nota de subsol, pentru notația $\binom{k}{t}$.

$$[(\mathbb{P}_2)_{V_i} - M_i]^t = \sum_{k=0}^t (-1)^{t-k} \binom{k}{t} \cdot [(\mathbb{P}_2)_{V_i}]^k \cdot M_i^{t-k}. \quad (2.42)$$

Inegalitatea

$$\max\{k, t-k\} \geq \frac{k+(t-k)}{2} = \frac{t}{2} \geq \max\{q_i, m_i\}$$

arată că fiecare din termenii sumei (2.42) are cel puțin unul dintre factorii $[(\mathbb{P}_2)_{V_i}]^k$, M_i^{t-k} egal cu O_{m_i} . În consecință,

$$[(\mathbb{P}_2)_{V_i} - M_i]^t = O_{m_i}, \quad (2.43)$$

adică operatorii $\{P_2^i - \mathcal{N}_i | 0 \leq i \leq s\}$ sunt nilpotenți.

Plecând de la egalitatea dublă

$$T|_{V_i} = P_1^i + P_2^i = \mathcal{D}_i + \mathcal{N}_i, \quad (2.44)$$

deducem că operatorii $(P_1^i - \mathcal{D}_i)_{0 \leq i \leq s}$ sunt nilpotenți.

Fixăm $i \in \overline{0, s}$. Operatorul P_1^i este diagonalizabil²⁶ iar operatorul \mathcal{D}_i este operator-diagonal, deci matricea de reprezentare a operatorului $P_1^i - \mathcal{D}_i$ are forma — vezi (2.40) —

$$F_i = \begin{pmatrix} d_1^i - \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^i - \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{m_i-1}^i - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{m_i}^i - \lambda_i \end{pmatrix}, \quad d_j^i \in \mathbb{K}.$$

Conform (2.43),

$$F_i^t = \begin{pmatrix} (d_1^i - \lambda_i)^t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (d_2^i - \lambda_i)^t & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & (d_{m_i-1}^i - \lambda_i)^t & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (d_{m_i}^i - \lambda_i)^t \end{pmatrix} = O_{m_i},$$

de unde $d_j^i = \lambda_i$ pentru orice $1 \leq j \leq m_i$, adică $P_1^i = \mathcal{D}_i$.

Din (2.44) rezultă că $P_2^i = \mathcal{N}_i$, unde $i \in \overline{0, s}$. \square

²⁶ Vezi Lema 2.15, cazul operatorului P_1 .

Capitolul 3

Forma canonică a matricelor pătrate cu elemente numerice

3.1 Cazul operatorilor nilpotenți

Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ un spațiu liniar m -dimensional peste corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Aici, ca și până acum, $m \leq n$.

Fie $\bar{e} \in E \setminus \{0_E\}$ și operatorul \mathbb{K} -liniar $T : E \rightarrow E$. Introducem mulțimea¹

$$Z(\bar{e}, T) = \text{Span}_{\mathbb{K}} \{T^i(\bar{e}) \mid i \in \mathbb{N}\}.$$

Elementele sale sunt combinații liniare cu *număr finit de termeni nenuli* ale vectorilor din familia $\{\bar{e}, T(\bar{e}), T^2(\bar{e}), \dots\}$.

Observăm că

$$Z(\bar{e}, T) = \left\{ \sum_{i=0}^h \alpha_i \cdot T^i(\bar{e}) \mid \alpha_i \in \mathbb{K}, h \in \mathbb{N} \right\}.$$

Într-adevăr, fixând $\bar{x} \in Z(\bar{e}, T)$, cu

$$\bar{x} = \sum_{j=0}^r \alpha_{h_j} \cdot T^{h_j}(\bar{e}), \quad r, h_j \in \mathbb{N},$$

introducem numerele $\alpha_i = \alpha_{h_j}$ pentru $i = h_j$, $j \in \overline{0, r}$, respectiv $\alpha_i = 0$ pentru $i \notin \{h_1, \dots, h_r\}$ și deducem că

$$\bar{x} = \sum_{i=0}^h \alpha_i \cdot T^i(\bar{e}), \quad h = \max \{h_1, \dots, h_r\}. \quad (3.1)$$

Presupunem că operatorul T este nilpotent. Astfel, există $k \in \mathbb{N}$ pentru care

$$T^k = O, \quad (3.2)$$

¹ Reamintesc că $T^0 = I$, operatorul-identitate din $L(E, E)$.

unde $O : E \rightarrow E$ desemnează operatorul-nul².

Lema 3.1. *Există numărul natural $h < k$ — vezi (3.2) — astfel încât vectorii din setul $\{\bar{e}, T(\bar{e}), T^2(\bar{e}), \dots, T^h(\bar{e})\}$ să fie liniar independenți peste corpul \mathbb{K} .*

Demonstrație. Cum $\bar{e} \neq 0_E$, fie h , unde $0 \leq h \leq k-1$, cel mai mare număr natural³ pentru care niciunul dintre vectorii din familia $\{\bar{e}, T(\bar{e}), T^2(\bar{e}), \dots, T^h(\bar{e})\}$ să nu fie nul. Evident, $T^{h+1}(\bar{e}) = 0_E$, de unde

$$T^q(\bar{e}) = T^{q-h-1}(T^{h+1}(\bar{e})) = T^{q-h-1}(0_E) = 0_E \quad (3.3)$$

pentru orice $q \geq h+1$.

De asemeni, vectorii din setul $\{\bar{e}, T(\bar{e}), T^2(\bar{e}), \dots, T^h(\bar{e})\}$ sunt diferiți unul de celălalt. Într-adevăr, dacă ar exista numerele $p \geq 0$, $q \geq 1$ astfel ca $p+q \leq h$ și $T^p(\bar{e}) = T^{p+q}(\bar{e})$, atunci

$$\begin{aligned} T^{h+1-q}(\bar{e}) &= T^{h+1-p-q}(T^p(\bar{e})) = T^{h+1-p-q}(T^{p+q}(\bar{e})) \\ &= T^{h+1}(\bar{e}) = 0_E, \end{aligned} \quad (3.4)$$

ceea ce contrazice definiția numărului h .

Afirmăm că vectorii $\{\bar{e}, T(\bar{e}), T^2(\bar{e}), \dots, T^h(\bar{e})\}$ sunt liniari independenți peste corpul \mathbb{K} . Într-adevăr, fiind dată relația

$$\sum_{i=0}^h \alpha_i \cdot T^i(\bar{e}) = 0_E, \quad \text{unde } \alpha_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^h \alpha_i^2 > 0,$$

să presupunem că $\alpha_r \in \mathbb{K}$ este coeficientul *nenul* cu cel mai mic index. Deci

$$\sum_{i=r}^h \alpha_i \cdot T^i(\bar{e}) = 0_E,$$

respectiv, via (3.3),

$$0_E = T^{h-r} \left(\sum_{i=r}^h \alpha_i \cdot T^i(\bar{e}) \right) = \alpha_r \cdot T^h(\bar{e}).$$

Am ajuns la o contradicție: $\alpha_r = 0$.

În plus, avem — conform (3.1) —

$$Z(\bar{e}, T) = \text{Span}_{\mathbb{K}} \{ \bar{e}, \dots, T^h(\bar{e}) \},$$

adică setul

$$\{ \bar{e}, \dots, T^h(\bar{e}) \} \quad (3.5)$$

² Adică, $T^k(\bar{e}) = 0_E$ pentru orice $\bar{e} \in E$.

³ Conform [10, pag. 334], cantitatea $h+1$ se notează cu *nil*: $\text{nil}(\bar{e}, T)$.

este bază a subspațiului $Z(\bar{e}, T)$. \square

Lema 3.2. În contextul Lemei 3.1, au loc relațiile

$$T(Z(\bar{e}, T)) = Z(T(\bar{e}), T) \subseteq Z(\bar{e}, T) \quad (3.6)$$

și

$$\text{Ker}(T|_{Z(\bar{e}, T)}) = \mathbb{K}T^{\text{nil}(\bar{e}, T)-1}(\bar{e}). \quad (3.7)$$

Demonstrație. Fie $\bar{x} = \sum_{i=0}^h \alpha_i \cdot T^i(\bar{e}) \in Z(\bar{e}, T)$, unde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ și $0 \leq i \leq h \leq k-1$.

Atunci,

$$T(\bar{x}) = \sum_{i=0}^h \alpha_i \cdot T(T^i(\bar{e})) = \sum_{i=0}^h \alpha_i \cdot T^i(T(\bar{e})) \in Z(T(\bar{e}), T),$$

adică $T(Z(\bar{e}, T)) \subseteq Z(T(\bar{e}), T)$.

Reciproc, fie $\bar{y} = \sum_{i=0}^h \alpha_i \cdot T^i(T(\bar{e})) \in Z(T(\bar{e}), T)$. Observăm că

$$\bar{y} = \sum_{i=0}^h \alpha_i \cdot T(T^i(\bar{e})) = T(\bar{x}) \in T(Z(\bar{e}, T)).$$

Fie $h = \text{nil}(\bar{e}, T) - 1$. Pentru a stabili formula (3.7), observăm că relațiile — dacă $h \geq 1$ —

$$\begin{aligned} 0_E &= T(\bar{x}) = T\left(\sum_{i=0}^h \alpha_i \cdot T^i(\bar{e})\right) \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} \alpha_i \cdot T^{i+1}(\bar{e}) + \alpha_h \cdot T^{h+1}(\bar{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} \alpha_i \cdot T^{i+1}(\bar{e}), \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

implică $\alpha_i = 0$ pentru orice $0 \leq i \leq h-1$. \square

Lema 3.3. Fie $\bar{x}, \bar{y} \in E$ astfel încât $\{0_E\} \subsetneq Z(\bar{x}, T) \cap Z(\bar{y}, T)$. Atunci, există numerele $r, s \geq 0$ pentru care

$$\{T^i(\bar{x}) | i \geq r\} \subset Z(\bar{y}, T), \quad \{T^j(\bar{y}) | j \geq s\} \subset Z(\bar{x}, T).$$

Demonstrație. Introducem numerele $h_1 = \text{nil}(\bar{x}, T) - 1$ și $h_2 = \text{nil}(\bar{y}, T) - 1$.

Fie $\bar{u} \in Z(\bar{x}, T) \cap Z(\bar{y}, T) \setminus \{0_E\}$, adică

$$\bar{u} = \sum_{i=0}^{h_1} \alpha_i \cdot T^i(\bar{x}) = \sum_{j=0}^{h_2} \beta_j \cdot T^j(\bar{y}),$$

unde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$. În plus,

$$\alpha_0 = \dots = \alpha_{r-1} = 0, \alpha_r \neq 0, \quad \beta_0 = \dots = \beta_{s-1} = 0, \beta_s \neq 0.$$

Atunci,

$$\begin{aligned} T^{h_1-r}(\bar{u}) &= \alpha_r \cdot T^{h_1}(\bar{x}) + \alpha_{r+1} \cdot T^{h_1+1}(\bar{x}) + \dots \\ &= \alpha_r \cdot T^{h_1}(\bar{x}) \\ &= \sum_{j=s}^{h_2} \beta_j \cdot T^{j+h_1-r}(\bar{y}), \end{aligned}$$

de unde rezultă că $T^{h_1}(\bar{x}) = \sum_{j=s}^{h_2} \frac{\beta_j}{\alpha_r} \cdot T^{j+h_1-r}(\bar{y}) \in Z(\bar{y}, T)$.

Apoi — dacă $h_1 \geq r+1$ —,

$$\begin{aligned} T^{h_1-r-1}(\bar{u}) &= \alpha_r \cdot T^{h_1-1}(\bar{x}) + \alpha_{r+1} \cdot T^{h_1}(\bar{x}) + \alpha_{r+2} \cdot T^{h_1+1}(\bar{x}) + \dots \\ &= \alpha_r \cdot T^{h_1-1}(\bar{x}) + \alpha_{r+1} \cdot T^{h_1}(\bar{x}) \\ &= \sum_{j=s}^{h_2} \beta_j \cdot T^{j+h_1-r-1}(\bar{y}), \end{aligned}$$

respectiv

$$T^{h_1-1}(\bar{x}) = \sum_{j=s}^{h_2} \frac{\beta_j}{\alpha_r} \cdot T^{j+h_1-r-1}(\bar{y}) - \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} \cdot T^{h_1}(\bar{x}) \in Z(\bar{y}, T).$$

Ajungem la

$$T^r(\bar{x}) = \sum_{j=s}^{h_2} \frac{\beta_j}{\alpha_r} \cdot T^j(\bar{y}) - \sum_{i=r+1}^{h_1} \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \cdot T^i(\bar{x}) \in Z(\bar{y}, T),$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Exemplul 3.1. În contextul Lemei 3.3, observăm că $Z(\bar{x}, T) \cap Z(\bar{y}, T) \subseteq Z(\bar{y}, T)$ este un \mathbb{K} -subspațiu liniar al spațiului $Z(\bar{y}, T)$. Am stabilit că acest subspațiu conține cel puțin un element al bazei $\{\bar{y}, \dots, T^{h_2}(\bar{y})\}$ a spațiului ambient $Z(\bar{y}, T)$. Afirmăm că, fiind date \mathbb{K} -spațiul liniar E , o bază a sa \mathcal{S} și subspațiul propriu $V \subset E$, unde $V \neq \{0_E\}$, este posibil ca $V \cap \mathcal{S} = \emptyset$.

Într-adevăr, fie $E = \mathbb{R}^7$ — aici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ —, baza canonică $\mathcal{S} = \{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_7\}$ și

$$V = \mathbb{R}(\bar{i}_1 + \bar{i}_2) \oplus \mathbb{R}(\bar{i}_3 + \bar{i}_4).$$

Atunci,

$$V \cap \mathcal{S} = \emptyset.$$

Fie operatorul \mathbb{K} -liniar $P: E \rightarrow E$. Putem construi o bază a spațiului în care acest operator acționează, *dacă se cunosc baze din $\text{Ker } P$ și $\text{Im } P$* , după cum urmează: fiind date baza $\mathcal{S}_3 = \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_t\}$ a spațiului $\text{Im } P$ și baza $\mathcal{S}_4 = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s\}$ a spațiului $\text{Ker } P$, selectăm familia de vectori $\mathcal{S}_5 = \{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_t\}$ pentru care $\bar{z}_i \in P^{-1}(\bar{y}_i)$, unde $i \in \overline{1, t}$. Atunci, *setul*

$$\mathcal{S}_6 = \{\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_t, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s\} \quad (3.8)$$

este bază a spațiului ambient E , vezi [10, pag. 327, Proposition 3].

Ca să ne convingem de acest fapt, arătăm că *vectorii din \mathcal{S}_6 sunt liniar independenți*. Fie scalarii $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$, unde $i \in \overline{1, t}$, $j \in \overline{1, s}$, pentru care

$$\sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot \bar{z}_i + \sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \bar{x}_j = 0_E. \quad (3.9)$$

Aplicând operatorul P relației (3.9), ajungem la — $\mathcal{S}_4 \subset \text{Ker } P$ și \mathcal{S}_3 este liniar independent —

$$\sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot P(\bar{z}_i) = \sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot \bar{y}_i = 0_E,$$

de unde $\alpha_i = 0$ pentru orice $1 \leq i \leq t$. Relația (3.9) devine — \mathcal{S}_4 este liniar independent —

$$\sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \bar{x}_j = 0_E,$$

de unde $\beta_j = 0$ pentru orice $1 \leq j \leq s$.

De asemenea, *vectorii din \mathcal{S}_6 alcătuiesc un sistem de generatori ai spațiului ambient E* . Într-adevăr, fie $\bar{x} \in E$. Atunci, există scalarii $\alpha_i \in \mathbb{K}$, unde $i \in \overline{1, t}$, astfel încât

$$\begin{aligned} P(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot \bar{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot P(\bar{z}_i) = P\left(\sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot \bar{z}_i\right). \end{aligned}$$

Observăm că $\bar{u} = \bar{x} - \sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot \bar{z}_i \in \text{Ker } P$. Astfel, există scalarii $\beta_j \in \mathbb{K}$, unde $j \in \overline{1, s}$, cu proprietatea că

$$\bar{u} = \sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \bar{x}_j,$$

respectiv

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^t \alpha_i \cdot \bar{z}_i + \sum_{j=1}^s \beta_j \cdot \bar{x}_j,$$

ceea ce încheie justificarea.

Dacă înlocuim baza \mathcal{S}_3 a spațiului $\text{Im}P$ cu *sistemul de vectori liniar independenți* $\mathcal{S}_3 = \{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_t\}$, unde $t \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Im}P$, atunci *setul \mathcal{S}_6 din (3.8) este liniar independent*.

Teorema 3.1. ([10, pag. 335, Proposition]) *În contextul relației (3.2), spațiul liniar E admite descompunerea*

$$E = Z(\bar{e}_1, T) \oplus \dots \oplus Z(\bar{e}_q, T), \quad (3.10)$$

unde $q \geq 1$.

Demonstrație. Utilizăm inducția matematică. Astfel, vom verifica existența acestui tip de descompunere atunci când $\dim_{\mathbb{K}} E \in \{1, 2\}$, apoi, presupunând că descompunerea poate fi realizată pentru orice spațiu liniar E cu $\dim_{\mathbb{K}} E \leq m-1$, vom construi o descompunere în cazul $\dim_{\mathbb{K}} E = m$.

Pasul întâi: cazul $\dim_{\mathbb{K}} E = 1$. Fie $\mathcal{S} = \{\bar{e}\}$ o bază a spațiului E . Atunci, $E = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}\}$, de unde rezultă că $T(\bar{e}) = \lambda \cdot \bar{e} \in E$. Ipoteza (3.2) ne conduce la $\lambda = 0$, astfel că $\text{nil}(\bar{e}, T) = 1$. Avem

$$Z(\bar{e}, T) = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}\}, \quad E = \text{Ker}T.$$

Deci $E = Z(\bar{e}, T)$.

Pasul al doilea: cazul $\dim_{\mathbb{K}} E = 2$. Conform (3.2), $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}T \geq 1$.

Dacă $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}T = 2$, adică $E = \text{Ker}T$, atunci $T = O$ — așadar, $k = 1$ — și

$$E = \mathbb{K}\bar{e}_1 \oplus \mathbb{K}\bar{e}_2 = Z(\bar{e}_1, T) \oplus Z(\bar{e}_2, T),$$

unde $\mathcal{S} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ constituie o bază a spațiului E .

Dacă $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}T = 1$, deci există $\bar{e}_1 \neq 0_E$ astfel încât $\text{Ker}T = \mathbb{K}\bar{e}_1$, atunci există și $\bar{e}_2 \neq 0_E$ cu $T(\bar{e}_2) \neq 0_E$. Sistemul vectorial $\mathcal{S} = \{\bar{e}_2, T(\bar{e}_2)\} \subset E$ este liniar independent peste corpul \mathbb{K} , deci alcătuiește o bază a spațiului E . Am obținut că $E = Z(\bar{e}_2, T)$.

Pasul al treilea: cazul $2 \leq \dim_{\mathbb{K}} E \leq m-1$. Presupunem că se poate realiza descompunerea (3.10).

Pasul al patrulea: cazul $\dim_{\mathbb{K}} E = m$. Operatorul T fiind nilpotent, $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}T \geq 1$. Cum — vezi (3.8) —

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker}T + \dim_{\mathbb{K}} T(E) = \dim_{\mathbb{K}} E,$$

rezultă că $\dim_{\mathbb{K}} T(E) \leq m-1$.

Conform ipotezei de inducție, există vectorii $\{\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_r\} \subset T(E)$ cu proprietatea că

$$T(E) = Z(\bar{y}_1, T) \oplus \dots \oplus Z(\bar{y}_r, T).$$

În particular, sistemul

$$\mathcal{S}_3 = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{Z}_i, \quad \mathcal{Z}_i = \{\bar{y}_i, T(\bar{y}_i), \dots, T^{h_i}(\bar{y}_i)\},$$

unde $h_i = \text{nil}(\bar{y}_i, T) - 1$, este o bază a spațiului liniar $T(E)$.

Pentru a construi sistemul \mathcal{S}_6 din (3.8), avem nevoie de un set \mathcal{S}_5 . Cu acest scop, introducem vectorii $\bar{x}_i \in T^{-1}(\bar{y}_i)$, unde $1 \leq i \leq r$.

Observăm că $T^j(\bar{x}_i) \in T^{-1}(T^j(\bar{y}_i))$ pentru orice $0 \leq j \leq h_i$ și

$$\mathcal{X}_i = \{\bar{x}_i, T(\bar{x}_i), \dots, T^{h_i}(\bar{x}_i)\} \subseteq T^{-1}(\mathcal{Z}_i), \quad (3.11)$$

respectiv $\text{nil}(\bar{x}_i, T) = \text{nil}(\bar{y}_i, T) + 1 = h_i + 2$. De asemeni, avem $T^{h_i+1}(\bar{x}_i) = T^{h_i}(\bar{y}_i) \in \text{Ker } T$.

Fie \mathbb{K} -spațiile liniare

$$\begin{aligned} Z(\bar{x}_i, T) &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{x}_i, T(\bar{x}_i), \dots, T^{h_i}(\bar{x}_i), T^{h_i+1}(\bar{x}_i)\} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{K}}\left(\mathcal{X}_i \cup \{T^{h_i+1}(\bar{x}_i)\}\right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Atunci,

$$\left(\mathcal{X}_i \cup \{T^{h_i+1}(\bar{x}_i)\}\right) \cap \left(\mathcal{X}_j \cup \{T^{h_j+1}(\bar{x}_j)\}\right) = \emptyset, \quad i \neq j.$$

Într-adevăr, via (3.11) — $\mathcal{Z}_i \cap \mathcal{Z}_j = \emptyset$, $\mathcal{Z}_i \cap \{0_E\} = \emptyset$ —, avem $\mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$. Apoi, cum $\{T^{h_i+1}(\bar{x}_i)\} \subseteq T^{-1}(\{0_E\})$, deducem că $\{T^{h_i+1}(\bar{x}_i)\} \cap \mathcal{X}_j = \emptyset$. Este evident că $\{T^{h_i+1}(\bar{x}_i)\} \cap \{T^{h_j+1}(\bar{x}_j)\} = \emptyset$. În caz contrar, am avea $T^{h_i+1}(\bar{x}_i) = T^{h_j+1}(\bar{x}_j)$, ceea ce e echivalent cu $T^{h_i}(\bar{y}_i) = T^{h_j}(\bar{y}_j) \in \mathcal{Z}_i \cap \mathcal{Z}_j$, o contradicție.

Mai departe, afirmăm că *spațiile* $(Z(\bar{x}_i, T))_{1 \leq i \leq r}$ *sunt liniar independente peste corpul* \mathbb{K} . Pentru a proba aceasta, fie expresia [10, pag. 335] — vezi și Lema 2.4 —

$$\sum_{i=1}^r \bar{u}_i = 0_E, \quad \bar{u}_i \in Z(\bar{x}_i, T).$$

Aplicând operatorul T , avem — via (3.6) —

$$\sum_{i=1}^r \bar{v}_i = 0_E, \quad \bar{v}_i = T(\bar{u}_i) \in T(Z(\bar{x}_i, T)) = Z(\bar{y}_i, T).$$

Deoarece spațiile $(Z(\bar{y}_i, T))_{1 \leq i \leq r}$ sunt liniar independente peste corpul \mathbb{K} , obținem că $\bar{v}_i = 0_E$ pentru orice i . Așadar, $\bar{u}_i \in \text{Ker}(T|_{Z(\bar{x}_i, T)})$ și, pe baza expresiei (3.7),

$$\bar{u}_i \in \mathbb{K}T^{h_i+1}(\bar{x}_i) = \mathbb{K}T^{h_i}(\bar{y}_i) \subseteq Z(\bar{y}_i, T).$$

Am ajuns la $\bar{u}_i = 0_E$, ceea ce dovedește afirmația făcută anterior.

Putem preciza acum setul \mathcal{S}_5 . Mai precis,

$$\mathcal{S}_5 = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{X}_i.$$

Cum spațiile $(Z(\bar{x}_i, T))_{1 \leq i \leq r}$ sunt liniar independente, *sistemul de vectori*

$$\left\{ T^{h_1+1}(\bar{x}_1), \dots, T^{h_r+1}(\bar{x}_r) \right\} \subseteq \text{Ker } T$$

este liniar independent peste corpul \mathbb{K} . Îl completăm până la o bază \mathcal{S}_4 a spațiului $\text{Ker } T$.

$$\mathcal{S}_4 = \left\{ T^{h_1+1}(\bar{x}_1), \dots, T^{h_r+1}(\bar{x}_r), \bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_s \right\}. \quad (3.13)$$

Am ajuns la — vezi (3.12) —

$$E = \text{Span}_{\mathbb{K}}(\mathcal{S}_6) = \bigoplus_{\bar{e} \in \mathcal{S}_6} \mathbb{K}\bar{e} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} &= Z(\bar{x}_1, T) \oplus \dots \oplus Z(\bar{x}_r, T) \oplus \mathbb{K}\bar{x}_{r+1} \oplus \dots \oplus \mathbb{K}\bar{x}_s \\ &= Z(\bar{x}_1, T) \oplus \dots \oplus Z(\bar{x}_r, T) \oplus Z(\bar{x}_{r+1}, T) \oplus \dots \oplus Z(\bar{x}_s, T). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Demonstrația s-a încheiat. \square

Exemplul 3.2. Descompunerea (3.10) nu este, în general, unică.

Fie $E = \mathbb{R}^8$, unde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, și baza canonică $\mathcal{S} = \{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_8\}$. Introducem operatorul \mathbb{R} -liniar $T : E \rightarrow E$ prin formulele

$$T(\bar{i}_j) = \bar{i}_{j+1}, \quad j \in \{1, 2, 5, 6\}, \quad T(\bar{i}_s) = 0_E, \quad s \in \{3, 4, 7, 8\}.$$

Atunci, $T^3 = O$.

Deducem că

$$Z(\bar{i}_s, T) = \mathbb{R}\bar{i}_s, \quad s \in \{3, 4, 7, 8\},$$

și

$$Z(\bar{i}_w, T) = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\bar{i}_w, \bar{i}_{w+1}, \bar{i}_{w+2}\} \cong \mathbb{R}^3, \quad \text{nil}(\bar{i}_w, T) = 3,$$

unde $w \in \{1, 5\}$, respectiv

$$Z(\bar{i}_1 + \bar{i}_5, T) = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\bar{i}_1 + \bar{i}_5, \bar{i}_2 + \bar{i}_6, \bar{i}_3 + \bar{i}_7\} \cong \mathbb{R}^3, \quad \text{nil}(\bar{i}_1 + \bar{i}_5, T) = 3.$$

Au loc egalitățile

$$E = Z(\bar{i}_1, T) \oplus Z(\bar{i}_5, T) \oplus Z(\bar{i}_4, T) \oplus Z(\bar{i}_8, T)$$

și

$$E = Z(\bar{i}_1 + \bar{i}_5, T) \oplus Z(\bar{i}_5, T) \oplus Z(\bar{i}_3, T) \oplus Z(\bar{i}_8, T).$$

Observăm că

$$Z(\bar{i}_1 + \bar{i}_5, T) \cap Z(\bar{i}_j, T) = \{0_E\}, \quad Z(\bar{i}_j, T) \cap Z(\bar{i}_v, T) = \{0_E\},$$

unde $j \neq v \in \{1, 3, 4, 5, 8\}$.

Matricea de reprezentare a operatorului T , în ambele descompuneri, este

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & O_3 & O_{3,1} & O_{3,1} \\ O_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & O_{3,1} & O_{3,1} \\ O_{1,3} & O_{1,3} & (0) & O_1 \\ O_{1,3} & O_{1,3} & O_1 & (0) \end{pmatrix}.$$

Mai precis,

$$(T(\bar{d}_1) \cdots T(\bar{d}_8)) = (\bar{d}_1 \cdots \bar{d}_8) \cdot \mathbb{T},$$

unde

$$(\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_8) = (\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3, \bar{i}_5, \bar{i}_6, \bar{i}_7, \bar{i}_4, \bar{i}_8),$$

respectiv

$$(T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_8)) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_8) \cdot \mathbb{T},$$

unde

$$(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_8) = (\bar{i}_1 + \bar{i}_5, \bar{i}_2 + \bar{i}_6, \bar{i}_3 + \bar{i}_7, \bar{i}_5, \bar{i}_6, \bar{i}_7, \bar{i}_3, \bar{i}_8).$$

Următoarele matrice pătrate,

$$A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}), \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_1 = (0),$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$, poartă numele de *matrice (blocuri) nilpotente elementare*⁴.

Rămânând în cadrul Teoremei 3.1, să observăm că matricea de reprezentare a operatorului nilpotent $T : E \rightarrow E$ în raport cu baza \mathcal{S}_6 — (3.8) — este

⁴ În limba engleză, *elementary nilpotent block* (sing.). Vezi [10, pag. 122].

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}|_{Z(\bar{e}_1, T)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{T}|_{Z(\bar{e}_2, T)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{T}|_{Z(\bar{e}_{q-1}, T)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{T}|_{Z(\bar{e}_q, T)} \end{pmatrix},$$

unde⁵ $\mathbb{T}|_{Z(\bar{e}_k, T)} = A_{\text{nil}(\bar{e}_k, T)}$ pentru orice $1 \leq k \leq q$ și $q = s$. De asemenea, *matricile 1-dimensionale* A_1 le corespund spațiilor $Z(\bar{e}, T)$ cu $\bar{e} \in \text{Ker } T$. În cazul nostru, aceste elemente \bar{e} sunt — dacă $r+1 \leq s$ — elementele $\{\bar{x}_{r+1}, \dots, \bar{x}_s\}$ din setul \mathcal{S}_4 prezentat în (3.13).

Formula (3.15) arată că spațiul liniar E poate fi scris ca suma directă a s subspații de tipul $Z(\bar{e}, T)$ în timp ce din definiția (3.13) a setului \mathcal{S}_4 rezultă că $\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker } T = s$. Astfel, *numărul de blocuri nilpotente elementare ale matricei \mathbb{T} este egal cu dimensiunea nucleului operatorului T* [10, pag. 123, Theorem 2].

Conform formulei (1.9), putem permuta coloane și linii ale matricei \mathbb{T} dacă permutăm vectorii din baza \mathcal{S}_6 a spațiului E .

De exemplu, lucrând *pe blocuri*, egalitatea

$$(T(\mathcal{B}_1)T(\mathcal{B}_2)) = (\mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2) \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

se rescrie ca

$$(T(\mathcal{B}_2)T(\mathcal{B}_1)) = (\mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1) \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix}.$$

Cu alte cuvinte, *blocurile nilpotente elementare pot fi așezate pe diagonala principală a matricei \mathbb{T} în ordinea descrescătoare (nestrictă) a dimensiunilor lor* [10, pag. 123, Theorem 1]. Această permutare este echivalentă cu permutarea termenilor din partea dreaptă a descompunerii (3.15).

Este valabilă egalitatea

$$T = T|_{Z(\bar{x}_1, T)} \oplus \cdots \oplus T|_{Z(\bar{x}_s, T)},$$

de unde — via Lema 3.2 —

$$T^v = T^v|_{Z(\bar{x}_1, T)} \oplus \cdots \oplus T^v|_{Z(\bar{x}_s, T)}, \quad v \in \mathbb{N}^*.$$

La fel ca în cazul relației (3.7), deducem că — pentru $1 \leq v \leq h_i + 2$ —

$$\text{Ker}(T^v|_{Z(\bar{x}_i, T)}) = \text{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ T^{h_i+2-v}(\bar{x}_i), \dots, T^{h_i+1}(\bar{x}_i) \right\}, \quad i \in \overline{1, r},$$

adică, via (3.4),

⁵ Reamintesc observația de la (3.4)!

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Ker} (T^v|_{Z(\bar{x}_i, T)}) = v.$$

Fie $v = 2$. Pe baza (3.14), realizăm descompunerea

$$\begin{aligned} \text{Ker } T^2 = & \bigoplus_{\substack{\bar{e} \in \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s\} \\ \text{nil}(\bar{e}, T) \geq 2}} \text{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ T^{\text{nil}(\bar{e}, T)-2}(\bar{e}), T^{\text{nil}(\bar{e}, T)-1}(\bar{e}) \right\} \\ & \oplus \bigoplus_{\substack{\bar{e} \in \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_s\} \\ \text{nil}(\bar{e}, T) = 1}} \mathbb{K} T^{\text{nil}(\bar{e}, T)-1}(\bar{e}). \quad (= \mathbb{K}\bar{e}) \end{aligned}$$

Deducem de aici că, la calculul dimensiunii subspațiului $\text{Ker } T^2 \subseteq E$, toate subspațiile $Z(\bar{e}, T)$ de dimensiune cel puțin 2 contribuie cu câte 2 (dimensiuni) în timp ce subspațiile 1-dimensionale contribuie cu câte (evident) 1 dimensiune [10, pag. 124]. Primelor dintre subspații le corespund blocuri nilpotente elementare A_k , unde $k \geq 2$. Un raționament analog se efectuează pentru fiecare $\text{Ker } T^v \subseteq E$.

Fie $v_i \geq 0$ numărul blocurilor A_i de pe diagonala principală a matricei \mathbb{T} . Cum $\dim_{\mathbb{K}} E = m$, este evident că $v_i = 0$ pentru orice $i \geq m + 1$. Fie $\delta_i = \dim_{\mathbb{K}} (\text{Ker } T^i)$. Atunci, analiza anterioară ne conduce la — [10, ibid.] —

$$\begin{cases} \delta_1 = v_1 + \dots + v_m, \\ \delta_2 = v_1 + 2 \cdot (v_2 + \dots + v_m), \\ \vdots \\ \delta_w = \sum_{1 \leq i \leq w-1} i \cdot v_i + w \cdot \sum_{w \leq i \leq m} v_i, \quad \text{unde } 2 \leq w \leq m, \\ \vdots \\ \delta_m = v_1 + 2 \cdot v_2 + 3 \cdot v_3 + \dots + m \cdot v_m. \end{cases} \quad (3.16)$$

Evident, în practică, vom avea $v_i = 0$ pentru mulți⁶ dintre indecșii i .

Scăzând două câte două — “ecuația (i) – ecuația ($i + 1$)” — ecuațiile consecutive ale sistemului algebric (3.16), ajungem la

⁶ Conform [10, pag. 120, Problema 8], $\delta_m = m$, adică $\mathbb{T}^m = O_m$. Vezi și estimările (2.38), bazată pe (2.11), respectiv (2.39). Pentru a o folosi pe aceasta din urmă, să remarcăm că, dacă un operator \mathbb{R} -liniar este nilpotent, atunci și complexificatul său va fi nilpotent — vezi (1.16), (1.38) —. Aplicând Teorema 2.2, realizăm descompunerea (unică) $T_{\mathbb{C}} = \mathcal{D} + \mathcal{N} = O + \mathcal{N} = \mathcal{N}$, de unde $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Nu vom utiliza, în cele ce urmează, relația $\delta_m = m$.

$$\begin{cases} \delta_1 = v_1 + \cdots + v_m, \\ -\delta_1 + \delta_2 = v_2 + v_3 + \cdots + v_m, \\ \vdots \\ -\delta_{w-1} + \delta_w = \sum_{w \leq i \leq m} v_i, \quad \text{unde } 2 \leq w \leq m, \\ \vdots \\ -\delta_{m-1} + \delta_m = v_m. \end{cases}$$

În sfârșit, scăzând două câte două — “ecuația (i) – ecuația ($i + 1$)” — ecuațiile consecutive ale sistemului algebric anterior, obținem

$$\begin{cases} v_1 = 2 \cdot \delta_1 - \delta_2, \\ \vdots \\ v_w = -\delta_{w-1} + 2 \cdot \delta_w - \delta_{w+1}, \quad \text{unde } 2 \leq w \leq m-1, \\ \vdots \\ v_m = -\delta_{m-1} + \delta_m. \end{cases} \quad (3.17)$$

Relațiile (2.10) arată că există numărul $p \geq 1$ astfel încât $\delta_p = \delta_{p+1} = \cdots$, de unde $v_{p+1} = v_{p+2} = \cdots = 0$.

Setul de relații (3.17) arată că numărul de blocuri nilpotente elementare de o anumită dimensiune depinde numai de operatorul T , așadar, scrierea matricii \mathbb{T} ca o matrice-diagonală care are pe diagonala principală blocuri nilpotente elementare așezate în ordinea descrescătoare nestrictă a dimensiunilor lor este unică, vezi [10, pag. 125, Theorem 4].

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Fiind date $\bar{e} \in E \setminus \{0_E\}$, $k = \text{nil}(\bar{e}, T)$ și operatorul \mathbb{K} -liniar $U = T|_{Z(\bar{e}, T)} : Z(\bar{e}, T) \rightarrow Z(\bar{e}, T)$, relația (1.9) ne conduce la

$$(U(\bar{e}_1) \cdots U(\bar{e}_k)) = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_k) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

unde — reamintesc formulele bazei (3.5) —

$$\bar{e}_1 = \bar{e}, \bar{e}_2 = T(\bar{e}) = U(\bar{e}_1), \dots, \bar{e}_k = T^{k-1}(\bar{e}) = U(\bar{e}_{k-1}).$$

Introducem altă bază a \mathbb{K} -spațiului liniar $Z(\bar{e}, T)$ prin relațiile — [10, pag. 148]

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1, \bar{f}_2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \bar{e}_2, \dots, \bar{f}_k = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \bar{e}_k.$$

Matricea de schimbare de bază este

$$P = B_k(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon^{k-2}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \end{pmatrix}.$$

Via identitățile⁷

$$A_2 \cdot B_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = B_2(\varepsilon) \cdot A_2(\varepsilon)$$

și — aici, $k \geq 3$ —

$$\begin{aligned} A_k \cdot B_k(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\varepsilon^{k-3}} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon^{k-2}} & 0 \end{pmatrix} = B_k(\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \\ &= B_k(\varepsilon) \cdot A_k(\varepsilon), \end{aligned}$$

deducem că

$$\begin{aligned} (U(\bar{f}_1) \cdots U(\bar{f}_k)) &= (U(\bar{e}_1) \cdots U(\bar{e}_k)) \cdot B_k(\varepsilon) = [(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_k) \cdot A_k] \cdot B_k(\varepsilon) \\ &= [(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_k) \cdot B_k(\varepsilon)] \cdot A_k(\varepsilon) \\ &= (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_k) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Evident, $A_k = A_k(1)$.

3.2 Forma canonică Jordan a matricei de reprezentare \mathbb{T}

În contextul Teoremei 2.2, revenim la expresiile (2.33) – (2.37).

⁷ Matricele $(A_k)_{k \geq 1}$ au fost introduse la pagina 51.

Fie $\lambda \in \mathbb{K}$. Pe baza discuției din secțiunea anterioară, introducem următoarele matrice pătrate

$$J_k^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}) \quad (3.19)$$

și

$$J_3^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_2^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_1^\lambda = (\lambda), \quad (3.20)$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$. Ele se numesc *matrice Jordan elementare*⁸.

Deoarece *operatorul* \mathcal{D}_i *din* (2.41) *este un operator diagonal*, putem modifica baza λ_i -eigenspațiului generalizat V_i astfel încât matricea nilpotentă M_i să fie adusă la *forma sa canonică* [10, pag. 123], adică să fie organizată ca o matrice-diagonală de blocuri nilpotente elementare, așezate în ordinea descrescătoare nestrictă a dimensiunilor lor. Atunci, *matricele* A_i *din* (2.34) *devin matrice-diagonale formate din matrice Jordan elementare, așezate în ordinea descrescătoare nestrictă a dimensiunilor lor*. La rândul său, matricea de reprezentare \mathbb{T} a operatorului liniar $T : E \rightarrow E$ — fiind o matrice-diagonală construită cu matricele A_i — devine o matrice-diagonală de matrice Jordan elementare. Această scriere a matricei \mathbb{T} constituie *forma sa canonică Jordan* [10, pag. 127].

Calculul (3.18) arată că putem înlocui matricele Jordan elementare cu matricele

$$J_k^\lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon & \lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K}) \quad (3.21)$$

și

$$J_3^\lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda & 0 \\ 0 & \varepsilon & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_2^\lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \varepsilon & \lambda \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$ și $\varepsilon > 0$. Evident, $J_k^\lambda = J_k^\lambda(1)$.

⁸ În limba engleză, *elementary Jordan matrix* (sing.). Conform [10, pag. 127].

3.3 Cazul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Restricția (2.28) a fost impusă pentru a putea descompune polinomul caracteristic $p_T(\lambda)$ într-un produs de puteri de *polinoame de gradul întâi* — vezi formula (2.30) —.

Fie $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un spațiu liniar real de dimensiune $m \leq n$ și $T : E \rightarrow E$ un operator \mathbb{R} -liniar. Complexificatul său, $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$, are aceeași matrice de reprezentare \mathbb{T} și același polinom caracteristic $p_T(\lambda)$ ca operatorul T .

Fie $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ o eigenvaloare a operatorului $T_{\mathbb{C}}$ și eigenvectorul generalizat

$$\bar{e} \in \text{Ker} (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^k \setminus \{0_E\} \subset E_{\mathbb{C}}, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Aici, $\bar{e} = \bar{x} + i \cdot \bar{y}$, unde $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

Relațiile (1.35), (1.36) și Lema 1.2 arată că

$$\bar{x}, \bar{y} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n = E_{\mathbb{C}\mathbb{R}} = E.$$

Via Lema 1.6, $\sigma \circ T_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}} \circ \sigma$. Au loc egalitățile

$$\begin{aligned} 0_E &= \sigma(0_E) = \sigma \left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^k (\bar{e}) \right) \\ &= (\sigma \circ (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)) \left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1} (\bar{e}) \right) \\ &= \left((T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}_0 \cdot I) \circ \sigma \right) \left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1} (\bar{e}) \right) \\ &= (T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}_0 \cdot I) \left((\sigma \circ (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)) \left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-2} (\bar{e}) \right) \right) \\ &= (T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}_0 \cdot I)^2 \left((\sigma \circ (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)) \left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-3} (\bar{e}) \right) \right) \\ &\quad \vdots \\ &= (T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}_0 \cdot I)^k (\sigma(\bar{e})), \end{aligned}$$

de unde

$$\sigma(\bar{e}) \in \text{Ker} \left(T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}_0 \cdot I \right)^k \setminus \{0_E\}. \quad (3.23)$$

De aici, deducem că *fiecărei valori proprii nereale λ_0 a operatorului $T_{\mathbb{C}}$ îi corespunde valoarea proprie $\bar{\lambda}_0$* [10, pag. 66, Proposition]. *Cele două eigenvalori au multiplicități algebrice egale.*

Formula (2.30), valabilă în \mathbb{C} , se rescrie în \mathbb{R} ca

$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) &= p_{T_{\mathbb{C}}}(\lambda) \\
&= (-1)^m \cdot (\lambda - \lambda_0)^{m_0} \cdot (\lambda - \overline{\lambda_0})^{m_0} \\
&\quad \times (\text{factori generați de restul eigenvalorilor}) \\
&= (-1)^m \cdot (\lambda^2 - 2 \cdot \operatorname{Re} \lambda_0 \cdot \lambda + |\lambda_0|^2)^{m_0} \cdot (\dots).
\end{aligned}$$

Descompunerea (2.33) a spațiului liniar $E_{\mathbb{C}}$ ne permite să observăm că vectorii $\{\bar{e}, \sigma(\bar{e})\}$, găsiindu-se în eigenspații generalizate diferite, sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{C} .

Lema 3.4. ([10, pag. 68]) Vectorii $\{\bar{e}, \sigma(\bar{e})\}$ sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{C} dacă și numai dacă vectorii $\{\bar{x}, \bar{y}\}$, unde $\bar{e} = \bar{x} + i \cdot \bar{y}$ și $\bar{x}, \bar{y} \in E$, sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{R} .

În plus,

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{e}, \sigma(\bar{e})\} = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{x}, \bar{y}\}. \quad (3.24)$$

Demonstrație. Observăm că $\bar{e} \neq \sigma(\bar{e})$ dacă și numai dacă $\bar{y} \neq 0_E$.

Pentru $\alpha = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că $\sigma(\bar{e}) = \alpha \cdot \bar{e}$, deducem că

$$\begin{cases} a \cdot \bar{x} - b \cdot \bar{y} = \bar{x}, \\ b \cdot \bar{x} + a \cdot \bar{y} = -\bar{y}, \end{cases}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{cases} (a-1) \cdot \bar{x} = b \cdot \bar{y}, \\ -b \cdot \bar{x} = (a+1) \cdot \bar{y}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Dat fiind că cel puțin unul din vectorii \bar{x}, \bar{y} este nenul, din relațiile (3.25) rezultă că

$$a^2 + b^2 = 1, \quad (3.26)$$

ceea ce ne permite să scriem că $a = \cos u$ și $b = \sin u$ pentru un anumit $u \in [0, 2\pi]$.

Ca să ajungem la (3.26), înmulțim prima ecuație din (3.25) cu $a+1$, pe cea de-a doua cu b și apoi le scădem. Am obținut că $(a^2 + b^2 - 1) \cdot \bar{x} = 0_E$. De asemenea, înmulțind prima ecuație cu b , pe a doua cu $a-1$ și adunând rezultatele, rezultă $(a^2 + b^2 - 1) \cdot \bar{y} = 0_E$.

Introducând noile formule ale mărimilor a, b în relațiile (3.25), ajungem la

$$\sin \frac{u}{2} \cdot \bar{x} + \cos \frac{u}{2} \cdot \bar{y} = 0_E,$$

adică la concluzia că liniar dependența vectorilor $\{\bar{e}, \sigma(\bar{e})\}$ implică liniar dependența vectorilor $\{\bar{x}, \bar{y}\}$.

Reciproc, dacă există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\bar{x} = c \cdot \bar{y}$, atunci

$$\sigma(\bar{e}) = (c-i) \cdot \bar{y} = \frac{c-i}{c+i} \cdot [(c+i) \cdot \bar{y}] = \alpha \cdot \bar{e}, \quad \alpha = \frac{c-i}{c+i} \in \mathbb{C},$$

ceea ce încheie demonstrația.

Pentru partea a doua, remarcăm că au loc relațiile

$$\begin{aligned} (E_{\mathbb{C}} \ni) \quad \bar{u} &= \alpha \cdot \bar{e} + \beta \cdot \sigma(\bar{e}) \\ &= (\alpha + \beta) \cdot \bar{x} + i \cdot (\alpha - \beta) \cdot \bar{y} \\ &= \gamma \cdot \bar{x} + \varepsilon \cdot \bar{y}, \end{aligned}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon \in \mathbb{C}$, respectiv

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \gamma \cdot \bar{x} + \varepsilon \cdot \bar{y} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\gamma - i \cdot \varepsilon) \cdot \bar{e} + \frac{1}{2} \cdot (\gamma + i \cdot \varepsilon) \cdot \sigma(\bar{e}) \\ &= \alpha \cdot \bar{e} + \beta \cdot \sigma(\bar{e}). \end{aligned}$$

Am stabilit egalitatea (3.24). \square

Dacă subspațiile V_0, V_1 din (2.33) sunt eigenspațiile generalizate ale valorilor proprii $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$, atunci ele admit bazele⁹ — via (3.23) —

$$\mathcal{B}_0 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{m_0}\} \subset V_0, \quad \mathcal{B}_1 = \{\sigma(\bar{e}_1), \dots, \sigma(\bar{e}_{m_0})\} \subset V_1.$$

Au loc egalitățile — pe baza Lemei 3.4 —

$$\begin{aligned} V_0 \oplus V_1 &= \left(\bigoplus_{\bar{e} \in \mathcal{B}_0} \mathbb{C}\bar{e} \right) \oplus \left(\bigoplus_{\bar{f} \in \mathcal{B}_1} \mathbb{C}\bar{f} \right) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{m_0} (\mathbb{C}\bar{e}_j \oplus \mathbb{C}\sigma(\bar{e}_j)) = \bigoplus_{j=1}^{m_0} \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{e}_j, \sigma(\bar{e}_j)\} \\ &= \bigoplus_{j=1}^{m_0} \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{x}_j, \bar{y}_j\} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m_0}, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m_0}\}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

unde $\bar{e}_j = \bar{x}_j + i \cdot \bar{y}_j$ și $\bar{x}_j, \bar{y}_j \in E$ pentru orice j .

Așadar, dacă $\{\lambda_0, \dots, \lambda_v\}$ sunt eigenvalorile reale iar

$$\{\lambda_{v+1}, \overline{\lambda_{v+1}}, \dots, \lambda_{v+w}, \overline{\lambda_{v+w}}\}$$

⁹ Este suficient să arătăm că sistemul \mathcal{B}_1 este liniar independent peste \mathbb{C} . În particular, va rezulta că vectorii din \mathcal{B}_1 sunt diferiți, adică numărul lor este m_0 . Relația $\sum_{i=1}^{m_0} z_i \cdot \sigma(\bar{e}_i) = 0_E$ ne conduce la $0_E = \sigma(0_E) = \sum_{i=1}^{m_0} \bar{z}_i \cdot \bar{e}_i$, de unde $z_i = 0$ pentru orice i .

eigenvalorile *nereale* (complexe) ale operatorului $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$, putem rescrie descompunerea (2.33) ca

$$E_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{j=0}^v V_j \oplus \bigoplus_{j=v+1}^{v+w} \text{Span}_{\mathbb{C}} \{\bar{x}_1^j, \dots, \bar{x}_{m_j}^j, \bar{y}_1^j, \dots, \bar{y}_{m_j}^j\},$$

unde setul

$$\mathcal{B}_j = \{\bar{e}_1^j, \dots, \bar{e}_{m_j}^j\} \subset E_{\mathbb{C}},$$

cu $\bar{e}_k^j = \bar{x}_k^j + i \cdot \bar{y}_k^j$ și $\bar{x}_k^j, \bar{y}_k^j \in E$, este bază a eigenspațiului generalizat corespunzând eigenvalorii λ_j pentru orice $j \in \overline{v+1, v+w}$. De asemenea, există bazele¹⁰ $\mathcal{B}_j \subset E$ pentru eigenspațiile generalizate V_j ale valorilor proprii reale λ_j , $j \in \overline{0, v}$.

O bază $\mathcal{S} \subset E_{\mathbb{C}}$ poartă numele de *bază invariantă la σ* (σ -bază) dacă $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$. Cu alte cuvinte, *dacă \bar{e} se găsește într-o σ -bază, atunci fie $\bar{e} \in E$, fie $\bar{e} \in E_{\mathbb{C}} \setminus E$ și $\sigma(\bar{e}) \in \mathcal{S}$, adică setul $\{\bar{e}, \sigma(\bar{e})\}$ este liniar independent peste corpul \mathbb{C} .*

Exemplul 3.3. Fie¹¹ $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$. Atunci, baza $\mathcal{B}_1 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, cu vectorii

$$\bar{e}_1 = \bar{i}_1, \quad \bar{e}_2 = \bar{i}_2, \quad \bar{e}_3 = i \cdot \bar{i}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix},$$

nu este σ -bază deoarece $\sigma(\bar{e}_3) = -\bar{e}_3 \notin \mathcal{B}_1$.

În schimb, baza $\mathcal{B}_2 = \{\bar{e}_4, \bar{e}_5, \bar{e}_6\}$, cu vectorii

$$\bar{e}_4 = \bar{i}_1, \quad \bar{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

este σ -bază pentru că $\bar{e}_4 \in \mathbb{R}^3$ și $\sigma(\bar{e}_5) = \bar{e}_6$.

Teorema 3.2. ([10, pag. 116, Theorem 1]) *Există și sunt unici operatorii \mathbb{R} -liniari $\mathcal{D}, \mathcal{N} : E \rightarrow E$ astfel încât*

$$T = \mathcal{D} + \mathcal{N}, \quad \mathcal{D} \circ \mathcal{N} = \mathcal{N} \circ \mathcal{D},$$

operatorul \mathcal{N} să fie nilpotent, complexificatul operatorului \mathcal{D} , $\mathcal{D}_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$, să fie diagonalizabil iar baza în raport cu care operatorul $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ admite o matrice-diagonală de reprezentare să fie o σ -bază.

¹⁰ Vezi (1.29).

¹¹ Reamintesc faptul că $(\mathbb{R}^3)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$.

Demonstrație. Are loc descompunerea

$$T_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_{\mathbb{C}} + \mathcal{N}_{\mathbb{C}}, \quad \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} = \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}},$$

a complexificatului $T_{\mathbb{C}}$ pe baza Teoremei 2.2. Aici, operatorul \mathbb{C} -liniar $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ este diagonalizabil iar operatorul \mathbb{C} -liniar $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ este nilpotent.

Introducem operatorii \mathbb{C} -liniari¹²

$$\mathcal{D}_1 = \sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \circ \sigma \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}), \quad \mathcal{N}_1 = \sigma \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \sigma \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}).$$

Fie $\mathcal{S} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m\} \subset E_{\mathbb{C}}$ o σ -bază în raport cu care matricea de reprezentare \mathbb{D} a operatorului $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}$ să fie

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_m \end{pmatrix}, \quad z_j \in \mathbb{C}.$$

Baza \mathcal{S} poate fi renumerotată astfel

$$\mathcal{S} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_t\} \cup \{\bar{e}_{t+1}, \bar{e}_{t+2}\} \cup \cdots \cup \{\bar{e}_{t+2q+1}, \bar{e}_{t+2q+2}\}, \quad (3.28)$$

unde $\bar{e}_j \in E$ pentru orice $j \in \overline{1, t}$, $\bar{e}_j \in E_{\mathbb{C}} \setminus E$ pentru orice $j \in \overline{t+1, t+2q+2}$ și $\sigma(\bar{e}_{t+2k+1}) = \bar{e}_{t+2k+2}$ pentru orice $0 \leq k \leq q$. Aici, $m = t + 2q + 2$, $q \in \mathbb{N}$.

Avem relațiile

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\bar{e}_j) &= (\sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}})(\sigma(\bar{e}_j)) = (\sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}})(\bar{e}_j) \\ &= \sigma(z_j \cdot \bar{e}_j) = \bar{z}_j \cdot \bar{e}_j, \quad j \in \overline{1, t}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

și

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\bar{e}_{t+2j+1}) &= (\sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}})(\sigma(\bar{e}_{t+2j+1})) = (\sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}})(\bar{e}_{t+2j+2}) \\ &= \sigma(z_{t+2j+2} \cdot \bar{e}_{t+2j+2}) = \bar{z}_{t+2j+2} \cdot \bar{e}_{t+2j+1}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

respectiv

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(\bar{e}_{t+2j+2}) &= (\sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}})(\sigma(\bar{e}_{t+2j+2})) = (\sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}})(\bar{e}_{t+2j+1}) \\ &= \sigma(z_{t+2j+1} \cdot \bar{e}_{t+2j+1}) = \bar{z}_{t+2j+1} \cdot \bar{e}_{t+2j+2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Atunci, pentru orice $\bar{e} \in E_{\mathbb{C}}$,

¹² Acest fapt va fi probat în (3.32).

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1(\bar{e}) &= \mathcal{D}_1 \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \bar{e}_j \right) = (\sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}}) \left(\sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j \cdot \sigma(\bar{e}_j) \right) \\
&= \sigma \left(\sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j \cdot (\mathcal{D}_{\mathbb{C}} \circ \sigma)(\bar{e}_j) \right) = \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j \cdot (\sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \circ \sigma)(\bar{e}_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \mathcal{D}_1(\bar{e}_j), \quad \alpha_j \in \mathbb{C},
\end{aligned} \tag{3.32}$$

deci operatorul $\mathcal{D}_1 : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ este liniar peste corpul \mathbb{C} și, via (3.29) – (3.31), este reprezentat în σ -baza \mathcal{S} de o matrice-diagonală.

Mai departe, avem

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_1^2 &= (\sigma \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \sigma) \circ (\sigma \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \sigma) = \sigma \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \sigma^2 \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \sigma \\
&= \sigma \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^2 \circ \sigma,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\mathcal{N}_1^k = \sigma \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^k \circ \sigma, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

deci operatorul $\mathcal{N}_1 : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ este liniar peste corpul \mathbb{C} și nilpotent.

În sfârșit, pentru orice $\bar{e} \in E_{\mathbb{C}}$, avem

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_1 \circ \mathcal{N}_1)(\bar{e}) &= (\sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \sigma)(\bar{e}) = (\sigma \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \circ \sigma)(\bar{e}) \\
&= (\mathcal{N}_1 \circ \mathcal{D}_1)(\bar{e}),
\end{aligned}$$

deci operatorii liniari $\mathcal{D}_1, \mathcal{N}_1$ comută.

Conform Lemei 1.6,

$$\begin{aligned}
T_{\mathbb{C}} &= \sigma \circ T_{\mathbb{C}} \circ \sigma = \sigma \circ (\mathcal{D}_{\mathbb{C}} + \mathcal{N}_{\mathbb{C}}) \circ \sigma \\
&= \sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \circ \sigma + \sigma \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \sigma \\
&= \mathcal{D}_1 + \mathcal{N}_1.
\end{aligned}$$

Din Lema 2.16 rezultă că

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = \mathcal{D}_1 = \sigma \circ \mathcal{D}_{\mathbb{C}} \circ \sigma, \quad \mathcal{N}_{\mathbb{C}} = \mathcal{N}_1 = \sigma \circ \mathcal{N}_{\mathbb{C}} \circ \sigma,$$

adică operatorii liniari complecși $\mathcal{D}_{\mathbb{C}}, \mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ sunt complexificările unor operatori liniari reali, notați cu \mathcal{D}, \mathcal{N} .

Matricea de reprezentare a operatorului $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$ este nilpotentă și coincide cu matricea de reprezentare — în baza din E care generează spațiile $E, E_{\mathbb{C}}$ — a operatorului \mathcal{N} . Astfel, acesta este nilpotent.

Fie $\{\mathcal{D}_2, \mathcal{N}_2\}$ altă descompunere de același tip, adică

$$T = \mathcal{D}_2 + \mathcal{N}_2, \quad \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{N}_2 = \mathcal{N}_2 \circ \mathcal{D}_2.$$

Atunci, dacă $\mathcal{B} = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$ este o bază a spațiului liniar real E iar $\mathbb{D}_2, \mathbb{N}_2$ sunt matricele de reprezentare în raport cu aceasta ale operatorilor $\mathcal{D}_2, \mathcal{N}_2$, matricea de reprezentare \mathbb{T} a operatorului T , în \mathcal{B} , are formula

$$\mathbb{T} = \mathbb{D}_2 + \mathbb{N}_2.$$

Via (1.38), putem scrie că

$$T_{\mathbb{C}} = (\mathcal{D}_2)_{\mathbb{C}} + (\mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}}.$$

De asemeni, conform Lemei 1.7,

$$(\mathcal{D}_2)_{\mathbb{C}} \circ (\mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}} = (\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}}, \quad (\mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}} \circ (\mathcal{D}_2)_{\mathbb{C}} = (\mathcal{N}_2 \circ \mathcal{D}_2)_{\mathbb{C}}.$$

Fie $\bar{z} = \sum_{i=1}^m z_i \cdot \bar{f}_i \in E_{\mathbb{C}}$. Egalitățile — Lema 1.2 arată că $(E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = E$, deci $((\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}})|_E = \mathcal{D}_2 \circ \mathcal{N}_2$ —

$$\begin{aligned} ((\mathcal{D}_2)_{\mathbb{C}} \circ (\mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}})(\bar{z}) &= (\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}} \left(\sum_{i=1}^m z_i \cdot \bar{f}_i \right) \quad (z_i \in \mathbb{C}) \\ &= \sum_{i=1}^m z_i \cdot ((\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}})|_E(\bar{f}_i) = \sum_{i=1}^m z_i \cdot (\mathcal{D}_2 \circ \mathcal{N}_2)(\bar{f}_i) \\ &= \sum_{i=1}^m z_i \cdot (\mathcal{N}_2 \circ \mathcal{D}_2)(\bar{f}_i) = (\mathcal{N}_2 \circ \mathcal{D}_2)_{\mathbb{C}} \left(\sum_{i=1}^m z_i \cdot \bar{f}_i \right) \\ &= ((\mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}} \circ (\mathcal{D}_2)_{\mathbb{C}})(\bar{z}) \end{aligned}$$

ne conduc la

$$\mathcal{D}_{\mathbb{C}} = (\mathcal{D}_2)_{\mathbb{C}}, \quad \mathcal{N}_{\mathbb{C}} = (\mathcal{N}_2)_{\mathbb{C}}.$$

Obținem că

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}_2, \quad \mathcal{N} = \mathcal{N}_2,$$

via Lema 1.2. \square

Un operator \mathbb{R} -liniar al cărui complexificat este diagonalizabil se numește *semi-simplu*¹³.

Revenim la (3.27). Operatorul $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}$ are matricea de reprezentare $\mathbb{D}_{V_0 \oplus V_1}$ în raport cu baza $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$. Mai precis,

$$\begin{aligned} &(\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\bar{e}_1) \cdots \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\bar{e}_{m_0}) \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\sigma(\bar{e}_1)) \cdots \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\sigma(\bar{e}_{m_0}))) \\ &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_{m_0} \sigma(\bar{e}_1) \cdots \sigma(\bar{e}_{m_0})) \cdot \mathbb{D}_{V_0 \oplus V_1} \end{aligned}$$

¹³ În limba engleză, *semisimple* [10, pag. 65].

și

$$\mathbb{D}_{V_0 \oplus V_1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \overline{\lambda_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \overline{\lambda_0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m_0}(\mathbb{C}).$$

Introducem numerele reale a_0, b_0 , unde $b_0 \neq 0$, pentru care $\lambda_0 = a_0 + b_0 \cdot i$. Știm că

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2} \cdot (\bar{e}_1 + \sigma(\bar{e}_1)), \quad \bar{y}_1 = \frac{1}{2i} \cdot (\bar{e}_1 - \sigma(\bar{e}_1)),$$

conform (1.35), (1.36).

Au loc relațiile

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}(\bar{e}_1) &= \lambda_0 \cdot \bar{e}_1 \\ &= (a_0 \cdot \bar{x}_1 - b_0 \cdot \bar{y}_1) + i \cdot (b_0 \cdot \bar{x}_1 + a_0 \cdot \bar{y}_1), \end{aligned} \quad (3.33)$$

respectiv

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}(\sigma(\bar{e}_1)) &= \overline{\lambda_0} \cdot \sigma(\bar{e}_1) \\ &= (a_0 \cdot \bar{x}_1 - b_0 \cdot \bar{y}_1) - i \cdot (b_0 \cdot \bar{x}_1 + a_0 \cdot \bar{y}_1), \end{aligned} \quad (3.34)$$

de unde

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}(\bar{x}_1) &= \frac{1}{2} \cdot [(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}(\bar{e}_1) + (\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}(\sigma(\bar{e}_1))] \\ &= a_0 \cdot \bar{x}_1 - b_0 \cdot \bar{y}_1 \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}(\bar{y}_1) &= \frac{1}{2i} \cdot [(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}(\bar{e}_1) - (\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}(\sigma(\bar{e}_1))] \\ &= b_0 \cdot \bar{x}_1 + a_0 \cdot \bar{y}_1. \end{aligned}$$

Fie baza — înlocuim setul $\{\bar{e}_1, \sigma(\bar{e}_1)\}$ cu setul $\{\bar{x}_1, \bar{y}_1\}$ în $\mathcal{B}_0 \cup \mathcal{B}_1$ —

$$\mathcal{B} = \{\bar{x}_1, \bar{y}_1\} \cup \{\bar{e}_2, \dots, \bar{e}_{m_0}, \sigma(\bar{e}_2), \dots, \sigma(\bar{e}_{m_0})\} \subset V_0 \oplus V_1.$$

Matricea de reprezentare \mathbb{W}_1 a operatorului $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}$ în raport cu noua bază este

$$\mathbb{W}_1 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{\lambda_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \overline{\lambda_0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m_0}(\mathbb{C}).$$

Adică,

$$\begin{aligned} & (\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\bar{x}_1) \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\bar{y}_1) \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\bar{e}_2) \cdots \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\bar{e}_{m_0}) \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\sigma(\bar{e}_2)) \cdots \mathcal{D}_{\mathbb{C}}(\sigma(\bar{e}_{m_0}))) \\ & = (\bar{x}_1 \bar{y}_1 \bar{e}_2 \cdots \bar{e}_{m_0} \sigma(\bar{e}_2) \cdots \sigma(\bar{e}_{m_0})) \cdot \mathbb{W}_1. \end{aligned}$$

Repetând procedeul de încă $m_0 - 1$ ori, deducem că există o bază $\mathcal{S} \subset E$ a spațiului liniar complex $E_{\mathbb{C}}$ în raport cu care operatorul liniar $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}$ să aibă matricea de reprezentare

$$\mathbb{W}_{m_0} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & \cdots & O_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2m_0}(\mathbb{R}).$$

Aici,

$$\mathcal{S} = \{\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \dots, \bar{x}_{m_0}, \bar{y}_{m_0}\}$$

și $V_0 \oplus V_1 = \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{S})$.

Observăm că

$$V_0 \oplus V_1 = (V_{01})_{\mathbb{C}}, \quad \text{unde } V_{01} = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}).$$

Conform Lemei 1.6, restricția operatorului liniar complex $(\mathcal{D}_{\mathbb{C}})|_{V_0 \oplus V_1}$ la¹⁴ V_{01} este un operator liniar real, notat cu $\mathcal{D}|_{V_{01}}$, a cărui matrice de reprezentare în raport cu \mathcal{S} este \mathbb{W}_{m_0} . Evident, acest operator liniar real este restricția la V_{01} a operatorului \mathcal{D} din Teorema 3.2.

Tot pe baza relației (3.23)¹⁵, deducem că, dacă vectorii $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\}$ — pentru $h \leq m_0$ — se scriu sub forma

$$\bar{e}_1 = \bar{e}, \bar{e}_2 = (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)(\bar{e}), \dots, \bar{e}_h = (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{h-1}(\bar{e}),$$

¹⁴ V_{01} este realificatul spațiului complex $V_0 \oplus V_1$.

¹⁵ În fapt, via egalitatea $(T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^k = \sigma \circ (T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I)^k \circ \sigma$, unde $k \geq 1$.

unde $h = \text{nil}(\bar{e}, T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)$, ceea ce implică faptul că

$$\text{Span}_{\mathbb{C}}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\} = Z(\bar{e}, T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I),$$

atunci

$$\text{nil}(\bar{e}, T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I) = \text{nil}(\sigma(\bar{e}), T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}_0 \cdot I)$$

și

$$\text{Span}_{\mathbb{C}}\{\sigma(\bar{e}_1), \dots, \sigma(\bar{e}_h)\} = Z(\sigma(\bar{e}), T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}_0 \cdot I).$$

Mai precis chiar, din relațiile

$$\begin{aligned} \bar{e}_k &= (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1}(\bar{e}) \\ &= (\sigma \circ (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1} \circ \sigma)(\bar{e}) \\ &= \sigma\left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1}(\sigma(\bar{e}))\right) \end{aligned}$$

rezultă că

$$\sigma(\bar{e}_k) = (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1}(\sigma(\bar{e})), \quad 1 \leq k \leq h.$$

Restricția la subspațiul liniar complex

$$Z_0 \oplus Z_1 \subseteq V_0 \oplus V_1,$$

unde

$$Z_0 = Z(\bar{e}, T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I), \quad Z_1 = Z(\sigma(\bar{e}), T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda}_0 \cdot I),$$

a operatorului $T_{\mathbb{C}}$ admite în baza $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, unde

$$\mathcal{B}_2 = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_h\}, \quad \mathcal{B}_3 = \{\sigma(\bar{e}_1), \dots, \sigma(\bar{e}_h)\},$$

matricea de reprezentare

$$\mathbb{T}_{Z_0 \oplus Z_1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \bar{\lambda}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \bar{\lambda}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \bar{\lambda}_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \bar{\lambda}_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2h}(\mathbb{C}).$$

Relațiile (3.33), (3.34) se rescriu ca

$$(T_{\mathbb{C}})|_{Z_0 \oplus Z_1}(\bar{e}_1) = \lambda_0 \cdot \bar{e}_1 + \bar{e}_2,$$

respectiv

$$(T_{\mathbb{C}})|_{Z_0 \oplus Z_1}(\sigma(\bar{e}_1)) = \bar{\lambda}_0 \cdot \sigma(\bar{e}_1) + \sigma(\bar{e}_2),$$

de unde

$$(T_{\mathbb{C}})|_{Z_0 \oplus Z_1}(\bar{x}_1) = a_0 \cdot \bar{x}_1 - b_0 \cdot \bar{y}_1 + \bar{x}_2$$

și

$$(T_{\mathbb{C}})|_{Z_0 \oplus Z_1}(\bar{y}_1) = b_0 \cdot \bar{x}_1 + a_0 \cdot \bar{y}_1 + \bar{y}_2.$$

La felul ca în cazul matricei \mathbb{W}_{m_0} , matricea de reprezentare a operatorului

$$(T_{\mathbb{C}})|_{Z_0 \oplus Z_1}$$

în baza

$$\mathcal{C} = \{\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2, \dots, \bar{x}_h, \bar{y}_h\} \quad (Z_0 \oplus Z_1 = \text{Span}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}))$$

este

$$\begin{aligned}
\mathbb{J} &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 & O_2 & \cdots & O_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 & \cdots & O_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ O_2 & \cdots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 \\ O_2 & \cdots & O_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_{\lambda_0} & O_2 & \cdots & O_2 \\ I_2 & E_{\lambda_0} & \cdots & O_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_2 & \cdots & I_2 & E_{\lambda_0} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2h}(\mathbb{R}), \tag{3.35}
\end{aligned}$$

unde

$$E_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Așadar, restricția operatorului liniar complex $(T_{\mathbb{C}})|_{Z_0 \oplus Z_1}$ la realificatul $Z_{01} = \text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C})$ al spațiului liniar $Z_0 \oplus Z_1$ este operatorul liniar real $T|_{Z_{01}}$ cu matricea de reprezentare \mathbb{J} în baza \mathcal{C} .

În concluzie, pentru operatorii liniari reali, matricele Jordan elementare J_k^λ din (3.19), (3.20) sunt înlocuite cu matrice (3.35) atunci când $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ [10, pag. 129, Theorem 2].

Tehnica descrisă în (3.18), (3.21), (3.22) ne permite modificarea bazelor $\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3$, respectiv \mathcal{C} pentru a înlocui matricea \mathbb{J} cu matricea

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}(\varepsilon) &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 & O_2 & \cdots & O_2 \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 & \cdots & O_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ O_2 & \cdots & \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 \\ O_2 & \cdots & O_2 & \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_{\lambda_0} & O_2 & \cdots & O_2 \\ \varepsilon I_2 & E_{\lambda_0} & \cdots & O_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_2 & \cdots & \varepsilon I_2 & E_{\lambda_0} \end{pmatrix}, \tag{3.36}
\end{aligned}$$

unde $\varepsilon > 0$. Evident, $\mathbb{J} = \mathbb{J}(1)$.

Capitolul 4

Aplicații

4.1 Sumare prin părți. Produsul Cauchy a două serii. Teorema lui F. Mertens

Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ un spațiu liniar m -dimensional peste corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, unde $m \leq n$, cu baza \mathcal{S}_1 — introdusă la pagina 1 —.

Fie $\bar{x} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot \bar{e}_i \in E$. Cantitatea

$$\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^m |\lambda_i|^2} \quad (4.1)$$

constituie *norma euclidiană*¹ de index 2 a spațiului liniar E [10, pag. 77]. Dubletul $\mathcal{E} = (E, \|\cdot\|_2)$ este un spațiu Banach [13, pag. 129].

Lema 4.1. ([9, pag. 109, Theorem 5.1.10]) *Fiind dat șirul $(\bar{a}_p)_{p \geq 0} \subset E$, convergent² la elementul $\bar{a} \in E$, este valabilă relația*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \overline{\mathcal{A}}_p = \bar{a},$$

unde $\overline{\mathcal{A}}_p = \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{i=0}^p \bar{a}_i$.

Demonstrație. Cum orice șir convergent este mărginit, introducem numărul $B > 0$ cu proprietatea că

$$\|\bar{a}_p\|_2 \leq B, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (4.2)$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există numărul natural $N = N(\varepsilon) \geq 1$ astfel încât

¹ Sau *l_2 -norma* [1, pag. 48].

² Orice două norme în E sunt echivalente [10, pag. 78, Proposition 1], deci putem studia convergența șirurilor în raport cu o normă *convenabilă*.

$$\|\bar{a}_p - \bar{a}\|_2 < \varepsilon, \quad p \geq N. \quad (4.3)$$

Realizăm estimările

$$\begin{aligned} \|\overline{\mathcal{A}}_p - \bar{a}\|_2 &= \left\| \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{i=0}^p (\bar{a}_i - \bar{a}) \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{p+1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} \|\bar{a}_i - \bar{a}\|_2 + \sum_{i=N}^p \|\bar{a}_i - \bar{a}\|_2 \right) \\ \text{(vezi (4.3))} &\leq \frac{1}{p+1} \cdot \left[\sum_{i=0}^{N-1} (\|\bar{a}_i\|_2 + \|\bar{a}\|_2) + \sum_{i=N}^p \varepsilon \right] \\ \text{(vezi (4.2))} &\leq \frac{1}{p+1} \cdot \left[\sum_{i=0}^{N-1} (2 \cdot B) + \sum_{i=N}^p \varepsilon \right] \\ &= \frac{1}{p+1} \cdot [2NB + (p - N + 1)\varepsilon], \quad p > N, \end{aligned}$$

de unde

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \|\overline{\mathcal{A}}_p - \bar{a}\|_2 \leq \varepsilon.$$

Trecem la limită, în ambii membri ai ultimei inegalități, $\varepsilon \searrow 0$. \square

Exemplul 4.1. Reciproca Lemei 4.1 nu este valabilă. Astfel, în $E = \mathbb{R}$, șirul³ $(\bar{a}_p)_{p \geq 0}$, unde $\bar{a}_p = (-1)^p$, nu este convergent dar șirul $(\overline{\mathcal{A}}_p)_{p \geq 0}$ converge la 0.

În contextul Lemei 4.1, să considerăm seria $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ cu sumele parțiale

$$\bar{A}_{-1} = 0_E, \quad \bar{A}_p = \sum_{i=0}^p \bar{a}_i, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Evident, $\bar{a}_p = \bar{A}_p - \bar{A}_{p-1}$ pentru orice⁴ p [9, pag. 102].

Acestei serii îi asociem *mediile Cesàro de ordinul 1*,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}}_p^1 &= \frac{\bar{A}_p^1}{p+1} = \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{i=0}^p \bar{A}_i \\ &= \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{i=0}^p [(p-i+1) \cdot \bar{a}_i], \quad p \geq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

³ Păstrăm "bara" de la notația vectorilor pentru uniformitate. În Exemplul 4.3 vom identifica, din același motiv, numerele complexe cu elementele setului $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$.

⁴ În particular, convergența seriei — adică, convergența șirului $(\bar{A}_p)_{p \geq -1}$ — implică faptul că $\lim_{p \rightarrow +\infty} \bar{a}_p = 0_E$.

Seria $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ se numește *sumabilă Cesàro* și are *suma (Cesàro)* \bar{S} dacă — [9, pag. 109] —

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \overline{\mathcal{A}}_p^1 = \bar{S} \in E.$$

Cu alte cuvinte, *mediile aritmetice ale sumelor parțiale consecutive ale seriei în discuție converg la \bar{S} în norma $\|\star\|_2$.*

Lema 4.1 ne arată că *orice serie convergentă de elemente din E este și sumabilă Cesàro iar suma seriei coincide cu suma sa Cesàro.*

Exemplul 4.2. În cazul șirului $(\bar{a}_p)_{p \geq 0}$ din Exemplul 4.1, seria $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ are sumele parțiale $(\bar{A}_p)_{p \geq 0}$, unde $\bar{A}_{2p} = 1, \bar{A}_{2p+1} = 0$ pentru orice p , deci nu este convergentă. Însă, suma sa Cesàro este $\bar{S} = \frac{1}{2}$ [9, ibid.].

În mulțimea \mathbb{R}^2 , construim *pătratul $OABC$* ,

$$[OABC] = \{(p, k) | 0 \leq p, k \leq M\} \cap \mathbb{N}^2,$$

de vârfuri $O = (0, 0), A = (M, 0), B = (M, M)$ și $C = (0, M)$. Aici, $M \in \mathbb{N}$. Plecând de la suprafețele plane $[OAB], [OAC] \subset \mathbb{R}^2$ mărginite de liniile poligonale $[OA] \cup [AB] \cup [BO]$ și $[OA] \cup [AC] \cup [CO]$ — dreapta OA este *orizontală* iar dreapta OC *verticală* —, introducem mulțimile

$$\Delta = [OAB] \cap \mathbb{N}^2, \quad \Theta = [OAC] \cap \mathbb{N}^2.$$

Evident, Δ și Θ reprezintă *jumătăți* din pătratul $[OABC]$.

Mulțimile Δ, Θ sunt partiționate în două feluri,

$$\Delta = \bigcup_{p=0}^M \Delta_p = \bigcup_{k=0}^M \Delta^k,$$

unde

$$\Delta_p = \{(p, k) \in \mathbb{N}^2 | 0 \leq k \leq p\}, \quad \Delta^k = \{(p, k) \in \mathbb{N}^2 | k \leq p \leq M\},$$

și

$$\Theta = \bigcup_{p=0}^M \Theta_p = \bigcup_{k=0}^M \Theta^k,$$

unde

$$\Theta_p = \{(p, k) \in \mathbb{N}^2 | 0 \leq k \leq M - p\}, \quad \Theta^k = \{(p, k) \in \mathbb{N}^2 | 0 \leq p \leq M - k\}.$$

Afirm că *altă partiționare a triunghiului Θ se face prin linii paralele cu dreapta CA ,*

$$\Theta = \bigcup_{v=0}^M \Psi_v, \quad \Psi_v = \{(p, k) | p + k = v\} \cap \mathbb{N}^2.$$

Într-adevăr, pentru orice $(p_0, k_0) \in \Theta$ există *exact* un element $v_0 \in \overline{0, M}$ astfel încât $(p_0, k_0) \in \Psi_{v_0}$. Mai precis,

$$(p_0, k_0) \in \Psi_{p_0+k_0}.$$

Lema 4.2. Fiind dat șirul $(\bar{a}_{pk})_{(p,k) \in [0ABC]} \subset E$, au loc identitățile

$$\sum_{p=0}^M \sum_{k=0}^p \bar{a}_{pk} = \sum_{k=0}^M \sum_{p=k}^M \bar{a}_{pk}, \quad (4.5)$$

respectiv

$$\sum_{p=0}^M \sum_{k=0}^{M-p} \bar{a}_{pk} = \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} \bar{a}_{pk} \quad (4.6)$$

și

$$\sum_{p=0}^M \sum_{k=0}^p \bar{a}_{k(p-k)} = \sum_{p=0}^M \sum_{k=0}^{M-p} \bar{a}_{pk}. \quad (4.7)$$

Demonstrație. Se observă că

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^M \sum_{k=0}^p \bar{a}_{pk} &= \sum_{p=0}^M \sum_{(p,k) \in \Delta_p} \bar{a}_{pk} = \sum_{(p,k) \in \Delta} \bar{a}_{pk} \\ &= \sum_{k=0}^M \sum_{(p,k) \in \Delta^k} \bar{a}_{pk} = \sum_{k=0}^M \sum_{p=k}^M \bar{a}_{pk}. \end{aligned}$$

Apoi,

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^M \sum_{k=0}^{M-p} \bar{a}_{pk} &= \sum_{p=0}^M \sum_{(p,k) \in \Theta_p} \bar{a}_{pk} = \sum_{(p,k) \in \Theta} \bar{a}_{pk} \\ &= \sum_{k=0}^M \sum_{(p,k) \in \Theta^k} \bar{a}_{pk} = \sum_{k=0}^M \sum_{p=0}^{M-k} \bar{a}_{pk}. \end{aligned}$$

În sfârșit,

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^M \sum_{k=0}^p \bar{a}_{k(p-k)} &= \sum_{p=0}^M \sum_{(v,w) \in \Psi_p} \bar{a}_{vw} = \sum_{(v,w) \in \Theta} \bar{a}_{vw} \\ &= \sum_{p=0}^M \sum_{(p,k) \in \Theta_p} \bar{a}_{pk} = \sum_{p=0}^M \sum_{k=0}^{M-p} \bar{a}_{pk}. \end{aligned}$$

Demonstrația acestor tehnici de *sumare prin părți* [9, pag. 106] s-a încheiat. \square

Fie aplicația (operația) $\star : E^2 \rightarrow E$ pentru care (i) există numărul $A \geq 1$ astfel încât

$$\|\bar{e} \star \bar{f}\|_2 \leq A \cdot \|\bar{e}\|_2 \cdot \|\bar{f}\|_2,$$

(ii) avem *bi-omogenitate*, adică

$$\lambda \cdot (\bar{e} \star \bar{f}) = (\lambda \cdot \bar{e}) \star \bar{f} = \bar{e} \star (\lambda \cdot \bar{f}),$$

și (iii) *distributivitate* la adunare, adică

$$\bar{e} \star (\bar{f} + \bar{g}) = (\bar{e} \star \bar{f}) + (\bar{e} \star \bar{g}), \quad (\bar{e} + \bar{f}) \star \bar{g} = (\bar{e} \star \bar{g}) + (\bar{f} \star \bar{g}),$$

pentru orice $\bar{e}, \bar{f}, \bar{g} \in E$ și $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemplul 4.3. Pentru $E = \mathbb{C}$, făcând identificarea $\bar{e} = (z) \equiv z \in \mathbb{C}$, avem

$$\bar{e} \star \bar{f} = (z_1) \star (z_2) = (z_1 \cdot z_2) \equiv z_1 \cdot z_2, \quad z_j \in \mathbb{C}, j \in \{1, 2\}.$$

Pentru $E = \mathbb{C}^{q^2}$, unde $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, putem realiza identificarea — via (1.11) —

$$\bar{e} = \sum_{j=1}^{q^2} e_j \cdot \bar{i}_j \equiv \begin{pmatrix} e_q & e_{2q} & \cdots & e_{q^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1 & e_{q+1} & \cdots & e_{(q-1)q+1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C}).$$

Atunci,

$$\begin{aligned} \bar{e} \star \bar{f} &= \begin{pmatrix} e_q & e_{2q} & \cdots & e_{q^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1 & e_{q+1} & \cdots & e_{(q-1)q+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_q & f_{2q} & \cdots & f_{q^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1 & f_{q+1} & \cdots & f_{(q-1)q+1} \end{pmatrix} \\ &= (a_{rp})_{1 \leq r, p \leq q}, \end{aligned}$$

unde

$$a_{rp} \equiv (a_{rp}) = (e_r \ e_{r+q} \ \cdots \ e_{r+(q-1)q}) \cdot \begin{pmatrix} f_{pq} \\ f_{pq-1} \\ \vdots \\ f_{(p-1)q+1} \end{pmatrix}.$$

Se observă că

$$\begin{aligned} \|\bar{e} \star \bar{f}\|_2 &= \sqrt{\sum_{r,p=1}^q |a_{rp}|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{r,p=1}^q (|e_r|^2 + \dots + |e_{r+(q-1)q}|^2) \cdot (|f_{pq}|^2 + \dots + |f_{(p-1)q+1}|^2)} \\ &= \|\bar{e}\|_2 \cdot \|\bar{f}\|_2, \end{aligned}$$

deci $A = 1$.

Fie seriile $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ și $\sum_{p \geq 0} \bar{b}_p$ de elemente din spațiul liniar E . Prin *produsul lor Cauchy* înțelegem seria $\sum_{p \geq 0} \bar{c}_p$, unde

$$\bar{c}_p = \sum_{i=0}^p \bar{a}_i \star \bar{b}_{p-i}, \quad p \in \mathbb{N},$$

vezi [9, pag. 111].

Lema 4.3. ([9, pag. 112, Theorem 5.2.1]) *Produsul Cauchy a două serii convergente, de sume \bar{S}_1 și \bar{S}_2 , este sumabil Cesàro și are suma Cesàro*

$$\bar{S} = \bar{S}_1 \star \bar{S}_2. \quad (4.8)$$

Demonstrație. Introducem numărul $B > 0$ cu proprietatea că

$$\|\bar{A}_p - \bar{S}_1\|_2 \leq B, \quad \|\bar{B}_p - \bar{S}_2\|_2 \leq B, \quad p \in \mathbb{N}, \quad (4.9)$$

unde $\bar{A}_p = \sum_{i=0}^p \bar{a}_i$ și $\bar{B}_p = \sum_{i=0}^p \bar{b}_i$.

Fie $\varepsilon > 0$. Există numărul natural $N = N(\varepsilon) \geq 1$ astfel încât

$$\|\bar{A}_p - \bar{S}_1\|_2 < \varepsilon, \quad \|\bar{B}_p - \bar{S}_2\|_2 < \varepsilon, \quad p \geq N. \quad (4.10)$$

Au loc egalitățile — vezi (4.4) —

$$\begin{aligned}
(p+1) \cdot \overline{\mathcal{C}}_p^1 &= \overline{C}_p^1 = \sum_{i=0}^p \overline{C}_i = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^i \overline{c}_j = \sum_{i=0}^p (p-i+1) \cdot \overline{c}_i \\
&= \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i (p-i+1) \cdot (\overline{a}_k \star \overline{b}_{i-k}) = \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i \overline{\zeta}_{ik} \\
(\text{vezi (4.5)}) &= \sum_{k=0}^p \sum_{i=k}^p \overline{\zeta}_{ik} = \sum_{k=0}^p \overline{a}_k \star \sum_{i=k}^p (p-i+1) \cdot \overline{b}_{i-k} \\
(r=i-k) &= \sum_{k=0}^p \overline{a}_k \star \sum_{r=0}^{p-k} (p-k-r+1) \cdot \overline{b}_r \\
&= \sum_{k=0}^p \overline{a}_k \star \sum_{r=0}^{p-k} \overline{B}_r = \sum_{k=0}^p \sum_{r=0}^{p-k} \overline{a}_k \star \overline{B}_r = \sum_{k=0}^p \sum_{r=0}^{p-k} \overline{\eta}_{kr} \\
(\text{vezi (4.6)}) &= \sum_{r=0}^p \sum_{k=0}^{p-r} \overline{\eta}_{kr} = \sum_{r=0}^p \sum_{k=0}^{p-r} \overline{a}_k \star \overline{B}_r \\
&= \sum_{r=0}^p \left(\sum_{k=0}^{p-r} \overline{a}_k \right) \star \overline{B}_r = \sum_{r=0}^p \overline{A}_{p-r} \star \overline{B}_r.
\end{aligned}$$

Pe baza (4.9), (4.10), introducem elementele $\overline{u}_p, \overline{v}_p \in E$ prin formulele

$$\overline{A}_p = \overline{S}_1 + \overline{u}_p, \quad \overline{B}_p = \overline{S}_2 + \overline{v}_p, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Deducem că

$$\begin{aligned}
\overline{C}_p^1 &= (p+1) \cdot (\overline{S}_1 \star \overline{S}_2) + \overline{S}_1 \star \left(\sum_{r=0}^p \overline{v}_r \right) + \left(\sum_{r=0}^p \overline{u}_{p-r} \right) \star \overline{S}_2 + \sum_{r=0}^p \overline{u}_{p-r} \star \overline{v}_r \\
&= (p+1) \cdot (\overline{S}_1 \star \overline{S}_2) \\
&+ [(p+1) \cdot \overline{S}_1] \star \left(\frac{1}{p+1} \cdot \sum_{r=0}^p \overline{v}_r \right) + \left(\frac{1}{p+1} \cdot \sum_{r=0}^p \overline{u}_{p-r} \right) \star [(p+1) \cdot \overline{S}_2] \\
&+ \sum_{r=0}^p \overline{u}_{p-r} \star \overline{v}_r \\
&= (p+1) \cdot (\overline{S}_1 \star \overline{S}_2) \\
&+ [(p+1) \cdot \overline{S}_1] \star \left(\frac{1}{p+1} \cdot \sum_{r=0}^p \overline{v}_r \right) + \left(\frac{1}{p+1} \cdot \sum_{r=0}^p \overline{u}_r \right) \star [(p+1) \cdot \overline{S}_2] \\
&+ \sum_{r=0}^p \overline{u}_{p-r} \star \overline{v}_r \\
&= (p+1) \cdot (\overline{S}_1 \star \overline{S}_2) + [(p+1) \cdot \overline{S}_1] \star \overline{\mathcal{V}}_p + \overline{\mathcal{U}}_p \star [(p+1) \cdot \overline{S}_2] \\
&+ \sum_{r=0}^p \overline{u}_{p-r} \star \overline{v}_r.
\end{aligned}$$

Deoarece $\lim_{p \rightarrow +\infty} \bar{u}_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \bar{v}_p = 0_E$ și

$$\|\bar{S}_1 \star \bar{\mathcal{V}}_p\|_2 \leq A \cdot \|\bar{S}_1\|_2 \cdot \|\bar{\mathcal{V}}_p\|_2, \quad \|\bar{\mathcal{U}}_p \star \bar{S}_2\|_2 \leq A \cdot \|\bar{S}_2\|_2 \cdot \|\bar{\mathcal{U}}_p\|_2,$$

Lema 4.1 ne conduce la

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \bar{S}_1 \star \bar{\mathcal{V}}_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \bar{\mathcal{U}}_p \star \bar{S}_2 = 0_E.$$

Mai departe, pentru $p \geq 2 \cdot N - [9, \text{pag. } 113]$ —, facem estimările

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{r=0}^p \bar{u}_{p-r} \star \bar{v}_r \right\|_2 &\leq A \cdot \sum_{r=0}^p \|\bar{u}_{p-r}\|_2 \cdot \|\bar{v}_r\|_2 \\ &= A \cdot \left(\sum_{r=0}^{N-1} + \sum_{r=N}^{p-N} + \sum_{r=p-N+1}^p \right) \|\bar{u}_{p-r}\|_2 \cdot \|\bar{v}_r\|_2 \\ &\leq A \cdot \left(\sum_{r=0}^{N-1} \varepsilon \cdot B + \sum_{r=N}^{p-N} \varepsilon^2 + \sum_{r=p-N+1}^p B \cdot \varepsilon \right) \\ &= A \cdot (2NB \cdot \varepsilon + (p - 2N + 1) \cdot \varepsilon^2), \end{aligned}$$

de unde

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p+1} \cdot \left\| \sum_{r=0}^p \bar{u}_{p-r} \star \bar{v}_r \right\|_2 \leq A \cdot \varepsilon^2.$$

Am ajuns la

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \|\bar{\mathcal{C}}_p^1 - \bar{S}_1 \star \bar{S}_2\|_2 \leq A \cdot \varepsilon^2.$$

Trecem la limită, în ambii membri ai ultimei inegalități, $\varepsilon \searrow 0$. \square

Exemplul 4.4. Fie seria $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$, unde $\bar{a}_p = \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}}$, conform [9, pag. 112]. Atunci, termenul general al produsului Cauchy al seriilor $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ și $\sum_{p \geq 0} \bar{b}_p$, unde $\bar{a}_p = \bar{b}_p$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$, are forma

$$\bar{c}_p = \sum_{i=0}^p \bar{a}_i \cdot \bar{a}_{p-i} = (-1)^p \cdot \sum_{i=0}^p \frac{1}{\sqrt{(i+1) \cdot (p-i+1)}}.$$

Via inegalitatea mediilor, obținem că

$$\begin{aligned} |\bar{c}_p| &= \sum_{i=0}^p \frac{1}{\sqrt{(i+1) \cdot (p-i+1)}} \geq \sum_{i=0}^p \frac{2}{p+2} = \frac{2(p+1)}{p+2} \\ &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{p+2}\right), \quad p \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

respectiv

$$\liminf_{p \rightarrow +\infty} |\bar{c}_p| \geq 2,$$

adică produsul Cauchy $\sum_{p \geq 0} \bar{c}_p$ nu convergent în $E = \mathbb{R}$.

Conform [9, pag. 106, Theorem 5.1.5], seria alternantă $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ este convergentă.

Cu alte cuvinte, nu orice produs Cauchy de serii convergente este convergent.

Lema 4.4. ([9, pag. 113, Corollary]) *Dacă produsul Cauchy a două serii convergente, de sume \bar{S}_1 și \bar{S}_2 , este convergent, atunci suma sa are formula (4.8).*

Demonstrație. Deoarece produsul Cauchy este convergent, el este sumabil Cesàro iar suma sa \bar{S} coincide cu suma Cesàro, vezi Lema 4.1. Pe de altă parte, suma Cesàro are — via Lema 4.3 — valoarea dată în (4.8). \square

Teorema 4.1. ([9, pag. 113, Theorem 5.2.2]) *Produsul Cauchy a două serii absolut convergente este absolut convergent.*

Demonstrație. Dacă seriile $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ și $\sum_{p \geq 0} \bar{b}_p$ sunt absolut convergente, atunci seriile $\sum_{p \geq 0} u_p$, $\sum_{p \geq 0} v_p$, unde

$$u_p = \|\bar{a}_p\|_2, \quad v_p = \|\bar{b}_p\|_2, \quad p \in \mathbb{N},$$

și

$$\|\bar{c}_p\|_2 = \left\| \sum_{i=0}^p \bar{a}_i \star \bar{b}_{p-i} \right\|_2 \leq A \cdot \sum_{i=0}^p u_i v_{p-i},$$

sunt convergente. Le notăm sumele cu U , respectiv V .

Se observă că

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p \|\bar{c}_i\|_2 &\leq A \cdot \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^i u_j v_{i-j} \\ \text{(vezi (4.7))} \quad &= A \cdot \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^{p-i} u_i v_j = A \cdot \left(\sum_{i=0}^p u_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p-i} v_j \right) \\ &\leq A \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j \right) = A \cdot UV, \quad p \geq 0, \end{aligned}$$

de unde $\sum_{i=0}^{+\infty} \|c_i\|_2 \leq AUV < +\infty$. \square

Teorema 4.2. (F. Mertens, [9, pag. 114, Exercise 6]) *Dacă cel puțin una dintre seriile convergente $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$, $\sum_{p \geq 0} \bar{b}_p$, de sume \bar{S}_1 și \bar{S}_2 , este absolut convergentă, atunci produsul lor Cauchy este convergent și are suma $\bar{S}_1 \star \bar{S}_2$.*

Demonstrație. Să presupunem că seria $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ este absolut convergentă.

La fel ca la Lema 4.3, introducem numărul $B > 0$ cu proprietatea că

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|\bar{a}_i\|_2 < B, \quad \|\bar{B}_p - \bar{S}_2\|_2 = \|\bar{v}_p\|_2 < B, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există numărul natural $N = N(\varepsilon) \geq 1$ astfel încât

$$\sum_{j=N}^{+\infty} \|\bar{a}_j\|_2 < \varepsilon, \quad \|\bar{v}_p\|_2 < \varepsilon, \quad p \geq N.$$

Atunci, sunt valabile identitățile

$$\begin{aligned} \bar{C}_p &= \sum_{i=0}^p \bar{c}_i = \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i \bar{a}_k \star \bar{b}_{i-k} = \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i \bar{\zeta}_{ik} = \sum_{k=0}^p \sum_{i=k}^p \bar{\zeta}_{ik} \\ &= \sum_{k=0}^p \sum_{i=k}^p \bar{a}_k \star \bar{b}_{i-k} = \sum_{k=0}^p \bar{a}_k \star \left(\sum_{i=k}^p \bar{b}_{i-k} \right) = \sum_{k=0}^p \bar{a}_k \star \left(\sum_{r=0}^{p-k} \bar{b}_r \right) \\ &= \sum_{k=0}^p \bar{a}_k \star \bar{B}_{p-k} = \sum_{k=0}^p \bar{a}_k \star (\bar{S}_2 + \bar{v}_{p-k}) = \left(\sum_{k=0}^p \bar{a}_k \right) \star \bar{S}_2 + \sum_{k=0}^p \bar{a}_k \star \bar{v}_{p-k} \\ &= \bar{A}_p \star \bar{S}_2 + \sum_{k=0}^p \bar{a}_k \star \bar{v}_{p-k}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Mai departe, deducem că

$$\begin{aligned} \|\bar{A}_p \star \bar{S}_2 - \bar{S}_1 \star \bar{S}_2\|_2 &= \|(\bar{A}_p - \bar{S}_1) \star \bar{S}_2\|_2 \\ &\leq A \cdot \|\bar{S}_2\|_2 \cdot \|\bar{A}_p - \bar{S}_1\|_2 \\ &= A \cdot \|\bar{S}_2\|_2 \cdot \|\bar{u}_p\|_2 \\ &\rightarrow 0 \quad \text{când } p \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

respectiv — pentru $p \geq 2 \cdot N$ —

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^p \bar{a}_k \star \bar{v}_{p-k} \right\|_2 &\leq A \cdot \sum_{k=0}^p \|\bar{a}_k\|_2 \cdot \|\bar{v}_{p-k}\|_2 = A \cdot \left(\sum_{k=0}^{p-N} + \sum_{k=p-N+1}^p \right) \|\bar{a}_k\|_2 \cdot \|\bar{v}_{p-k}\|_2 \\
&\leq A \cdot \left[\sum_{k=0}^{p-N} (\|\bar{a}_k\|_2 \cdot \varepsilon) + \left(\sum_{k=p-N+1}^p \|\bar{a}_k\|_2 \right) \cdot B \right] \\
&\leq A \cdot \left[\left(\sum_{i=0}^{+\infty} \|\bar{a}_i\|_2 \right) \cdot \varepsilon + \left(\sum_{j=N}^{+\infty} \|\bar{a}_j\|_2 \right) \cdot B \right] < A \cdot (B \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot B) \\
&= 2AB \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

În concluzie,

$$\|\bar{C}_p - \bar{S}_1 \star \bar{S}_2\|_2 \leq \|\bar{A}_p \star \bar{S}_2 - \bar{S}_1 \star \bar{S}_2\|_2 + \left\| \sum_{k=0}^p \bar{a}_k \star \bar{v}_{p-k} \right\|_2,$$

de unde

$$\limsup_{p \rightarrow +\infty} \|\bar{C}_p - \bar{S}_1 \star \bar{S}_2\|_2 \leq 2AB \cdot \varepsilon.$$

Trecem la limită, în ambii membri ai ultimei inegalități, $\varepsilon \searrow 0$. Am ajuns la

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \bar{C}_p = \bar{S}_1 \star \bar{S}_2.$$

Dat fiind că operația “ \star ” nu este neapărat comutativă, trebuie să arătăm că seria $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ nu joacă niciun rol privilegiat în formula (4.11).

Plecând de la observația că

$$\bar{a}_k \star \bar{b}_{i-k} = \bar{a}_{i-(i-k)} \star \bar{b}_{(i-k)},$$

refacem estimările anterioare. Astfel,

$$\begin{aligned}
\bar{C}_p &= \sum_{i=0}^p \bar{c}_i = \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i \bar{a}_k \star \bar{b}_{i-k} = \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i \bar{a}_{i-k} \star \bar{b}_k \\
&= \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i \bar{\zeta}_{ik} = \sum_{k=0}^p \sum_{i=k}^p \bar{\zeta}_{ik} = \sum_{k=0}^p \sum_{i=k}^p \bar{a}_{i-k} \star \bar{b}_k \\
&= \sum_{k=0}^p \left(\sum_{i=k}^p \bar{a}_{i-k} \right) \star \bar{b}_k = \sum_{k=0}^p \left(\sum_{r=0}^{p-k} \bar{a}_r \right) \star \bar{b}_k \\
&= \sum_{k=0}^p \bar{A}_{p-k} \star \bar{b}_k = \sum_{k=0}^p (\bar{S}_1 + \bar{u}_{p-k}) \star \bar{b}_k = \bar{S}_1 \star \left(\sum_{k=0}^p \bar{b}_k \right) + \sum_{k=0}^p \bar{u}_{p-k} \star \bar{b}_k \\
&= \bar{S}_1 \star \bar{B}_p + \sum_{k=0}^p \bar{u}_{p-k} \star \bar{b}_k,
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Lema 4.5. ([10, pag. 84, Lemma 2]) *Fiind date șirurile $(A_p)_{p \geq 0}, (B_p)_{p \geq 0} \subset \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ astfel încât seriile*

$$\sum_{p \geq 0} A_p, \quad \sum_{p \geq 0} B_p \quad (4.12)$$

să fie absolut convergente în raport cu l_2 -norma spațiului $\mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^{m^2}$, seria $\sum_{p \geq 0} C_p$, unde

$$C_p = \sum_{k=0}^p A_k \cdot B_{p-k}, \quad p \in \mathbb{N},$$

este absolut convergentă. În plus, suma sa C este produsul sumelor seriilor din (4.12), adică

$$C = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} A_i \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{+\infty} B_j \right).$$

Demonstrație. În contextul Exemplului 4.3, introducem operația

$$\begin{aligned} (\mathbb{C}^{m^2} \ni) \quad \bar{e} \star \bar{f} &= \begin{pmatrix} \text{col}_{(1)} A \\ \vdots \\ \text{col}_{(m)} A \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \text{col}_{(1)} B \\ \vdots \\ \text{col}_{(m)} B \end{pmatrix} \\ &\equiv A \star B = A \cdot B, \quad A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

Concluzia rezultă din Teorema 4.1. \square

4.2 Exponențiala unei matrice pătrate cu elemente numerice

Fie $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, unde $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Elementul — $A^0 = I_m$ —

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \cdot A^p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} \cdot A^i = \lim_{p \rightarrow +\infty} \bar{A}_p \\ &\in \mathcal{M}_m(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^{m^2} \end{aligned}$$

se numește *exponențiala*⁵ matricei A . Aici, $\bar{A}_p = \sum_{i=0}^p \bar{a}_i$ și $\bar{a}_p = \frac{1}{p!} \cdot A^p$ pentru orice p .

⁵ În limba engleză, *exponential of A*, [15, pag. 12].

În contextul Lemei 4.5, au loc relațiile

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{v,w=1}^m |a_{vw}|^2}, \quad A = (a_{vw})_{1 \leq v,w \leq m},$$

respectiv

$$\|A^2\|_2 = \|A \star A\|_2 \leq (\|A\|_2)^2.$$

Prin inducție matematică, probăm că

$$\|A^p\|_2 \leq (\|A\|_2)^p, \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

iar de aici, dat fiind că seria numerică $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{p!} \cdot (\|A\|_2)^p$ este convergentă — are suma e^s , unde $s = \|A\|_2$ —, deducem că seria $\sum_{p \geq 0} \bar{a}_p$ este absolut convergentă în spațiul liniar $E = \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.

Teorema 4.3. ([15, pag. 13]) *Fie $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. Au loc relațiile următoare:*

(i) *dacă $A \cdot B = B \cdot A$, atunci*

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B, \quad e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A;$$

(ii)

$$e^{O_m} = I_m, \quad (e^A)^{-1} = e^{-A};$$

(iii) *dacă⁶ $A \sim B$, atunci $e^A \sim e^B$;*

(iv) ([10, pag. 89, Problem 12]) *dacă $A \cdot B = B \cdot A$, atunci*

$$A \cdot e^B = e^B \cdot A.$$

Demonstrație. Partea (i). Sunt valabile egalitățile — folosim binomul lui Newton!

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \cdot (A+B)^p = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} \cdot (A+B)^i \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \frac{1}{i!} \cdot \sum_{j=0}^i \binom{j}{i} \cdot A^j \cdot B^{i-j} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^i \left(\frac{1}{j!} \cdot A^j \right) \cdot \left[\frac{1}{(i-j)!} \cdot B^{i-j} \right] \\ &= \lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^p C_i, \quad C_i = \sum_{j=0}^i A_j \star B_{i-j}, \end{aligned}$$

unde $U_p = \frac{1}{p!} \cdot U^p$ pentru orice $U \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.

⁶ Relația de echivalență “ \sim ” a fost definită la pagina 6.

Aplicăm Lema 4.5. Astfel,

$$e^{A+B} = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} A_j \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} B_q \right) = e^A \cdot e^B.$$

Cea de-a doua identitate rezultă din egalitatea $e^{A+B} = e^{B+A} = e^B \cdot e^A$.

Partea (ii). Concluzia rezultă din relațiile

$$\begin{aligned} I_m &= I_m + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} \cdot (O_m)^p = e^{O_m} = e^{A+(-A)} = e^{(-A)+A} \\ &= e^A \cdot e^{-A} = e^{-A} \cdot e^A. \end{aligned}$$

Partea (iii). Vom întrebuința identitatea (1.18). Într-adevăr, deoarece

$$\begin{aligned} &\left\| P^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \cdot B^i \right) \cdot P - P^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \cdot B^i \right) \cdot P \right\|_2 \\ &\leq \|P^{-1}\|_2 \cdot \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \cdot B^i - \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \cdot B^i \right\|_2 \cdot \|P\|_2 \\ &\leq \|P^{-1}\|_2 \cdot \|P\|_2 \cdot \left[\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{j!} \cdot (\|B\|_2)^j \right], \quad k \geq 0, \end{aligned}$$

deducem că

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \cdot B^i \right) \cdot P = P^{-1} \cdot e^B \cdot P.$$

Conform (1.18), avem

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot e^B \cdot P &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \cdot (P^{-1} \cdot B^i \cdot P) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \cdot A^i \\ &= e^A. \end{aligned}$$

Partea (iv). Observăm că

$$\begin{aligned} A \cdot B^2 &= (A \cdot B) \cdot B = (B \cdot A) \cdot B = B \cdot (A \cdot B) = B \cdot (B \cdot A) \\ &= B^2 \cdot A. \end{aligned}$$

Mai departe, prin inducție matematică, stabilim egalitatea

$$A \cdot B^p = B^p \cdot A, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Pentru a trage concluzia, la fel ca anterior, utilizăm distributivitatea înmulțirii matricelor față de adunarea acestora. \square

4.3 Calculul exponențialei unei matrice pătrate cu elemente complexe

Fie $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, unde $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Atunci, matricea A poate fi considerată drept *matricea de reprezentare* în baza canonică $\mathcal{S}_1 = \mathcal{BC} = \{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_m\}$ a unui element T din spațiul linear complex $L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$, și anume — $A = \mathbb{T}$ —

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m.$$

Conform Teoremei 2.2, există baza \mathcal{S}_2 a spațiului linear \mathbb{C}^m în raport cu care operatorul T să fie reprezentat de matricea \mathbb{T}_1 cu formula

$$\mathbb{T}_1 = \mathbb{D} + \mathbb{N}, \quad \mathbb{D} \cdot \mathbb{N} = \mathbb{N} \cdot \mathbb{D}.$$

Aici,

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}, \quad \text{unde } d_i \in \mathbb{C}, i \in \overline{1, m}, \quad \mathbb{N}^m = O_m.$$

Deducem că

$$e^{\mathbb{D}} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{d_m} \end{pmatrix}, \quad e^{\mathbb{N}} = \sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{q!} \cdot \mathbb{N}^q.$$

Teorema 4.3 ne conduce la

$$e^{\mathbb{T}_1} = e^{\mathbb{D}} \cdot e^{\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{d_m} \end{pmatrix} \cdot \left(\sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{q!} \cdot \mathbb{N}^q \right).$$

Relațiile (1.15) arată că există matricea neregulară $P \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ astfel încât

$$A = P \cdot \mathbb{T}_1 \cdot P^{-1}.$$

Plecând de la concluzia (iii) a Teoremei 4.3, stabilim că

$$e^A = P \cdot e^{\mathbb{T}_1} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{d_m} \end{pmatrix} \cdot \left(\sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{q!} \cdot \mathbb{N}^q \right) \cdot P^{-1}.$$

În plus, formula (1.2) — de trecere de la \mathcal{BC} la \mathcal{S}_2 — arată că *vectorii bazei \mathcal{S}_2 sunt chiar coloanele matricei P* [10, pag. 113]. Vezi (4.14).

Știm că numerele $(d_i)_{i \in \overline{1,m}}$ de pe diagonala principală a matricei \mathbb{D} sunt eigenvalori — numărate cu multiplicitățile lor algebrice — ale matricei A iar baza \mathcal{S}_2 se compune din eigenvectori generalizați ai aceleiași matrice. Însă este dificil să construim *acea* bază \mathcal{S}_2 față de care matricea de reprezentare nilpotentă \mathbb{N} să se afle în *forma canonică*. Deoarece matricea

$$\mathbb{N}_0 = P \cdot \mathbb{N} \cdot P^{-1} = P \cdot (\mathbb{T}_1 - \mathbb{D}) \cdot P^{-1} = A - P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1}$$

îl reprezintă pe⁷ \mathcal{N} în baza canonică \mathcal{BC} , avem

$$(\mathbb{N}_0)^m = O_m.$$

În concluzie, ne bazăm în practică pe formula⁸

$$\begin{aligned} e^A &= e^{P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1} + \mathbb{N}_0} = e^{P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1}} \cdot e^{\mathbb{N}_0} = P \cdot e^{\mathbb{D}} \cdot P^{-1} \cdot e^{\mathbb{N}_0} \\ &= P \cdot e^{\mathbb{D}} \cdot P^{-1} \cdot e^{A - P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1}} \\ &= P \cdot \begin{pmatrix} e^{d_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{d_m} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot \left[\sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{q!} (A - P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1})^q \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

vezi [15, pag. 33, Corollary 1].

4.4 Estimarea produsului scalar

Fie $E = \mathbb{R}^m$, unde $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, și operatorul \mathbb{R} -liniar $T : E \rightarrow E$. Fiind date bazele $\mathcal{S}_1 = \mathcal{BC} = \{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_m\}$ — baza canonică — și $\mathcal{S} = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$, notăm cu P matricea de schimbare de bază,

$$\begin{aligned} (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) &= (\bar{i}_1 \cdots \bar{i}_m) \cdot P = I_m \cdot P = P \\ &= (\text{col}_{(1)}P \cdots \text{col}_{(m)}P). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Fie $\bar{u}, \bar{v} \in E$ cu expresiile

⁷ $T = \mathcal{D} + \mathcal{N}$.

⁸ Fiind date $B, C \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, dacă $B \cdot C = C \cdot B$, atunci și

$$\begin{aligned} (P \cdot B \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot C \cdot P^{-1}) &= P \cdot BC \cdot P^{-1} = P \cdot CB \cdot P^{-1} \\ &= (P \cdot C \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot B \cdot P^{-1}). \end{aligned}$$

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^m u_k^{\mathcal{S}^1} \cdot \bar{i}_k = \sum_{k=1}^m u_k^{\mathcal{S}} \cdot \bar{f}_k, \quad u_k^{\mathcal{S}^1}, u_k^{\mathcal{S}} \in \mathbb{R},$$

respectiv

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^m v_k^{\mathcal{S}^1} \cdot \bar{i}_k = \sum_{k=1}^m v_k^{\mathcal{S}} \cdot \bar{f}_k, \quad v_k^{\mathcal{S}^1}, v_k^{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}.$$

Conform (1.5),

$$\begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}^1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}^1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}^1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}^1} \end{pmatrix}.$$

Renumerotăm baza \mathcal{S} ca în (3.28), adică

$$\mathcal{S} = \{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_t, \bar{x}_{t+1}, \bar{y}_{t+1}, \bar{x}_{t+3}, \bar{y}_{t+3}, \dots, \bar{x}_{t+2q+1}, \bar{y}_{t+2q+1}\},$$

unde vectorii $\bar{e}_k = \bar{f}_k$ sunt eigenvectori generalizați corespunzând valorilor proprii reale — numărate împreună cu multiplicitățile lor algebrice — λ_k ale operatorului $T_{\mathbb{C}}$ pentru $1 \leq k \leq t$ iar vectorii $\bar{e}_{t+2k+1} = \bar{x}_{t+2k+1} + i \cdot \bar{y}_{t+2k+1}$ sunt eigenvectori generalizați corespunzând valorilor proprii $\lambda_{t+2k+1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ale operatorului $T_{\mathbb{C}}$ pentru $0 \leq k \leq q$. De asemenea, $\lambda_{t+2k+2} = \overline{\lambda_{t+2k+1}}$, $k \in \overline{0, q}$.

Introducem numerele

$$vp_{\min} = \min \{ \lambda_k, \operatorname{Re} \lambda_{t+2j+1} \mid k \in \overline{1, t}, j \in \overline{0, q} \} \quad (4.15)$$

și

$$vp_{\max} = \max \{ \lambda_k, \operatorname{Re} \lambda_{t+2j+1} \mid k \in \overline{1, t}, j \in \overline{0, q} \}. \quad (4.16)$$

Fie $\varepsilon > 0$. Ținând seama de procedeul (3.18), matricele Jordan elementare utilizate la construcția formei canonice Jordan reale a matricei \mathbb{T} de reprezentare a operatorului T în baza \mathcal{S} se înlocuiesc cu matricele din (3.21), (3.22), (3.36). În particular, $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\varepsilon)$.

Introducem *produsul scalar* (forma bilinară) $B_{\mathcal{S}} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ via formula

$$B_{\mathcal{S}}(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_{k=1}^m u_k^{\mathcal{S}} \cdot v_k^{\mathcal{S}} = (u_1^{\mathcal{S}} \dots u_m^{\mathcal{S}}) \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}} \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Au loc relațiile⁹

⁹ Aici, H' desemnează *transpusa* matricei $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
B_{\mathcal{S}}(\bar{u}, \bar{v}) &= \left[\left(u_1^{\mathcal{S}_1} \dots u_m^{\mathcal{S}_1} \right) \cdot (P^{-1})^t \right] \cdot \left[P^{-1} \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \right] \\
&= \left(u_1^{\mathcal{S}_1} \dots u_m^{\mathcal{S}_1} \right) \cdot \left[(P^{-1})^t \cdot P^{-1} \right] \cdot \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \\
&= \left(u_1^{\mathcal{S}_1} \dots u_m^{\mathcal{S}_1} \right) G \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}, \quad G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Pentru $\lambda \in (\lambda_k)_{k \in \overline{1, t}}$ eigenvaloare reală a operatorului T , considerăm \mathbb{R} -subspațiul liniar

$$V = \bigcup_{s \geq 0} \text{Ker} (T - \lambda \cdot I)^s = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{ \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_h \} \quad (4.19)$$

și operatorul \mathbb{R} -liniar $U = T|_V : V \rightarrow V$. Atunci, dacă $\bar{u} = \sum_{p=1}^h u_p \cdot \bar{f}_p \in V$, unde $u_p \in \mathbb{R}$, $p \in \overline{1, h}$, avem¹⁰

$$\begin{aligned}
U(\bar{u}) &= \sum_{p=1}^h u_p \cdot U(\bar{f}_p) \\
&= u_1(\lambda \bar{f}_1 + \varepsilon \bar{f}_2) + u_2(\lambda \bar{f}_2 + \varepsilon \bar{f}_3) + \dots + u_h(\lambda \bar{f}_h) \\
&= (\lambda u_1) \bar{f}_1 + (\varepsilon u_1 + \lambda u_2) \bar{f}_2 + \dots + (\varepsilon u_{h-1} + \lambda u_h) \bar{f}_h,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
B_{\mathcal{S}}(U(\bar{u}), \bar{u}) &= (\lambda u_1) \cdot u_1 + (\varepsilon u_1 + \lambda u_2) \cdot u_2 + \dots + (\varepsilon u_{h-1} + \lambda u_h) \cdot u_h \\
&= \lambda \left(\sum_{p=1}^h u_p^2 \right) + \varepsilon (u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{h-1} u_h).
\end{aligned}$$

Estimarea

$$\begin{aligned}
|u_1 u_2 + u_2 u_3 + \dots + u_{h-1} u_h| &\leq |u_1 u_2| + |u_2 u_3| + \dots + |u_{h-1} u_h| \\
&\leq \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \frac{u_2^2 + u_3^2}{2} + \dots + \frac{u_{h-1}^2 + u_h^2}{2} \\
&\leq \sum_{p=1}^h u_p^2 = B_{\mathcal{S}}(\bar{u}, \bar{u})
\end{aligned}$$

¹⁰ Pentru simplitate, ne restrângem la un subspațiu $Z(\bar{v}, T)$, vezi pagina 54.

ne conduce la dubla inegalitate

$$(\lambda - \varepsilon) \cdot B_{\mathcal{S}}(\bar{u}, \bar{u}) \leq B_{\mathcal{S}}(U(\bar{u}), \bar{u}) \leq (\lambda + \varepsilon) \cdot B_{\mathcal{S}}(\bar{u}, \bar{u}), \quad \bar{u} \in V. \quad (4.20)$$

Pentru $\lambda = a + bi \in (\lambda_{t+2k+1})_{k \in \overline{0, q}}$, $a, b \in \mathbb{R}$, eigenvaloare complexă nereală a operatorului T , considerăm \mathbb{R} -subspațiul liniar

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \left[\bigcup_{s \geq 0} \text{Ker} (T_{\mathbb{C}} - \lambda \cdot I)^s \right] \oplus \left[\bigcup_{s \geq 0} \text{Ker} (T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \cdot I)^s \right] \right\} \cap \mathbb{R}^m \\ &= \text{Span}_{\mathbb{R}} \{ \bar{x}_1, \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_h, \bar{y}_h \}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

unde¹¹ $\bar{e}_p = \bar{x}_p + i \cdot \bar{y}_p$, și operatorul \mathbb{R} -liniar $U = T|_V : V \rightarrow V$. Atunci, dacă $\bar{u} = \sum_{p=1}^h (u_p^x \cdot \bar{x}_p + u_p^y \cdot \bar{y}_p) \in V$, unde $u_p^x, u_p^y \in \mathbb{R}$, $p \in \overline{1, h}$, avem¹²

$$\begin{aligned} U(\bar{u}) &= \sum_{p=1}^h u_p^x \cdot U(\bar{x}_p) + u_p^y \cdot U(\bar{y}_p) \\ &= u_1^x (a\bar{x}_1 - b\bar{y}_1 + \varepsilon\bar{x}_2) + u_1^y (b\bar{x}_1 + a\bar{y}_1 + \varepsilon\bar{y}_2) \\ &\quad + u_2^x (a\bar{x}_2 - b\bar{y}_2 + \varepsilon\bar{x}_3) + u_2^y (b\bar{x}_2 + a\bar{y}_2 + \varepsilon\bar{y}_3) \\ &\quad + \dots + u_h^x (a\bar{x}_h - b\bar{y}_h) + u_h^y (b\bar{x}_h + a\bar{y}_h) \\ &= (u_1^x a + u_1^y b) \bar{x}_1 + (-u_1^x b + u_1^y a) \bar{y}_1 \\ &\quad + (u_2^x a + u_2^y b + \varepsilon u_1^x) \bar{x}_2 + (-u_2^x b + u_2^y a + \varepsilon u_1^y) \bar{y}_2 \\ &\quad + \dots + (u_h^x a + u_h^y b + \varepsilon u_{h-1}^x) \bar{x}_h + (-u_h^x b + u_h^y a + \varepsilon u_{h-1}^y) \bar{y}_h, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{S}}(U(\bar{u}), \bar{u}) &= [(u_1^x a + u_1^y b) \cdot u_1^x + (-u_1^x b + u_1^y a) \cdot u_1^y] \\ &\quad + [(u_2^x a + u_2^y b + \varepsilon u_1^x) \cdot u_2^x + (-u_2^x b + u_2^y a + \varepsilon u_1^y) \cdot u_2^y] \\ &\quad + \dots + [(u_h^x a + u_h^y b + \varepsilon u_{h-1}^x) \cdot u_h^x + (-u_h^x b + u_h^y a + \varepsilon u_{h-1}^y) \cdot u_h^y] \\ &= a \cdot [(u_1^x)^2 + (u_1^y)^2] \\ &\quad + a \cdot [(u_2^x)^2 + (u_2^y)^2] + \varepsilon \cdot (u_1^x u_2^x + u_1^y u_2^y) \\ &\quad + \dots + a \cdot [(u_h^x)^2 + (u_h^y)^2] + \varepsilon \cdot (u_{h-1}^x u_h^x + u_{h-1}^y u_h^y) \\ &= a \cdot \sum_{p=1}^h [(u_p^x)^2 + (u_p^y)^2] \\ &\quad + \varepsilon \cdot [(u_1^x u_2^x + u_1^y u_2^y) + \dots + (u_{h-1}^x u_h^x + u_{h-1}^y u_h^y)]. \end{aligned}$$

¹¹ Atenție, pentru a simplifica scrierea, am rennotat vectorii. Mai precis, $\bar{x}_p = \bar{x}_{t+2(p-1)+1}$ și $\bar{y}_p = \bar{y}_{t+2(p-1)+1}$, unde $p \geq 1$.

¹² Restrângem discuția la subspațiul Z_{01} , vezi pagina 68.

La fel ca în cazul anterior,

$$|(u_1^x u_2^x + u_1^y u_2^y) + \cdots + (u_{h-1}^x u_h^x + u_{h-1}^y u_h^y)| \leq \sum_{p=1}^h [(u_p^x)^2 + (u_p^y)^2] = B_{\mathcal{J}}(\bar{u}, \bar{u}),$$

ceea ce ne conduce la dubla inegalitate

$$(a - \varepsilon) \cdot B_{\mathcal{J}}(\bar{u}, \bar{u}) \leq B_{\mathcal{J}}(U(\bar{u}), \bar{u}) \leq (a + \varepsilon) \cdot B_{\mathcal{J}}(\bar{u}, \bar{u}), \quad \bar{u} \in V. \quad (4.22)$$

Există \mathbb{R} -subspațiile liniare $V_0, \dots, V_s \subseteq E$ date de formulele (4.19), (4.21) și operatorii \mathbb{R} -liniari $U_k : V_k \rightarrow V_k$, unde $k \in \overline{0, s}$, corespunzători astfel încât

$$E = \bigoplus_{k=0}^s V_k, \quad T = \bigoplus_{k=0}^s U_k.$$

Fie $\bar{u} = \sum_{k=0}^s \bar{u}_k \in E$, $\bar{u}_k \in V_k$, $0 \leq k \leq s$. Atunci, pe baza inegalităților (4.15), (4.16), (4.20), (4.22), obținem dubla estimare — vezi [10, pag. 145, Lemma] —

$$\begin{aligned} (vp_{\min} - \varepsilon) \cdot B_{\mathcal{J}}(\bar{u}, \bar{u}) &= (vp_{\min} - \varepsilon) \cdot \sum_{k=0}^s B_{\mathcal{J}}(\bar{u}_k, \bar{u}_k) \\ &\leq \sum_{k=0}^s B_{\mathcal{J}}(U_k(\bar{u}_k), \bar{u}_k) \\ &= B_{\mathcal{J}}(T(\bar{u}), \bar{u}) \\ &\leq (vp_{\max} + \varepsilon) \cdot B_{\mathcal{J}}(\bar{u}, \bar{u}). \end{aligned}$$

4.5 Exerciții rezolvate

Detaliile care urmează presupun cunoștințe de bază despre *teoria sistemelor diferențiale liniare* [1, 2].

Exercițiul 4.1. Find dat numărul pozitiv ω , să se rezolve ecuația diferențială ordinară

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.23)$$

Soluția exercițiului 4.1. Transformăm ecuația (4.23) în sistemul diferențial de ordinul întâi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad ' = \frac{d}{dt},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluția sistemului are formula

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^{At} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, 2\}.$$

Introducem operatorul liniar $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dat de matricea $\mathbb{T} = A$, și anume

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Lui îi este asociat operatorul complexificat $T_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, cu formula

$$T_{\mathbb{C}} \left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina valorile proprii ale matricei A , rezolvăm ecuația algebrică

$$p_{T_{\mathbb{C}}}(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_2) = \lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Găsim soluțiile (simple) $\lambda_1 = \lambda = \omega \cdot i$ și $\lambda_2 = \bar{\lambda} = -\omega \cdot i$.

În \mathbb{C}^2 , considerăm bazele

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{B}\mathcal{C} = \{\bar{i}_1, \bar{i}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

și

$$\mathcal{S}_2 = \{\bar{f}, \sigma(\bar{f})\}, \quad \bar{f} = \bar{x} + i \cdot \bar{y} \in \mathbb{C}^2, \quad \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^2,$$

unde \bar{f} este vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ a matricei A . Ele sunt folosite pentru aducerea matricei A la forma canonică Jordan (reală și complexă). Astfel, plecând de la descompunerea

$$\mathbb{C}^2 = \text{Ker}(T_{\mathbb{C}} - \lambda \cdot I) \oplus \text{Ker}(T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \cdot I),$$

avem relațiile

$$(T_{\mathbb{C}}(\bar{i}_1) \ T_{\mathbb{C}}(\bar{i}_2)) = (\bar{i}_1 \ \bar{i}_2) \cdot A$$

și

$$\begin{aligned} (T_{\mathbb{C}}(\bar{f}) \ T_{\mathbb{C}}(\sigma(\bar{f}))) &= (\bar{f} \ \sigma(\bar{f})) \cdot W_1 \\ &= (\bar{f} \ \sigma(\bar{f})) \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

respectiv — aici, $\lambda = \alpha + \beta \cdot i$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ —

$$\begin{aligned} (T_{\mathbb{C}}(\bar{x}) T_{\mathbb{C}}(\bar{y})) &= (T(\bar{x}) T(\bar{y})) \\ &= (\bar{x} \bar{y}) \cdot W_2 \\ &= (\bar{x} \bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ &= (\bar{x} \bar{y}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Introducem matricele

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix}$$

de schimbare a bazelor în $\mathbb{C}^2, \mathbb{R}^2$, adică

$$(\bar{f} \sigma(\bar{f})) = (\bar{i}_1 \bar{i}_2) \cdot P_1 = I_2 \cdot P_1 = P_1 \quad (4.24)$$

și

$$(\bar{x} \bar{y}) = (\bar{i}_1 \bar{i}_2) \cdot P_2 = P_2, \quad (4.25)$$

de unde

$$A = P_1 \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \cdot P_1^{-1} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot P_2^{-1}. \quad (4.26)$$

Reorganizăm egalitățile (4.26) sub forma

$$P_1 \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} = A \cdot P_1, \quad P_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = A \cdot P_2$$

și obținem două sisteme algebrice liniare în necunoscutele p_k, r_k , unde $k \in \overline{1, 4}$,

$$\begin{cases} i\omega \cdot p_1 = p_3 \\ -i\omega \cdot p_2 = p_4 \\ i\omega \cdot p_3 = -\omega^2 \cdot p_1 \\ -i\omega \cdot p_4 = -\omega^2 \cdot p_2, \end{cases} \quad \begin{cases} -\omega \cdot r_2 = r_3 \\ \omega \cdot r_1 = r_4 \\ -\omega \cdot r_4 = -\omega^2 \cdot r_1 \\ \omega \cdot r_3 = -\omega^2 \cdot r_2. \end{cases} \quad (4.27)$$

Observăm că, la fiecare din sistemele precedente, ultimele două ecuații sunt echivalente cu primele două ecuații. Atunci, sistemelor — cu câte o infinitate de soluții fiecare —

$$\begin{cases} i\omega \cdot p_1 = p_3 \\ -i\omega \cdot p_2 = p_4, \end{cases} \quad \begin{cases} -\omega \cdot r_2 = r_3 \\ \omega \cdot r_1 = r_4 \end{cases}$$

le alegem soluțiile netriviiale

$$p_1 = p_2 = 1, p_3 = -p_4 = i\omega, \quad r_1 = r_2 = 1, r_3 = -r_4 = -\omega.$$

Am ajuns la

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}, \quad P_1^{-1} = \frac{1}{2\omega i} \cdot \begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ i\omega & -1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

și

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\omega & \omega \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \frac{1}{2\omega} \cdot \begin{pmatrix} \omega & -1 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Testarea vectorilor proprii. Conform (4.24), vectorul \bar{f} este dat de prima coloană a matricei P_1 ,

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} = \bar{x} + i \cdot \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \\ &= z_1 \cdot \bar{i}_1 + z_2 \cdot \bar{i}_2, \quad z_1 = 1, z_2 = i\omega. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Deducem că

$$\begin{aligned} (T_{\mathbb{C}} - \lambda \cdot I)(\bar{f}) &= (\bar{i}_1 \bar{i}_2) \cdot (T - \lambda \cdot I_2) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= I_2 \cdot \begin{pmatrix} -i\omega & 1 \\ -\omega^2 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{C}^2}. \end{aligned}$$

Relațiile (4.25) arată că vectorii \bar{x}, \bar{y} din (4.30) alcătuiesc coloanele matricei P_2 , ceea ce, la prima vedere, nu pare adevărat. În fapt, cum sistemele algebrice (4.27) au o infinitate de soluții, vectorii în discuție alcătuiesc coloanele *uneia* dintre matricele P_2 posibile! Introducând matricea

$$P_2^{\text{nou}} = (\bar{x} \bar{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix},$$

stabilim că

$$\begin{aligned} A \cdot P_2^{\text{nou}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \\ &= P_2^{\text{nou}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De asemeni, plecând de la matricea P_2 , observăm că vectorul

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \text{col}_{(1)}P_2 + i \cdot \text{col}_{(2)}P_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -\omega + i\omega \end{pmatrix} \\ &= z_3 \cdot \bar{i}_1 + z_4 \cdot \bar{i}_2, \quad z_3 = 1+i, z_4 = -\omega + i\omega,\end{aligned}$$

stătuface egalitățile

$$\begin{aligned}(T_{\mathbb{C}} - \lambda \cdot I)(\bar{u}) &= (\bar{i}_1 \bar{i}_2) \cdot (T - \lambda \cdot I_2) \cdot \begin{pmatrix} z_3 \\ z_4 \end{pmatrix} \\ &= I_2 \cdot \begin{pmatrix} -i\omega & 1 \\ -\omega^2 & -i\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ -\omega + i\omega \end{pmatrix} \\ &= 0_{\mathbb{C}^2},\end{aligned}$$

adică este eigenvector al operatorului $T_{\mathbb{C}}$.

Calculul exponențialei matricei A . Sunt valabile relațiile

$$e^{t \cdot A} = P_1 \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\bar{\lambda} t} \end{pmatrix} \cdot P_1^{-1} \quad (4.31)$$

și — vezi Exercițiul 4.2 —

$$e^{t \cdot A} = P_2 \cdot e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} \cdot P_2^{-1}. \quad (4.32)$$

Via (4.28), (4.31), avem egalitățile

$$\begin{aligned}e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\omega t) - i \sin(\omega t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\omega i} \begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ i\omega & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\omega i} \begin{pmatrix} 2i\omega \cos(\omega t) & 2i \sin(\omega t) \\ -2i\omega^2 \sin(\omega t) & 2i\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La fel, folosind (4.29), (4.32), deducem că

$$\begin{aligned}e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\omega & \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} \omega - 1 \\ \omega & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} 2\omega \cos(\omega t) & 2 \sin(\omega t) \\ -2\omega^2 \sin(\omega t) & 2\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \\ -\omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Soluția ecuației diferențiale. Am ajuns la

$$\begin{aligned} x(t) = x_1(t) &= c_1 \cdot \cos(\omega t) + \frac{c_2}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \\ &= C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t), \quad C_k \in \mathbb{R}, \quad k \in \{1, 2\}, \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} x'(t) = x_2(t) &= -c_1 \omega \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t) \\ &= -C_1 \omega \cdot \sin(\omega t) + C_2 \omega \cdot \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Calculul s-a încheiat. \square

Exercițiul 4.2. Fiind date matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix},$$

să se arate că sunt valabile formulele

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & 0 \\ 0 & e^{a_2 t} \end{pmatrix}, \quad e^{tB} = e^{bt} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tC} = e^{c_1 t} \cdot \begin{pmatrix} \cos(c_2 t) & \sin(c_2 t) \\ -\sin(c_2 t) & \cos(c_2 t) \end{pmatrix},$$

unde $a_k, b \in \mathbb{C}$, respectiv $c_k, t \in \mathbb{R}$, $k \in \{1, 2\}$.

Soluția exercițiului 4.2. Vezi [15, pag. 15]. \square

Exercițiul 4.3. Să se rezolve sistemul diferențial liniar

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$$

Soluția exercițiului 4.3. Începem cu *calculul valorilor proprii ale matricei A* a sistemului liniar, unde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru le a determina, rezolvăm ecuația algebrică

$$\det(A - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -3 \\ 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 + \lambda)(2 - \lambda) = 0.$$

Găsim soluțiile (simple, reale) $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 2$.

Ne aflăm în situația *primei părți* a proprietății ($\mathcal{H}\mathcal{S}$) — vezi Lema 2.12 —, deci

$$\mathbb{R}^2 = \text{Ker}(T - \lambda_1 \cdot I) \oplus \text{Ker}(T - \lambda_2 \cdot I),$$

unde $\mathbb{T} = A$.

La fel ca în rezolvarea Exercițiului 4.1, introducem matricea

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât

$$\begin{aligned} P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -p_1 & 2p_2 \\ -p_3 & 2p_4 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} &= A \cdot P \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -p_1 - 3p_3 & -p_2 - 3p_4 \\ 2p_3 & 2p_4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Egalând prima linie a matricelor din (4.33), (4.34) — element cu element —, ajungem la sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} -p_1 = -p_1 - 3p_3 \\ 2p_2 = -p_2 - 3p_4, \end{cases}$$

de unde rezultă că $p_3 = 0$ și $p_2 = -p_4$. Cea de-a doua linie a matricelor din (4.33), (4.34) nu ne conduce la nimic nou,

$$\begin{cases} -p_3 = 2p_3 \\ 2p_4 = 2p_4. \end{cases}$$

Pentru $p_1 = p_2 = 1$, obținem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}.$$

Testarea vectorilor proprii. Au loc egalitățile

$$(A - \lambda_1 \cdot I_2) \cdot \text{col}_{(1)}P = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

respectiv

$$(A - \lambda_2 \cdot I_2) \cdot \text{col}_{(2)}P = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De asemenea,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\text{col}_{(1)}P \oplus \mathbb{R}\text{col}_{(2)}P = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{ \text{col}_{(1)}P, \text{col}_{(2)}P \}.$$

Calculul exponențialei matricei A . Sunt valabile relațiile — vezi Exercițiul 4.2

$$e^{tA} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

de unde

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluția sistemului diferențial. Am ajuns la

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 (e^{-t} - e^{2t}) \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1 + c_2) e^{-t} - c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 e^{-t} - d_2 e^{2t} \\ d_2 e^{2t} \end{pmatrix}, \quad d_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Calculul s-a încheiat. \square

Exercițiul 4.4. ([15, pag. 34, Example 1]) Să se rezolve sistemul diferențial liniar

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2. \end{cases}$$

Soluția exercițiului 4.4. Începem cu *calculul valorilor proprii ale matricei* A a sistemului liniar, unde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru le a determina, rezolvăm ecuația algebrică

$$\det(A - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Găsim soluția (de multiplicitate algebrică $m = 2$, reală) $\lambda = 2$.

Conform (4.13), există matricea nesară $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și matricea nilpotentă $\mathbb{N}_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$A = P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1} + \mathbb{N}_0, \quad \mathbb{N}_0^2 = O_2.$$

Aici,

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot I_2, \quad e^{t\mathbb{D}} = e^{\lambda t} \cdot I_2$$

iar coloanele matricei P sunt eigenvectori generalizați, liniar independenți peste \mathbb{R} , ai valorii proprii λ a operatorului liniar T , unde $\mathbb{T} = A$.

Forma specială a matricei \mathbb{D} — operatorul \mathcal{D} , reprezentat de ea, este un operator diagonal — ne conduce la următoarea descompunere a matricei A ,

$$A = \mathbb{D} + \mathbb{N}_0 = \lambda \cdot I_2 + \mathbb{N}_0,$$

de unde

$$\mathbb{N}_0 = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculul exponențialei matricei A . Sunt valabile relațiile

$$\begin{aligned} e^{tA} &= P \cdot e^{t\mathbb{D}} \cdot P^{-1} \cdot (I_2 + t \cdot \mathbb{N}_0) = e^{t\mathbb{D}} \cdot (I_2 + t \cdot \mathbb{N}_0) \\ &= e^{2t} I_2 \cdot \left(I_2 + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluția sistemului diferențial. Am ajuns la

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad c_k \in \mathbb{R}, k \in \{1, 2\}, \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1(1+t) + c_2 t \\ -c_1 t + c_2(1-t) \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 + (c_1 + c_2)t \\ c_2 - (c_1 + c_2)t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculul s-a încheiat. \square

Exercițiul 4.5. ([15, pag. 35, Example 3]) Să se rezolve sistemul diferențial liniar

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 \\ x_3' = x_1 + x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

Soluția exercițiului 4.5. Începem cu *calculul valorilor proprii ale matricei A* a sistemului liniar, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru le a determina, rezolvăm ecuația algebrică

$$\det(A - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0.$$

Găsim soluțiile $\lambda_1 = 1$ (simplă, reală) și $\lambda_2 = 2$ (de multiplicitate algebrică $m = 2$, reală).

Matricea de reprezentare a operatorului diagonalizabil \mathcal{D} , în baza $\mathcal{S}_1 = \mathcal{BC} = \{\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3\}$ a spațiului liniar \mathbb{R}^3 , este

$$\mathbb{D}_0 = P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

unde $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Construcția matricei P . Coordonatele vectorului propriu $\bar{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, corespunzând valorii proprii λ_1 a matricei A , verifică sistemul algebric liniar

$$(A - \lambda_1 \cdot I_3) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\begin{cases} -u^1 + u^2 = 0 \\ u^1 + u^2 + u^3 = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $u^2 = u^1$ și $u^3 = -2u^1$. Pentru $u^1 = 1$, obținem

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Coordonatele vectorului propriu $\bar{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, corespunzând valorii proprii λ_2 a matricei A , verifică sistemul algebric liniar

$$(A - \lambda_2 \cdot I_3) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde $v^1 = v^2 = 0$, adică λ_2 -eigenspațiul operatorului T , unde $\mathbb{T} = A$, este unidimensional. Alegem vectorul propriu

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru a putea stabili baza \mathcal{S}_2 — vectorii săi sunt coloanele matricei P —, trebuie determinat un vector propriu generalizat $\bar{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, corespunzând valorii proprii λ_2 a matricei A , care să fie liniar independent peste \mathbb{R} față de setul $\{\bar{u}, \bar{v}\}$. Astfel, sistemul algebric liniar

$$(A - \lambda_2 \cdot I_3)^2 \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^1 \\ -2w^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ne conduce la $w^1 = 0$. Optăm pentru eigenvectorul generalizat

$$\bar{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Am ajuns la

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\mathbb{D}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

și

$$\mathbb{N}_0 = A - \mathbb{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{N}_0^2 = \mathcal{O}_3.$$

Calculul exponențialei matricei A . Sunt valabile relațiile

$$\begin{aligned}
e^{t \cdot A} &= e^{t \cdot \mathbb{D}_0} \cdot (I_3 + t \cdot \mathbb{N}_0) = P \cdot e^{t \cdot \mathbb{D}} \cdot P^{-1} \cdot (I_3 + t \cdot \mathbb{N}_0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -t & t & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ -2e^t + (2-t)e^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Soluția sistemului diferențial. Am ajuns la

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}, \quad c_k \in \mathbb{R}, k \in \overline{1,3}, \\
&= \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ e^t - e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ -2e^t + (2-t)e^{2t} & te^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} c_1 e^t \\ c_1 e^t + (c_2 - c_1) e^{2t} \\ -2c_1 e^t + [2c_1 + c_3 + (c_2 - c_1)t] e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Calculul s-a încheiat. \square

Exercițiul 4.6. ([15, pag. 36, Example 4]) Să se rezolve sistemul diferențial liniar

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 \\ x_2' = x_1 \\ x_3' = -x_4 \\ x_4' = 2x_1 + x_3. \end{cases}$$

Soluția exercițiului 4.6. Începem cu *calculul valorilor proprii ale matricei A* a sistemului liniar, unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru le a determina, rezolvăm ecuația algebrică

$$\det(A - \lambda \cdot I_4) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1 + \lambda^2)^2 = 0.$$

Găsim soluțiile $\lambda_1 = \lambda = i$ (de multiplicitate algebrică $m_1 = 2$, complexă) și $\lambda_2 = \bar{\lambda} = -i$ (de multiplicitate algebrică $m_2 = 2$, complexă).

Are loc descompunerea

$$\begin{aligned}\mathbb{C}^4 &= \left[\bigcup_{k \geq 0} \text{Ker} (T_{\mathbb{C}} - \lambda \cdot I)^k \right] \oplus \left[\bigcup_{k \geq 0} \text{Ker} (T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \cdot I)^k \right] \\ &= \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \bar{u}, \bar{U} \} \oplus \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \sigma(\bar{u}), \sigma(\bar{U}) \} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \bar{u}, \sigma(\bar{u}) \} \oplus \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \bar{U}, \sigma(\bar{U}) \} = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \bar{x}, \bar{y} \} \oplus \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \bar{X}, \bar{Y} \} \\ &= \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \bar{x}, \bar{y}, \bar{X}, \bar{Y} \}, \quad \bar{x}, \bar{y}, \bar{X}, \bar{Y} \in \mathbb{R}^4,\end{aligned}$$

unde $\bar{u} = \bar{x} + i \cdot \bar{y}$, $\bar{U} = \bar{X} + i \cdot \bar{Y}$ și $\sigma(\bar{u})$, $\sigma(\bar{U})$ sunt eigenvectori generalizați, corespunzând valorilor proprii $\lambda_{1,2}$, ai complexificatului $T_{\mathbb{C}}$. Aici, operatorul \mathbb{R} -liniar T este reprezentat în baza $\mathcal{S}_1 = \mathcal{B}\mathcal{C} = \{ \bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3, \bar{i}_4 \}$ a spațiului vectorial \mathbb{R}^4 de matricea $\mathbb{T} = A$.

Matricea de reprezentare a operatorului semisimplu \mathcal{D} — din $T = \mathcal{D} + \mathcal{N}$ —, în baza \mathcal{S}_1 a spațiului linier \mathbb{R}^4 , este

$$\mathbb{D}_0 = P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

unde $\lambda = \alpha + \beta \cdot i$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, respectiv $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ și

$$P = (\text{col}_{(1)}P \text{ col}_{(2)}P \text{ col}_{(3)}P \text{ col}_{(4)}P) = (\bar{x} \bar{y} \bar{X} \bar{Y}).$$

Construcția matricei P . Coordonatele vectorului propriu $\bar{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$, corespunzând valorii proprii λ_1 a matricei A , verifică sistemul algebric linier

$$(A - \lambda_1 \cdot I_4) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i - 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\begin{cases} -iu^1 - u^2 = 0 \\ u^1 - iu^2 = 0 \\ -iu^3 - u^4 = 0 \\ 2u^1 + u^3 - iu^4 = 0. \end{cases}$$

Din primele două ecuații rezultă că $u^2 = -iu^1$. Ultimele două ecuații ne conduc la $u^4 = -iu^3$ și — inserând formula lui u^4 în ultima ecuație — $u^1 = 0$. Așadar, $u^1 = u^2 = 0$. Ținând seama de cea de-a treia ecuație a sistemului algebric, deducem

că

$$\text{Ker}(T_{\mathbb{C}} - \lambda \cdot I) = \mathbb{C}\bar{u}, \quad \bar{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \bar{x} + i \cdot \bar{y},$$

de unde, obligatoriu,

$$\text{Ker}(T_{\mathbb{C}} - \bar{\lambda} \cdot I) = \mathbb{C}\sigma(\bar{u}) = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

iar sistemul de vectori $\{\bar{u}, \sigma(\bar{u})\}$ este liniar independent peste \mathbb{C} .

Mai departe, trebuie determinat un vector propriu generalizat $\bar{U} = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$,

corespunzând valorii proprii λ_1 a matricei A , astfel încât vectorii \bar{u}, \bar{U} să fie liniar independenți peste \mathbb{C} . În particular,

$$\bar{U} \in \text{Ker}(T_{\mathbb{C}} - \lambda_1 \cdot I)^2 \setminus \text{Ker}(T_{\mathbb{C}} - \lambda_1 \cdot I).$$

Sistemul algebric liniar

$$(A - \lambda_1 \cdot I_4)^2 \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i \\ -4i & -2 & -2i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ne conduce la

$$\begin{cases} -2U^1 + 2iU^2 = 0 \\ -2iU^1 - 2U^2 = 0 \\ -2U^1 - 2U^3 + 2iU^4 = 0 \\ -4iU^1 - 2U^2 - 2iU^3 - 2U^4 = 0. \end{cases}$$

Primele două ecuații sunt echivalente cu $U^1 = iU^2$. Inserând această expresie a necunoscutei U^1 în ultima ecuație, deducem că ultimele două ecuații ale sistemului algebric sunt echivalente cu $U^1 + U^3 - iU^4 = 0$. Așadar,

$$\begin{cases} U^1 = iU^2 \\ U^1 + U^3 - iU^4 = 0. \end{cases}$$

Optăm pentru eigenvectorul generalizat

$$\bar{U} = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{X} + i \cdot \bar{Y}.$$

Am ajuns la

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\mathbb{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

și

$$\mathbb{N}_0 = A - \mathbb{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{N}_0^2 = \mathcal{O}_4.$$

Calculul exponențialei matricei A. Sunt valabile relațiile

$$\begin{aligned} e^{t \cdot A} &= e^{t \cdot \mathbb{D}_0} \cdot (I_4 + t \cdot \mathbb{N}_0) = P \cdot e^{t \cdot \mathbb{D}} \cdot P^{-1} \cdot (I_4 + t \cdot \mathbb{N}_0) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & \sin t & \cos t & -\sin t \\ \sin t & 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -t & 1 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ -t \sin t & \sin t - t \cos t & \cos t & -\sin t \\ \sin t + t \cos t & -t \sin t & \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluția sistemului diferențial. Obținem că

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \quad c_k \in \mathbb{R}, k \in \overline{1,4}, \\ &= \begin{pmatrix} c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ (c_2 - c_4 - c_1 t) \sin t + (c_3 - c_2 t) \cos t \\ (c_1 + c_3 - c_2 t) \sin t + (c_4 + c_1 t) \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculul s-a încheiat. \square

4.6 Soluții fundamentale ale ecuațiilor diferențiale liniare și omogene

Se consideră ecuația diferențială ordinară

$$x^{(p)} + a_1 x^{(p-1)} + \dots + a_{p-1} x' + a_p x = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.35)$$

unde $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1, p}$, și $p \geq 2$. Aici, $x = x(t)$, $x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$ pentru orice $k \in \overline{1, p}$.

Ecuația (4.35) se organizează ca sistem diferențial liniar de ordinul I,

$$\bar{x}' = A\bar{x}, \quad (4.36)$$

unde¹³

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(p-2)} \\ x^{(p-1)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \dots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Exercițiul 4.7. Fie numerele $\lambda, b_i \in \mathbb{C}$, $i \in \overline{1, p}$, unde $p \geq 3$, și determinanții

$$R(b_1, b_2, \dots, b_p, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_{p-1} & b_p \end{vmatrix},$$

¹³ $E = \mathbb{C}^p$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{T} = A$. Vezi și definiția (4.48).

respectiv

$$P(b_1, b_2, \dots, b_p, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{p-1} & b_p \end{vmatrix}.$$

Au loc relațiile

$$P(b_1, b_2, \dots, b_p, \lambda) = b_1.$$

și

$$R(b_1, b_2, \dots, b_p, \lambda) = \lambda R(b_2, b_3, \dots, b_p, \lambda) + P(b_1, b_3, \dots, b_p, \lambda),$$

respectiv

$$R(b_1, b_2, \dots, b_p, \lambda) = b_p \lambda^{p-1} + b_{p-1} \lambda^{p-2} + \cdots + b_2 \lambda + b_1. \quad (4.38)$$

Soluția exercițiului 4.7. Se dezvoltă determinanții după prima linie. \square

Exercițiul 4.8. Fie matricea A de forma (4.37). Să se arate că

$$\det(\lambda I_p - A) = \lambda^p + a_1 \lambda^{p-1} + a_2 \lambda^{p-2} + \cdots + a_{p-1} \lambda + a_p, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Soluția exercițiului 4.8. Observăm că

$$\det(\lambda I_p - A) = R(a_p, a_{p-1}, \dots, a_2, a_1 + \lambda, \lambda)$$

și aplicăm formula (4.38). \square

Exercițiul 4.9. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie, de multiplicitate algebrică $r \geq 1$, a matricei $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, unde $p \geq 1$. Dacă $\bar{u} \in \mathbb{C}^p$ este eigenvector generalizat al matricei A corespunzând valorii proprii λ , adică există $k \in \bar{1}, r$ cu proprietatea că

$$(A - \lambda I_p)^k \bar{u} = 0,$$

atunci funcția

$$\bar{x}(t) = e^{\lambda t} \cdot (\bar{C}_1 + t \bar{C}_2 + \cdots + t^{k-1} \bar{C}_k), \quad t \in \mathbb{R},$$

este soluție a sistemului diferențial (4.36). Aici,

$$\bar{C}_1 = \bar{u}, \quad \bar{C}_i = \frac{1}{i-1} (A - \lambda I_p) \bar{C}_{i-1} = \frac{1}{(i-1)!} (A - \lambda I_p)^{i-1} \bar{u}, \quad (4.39)$$

unde $i \in \overline{2, k}$.

Soluția exercițiului 4.9. Remarcăm că

$$(A - \lambda I_p) \bar{C}_k = \frac{1}{(k-1)!} (A - \lambda I_p)^k \bar{u} = 0,$$

deci \bar{C}_k este eigenvector al matricei A corespunzând valorii proprii λ .

Au loc relațiile

$$\begin{aligned} \bar{x}'(t) &= \lambda e^{\lambda t} \cdot (\bar{C}_1 + t\bar{C}_2 + \dots + t^{k-1}\bar{C}_k) \\ &+ e^{\lambda t} \cdot (\bar{C}_2 + 2t\bar{C}_3 + \dots + (k-1)t^{k-2}\bar{C}_k) \\ &= e^{\lambda t} \cdot \{ (\lambda\bar{C}_1 + \bar{C}_2) + t(\lambda\bar{C}_2 + 2\bar{C}_3) + \dots \\ &+ t^{k-2} [\lambda\bar{C}_{k-1} + (k-1)\bar{C}_k] + t^{k-1}\lambda\bar{C}_k \} \\ &= e^{\lambda t} \cdot [(A\bar{C}_1) + t(A\bar{C}_2) + \dots + t^{k-2}(A\bar{C}_{k-1}) + t^{k-1}(A\bar{C}_k)] \\ &= A \cdot \bar{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. \square

Exercițiul 4.10. În contextul exercițiului 4.9, să se demonstreze că

$$(A - \lambda I_p)^{k+1-i} \bar{C}_i = 0, \quad i \in \overline{1, k}.$$

Soluția exercițiului 4.10. Ținem seama de ultima parte a formulelor (4.39). \square

Exercițiul 4.11. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ și șirurile $(c_{q+1}^{(r)})_{q \geq 0, r \geq 1}$ date de formulele

$$\begin{cases} c_{q+1}^{(0)} = \lambda^q, \\ c_{q+1}^{(r)} = q(q-1) \dots (q-r+1) \lambda^{q-r} \cdot \text{sign}(\max\{q-r+1, 0\}). \end{cases}$$

Să se arate că

$$c_{q+1}^{(r+1)} = \frac{d}{d\lambda} [c_{q+1}^{(r)}],$$

respectiv

$$\frac{d}{d\lambda} [c_{q+2}^{(r)}] = (r+1)c_{q+1}^{(r)} + \lambda \frac{d}{d\lambda} [c_{q+1}^{(r)}]. \quad (4.40)$$

pentru orice $q \geq 0, r \geq 1$.

Soluția exercițiului 4.11. Folosim inducția matematică. \square

Exercițiul 4.12. Fie matricea A de forma (4.37) și $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie, de multiplicitate algebrică $r \geq 1$, a acesteia. Atunci, să se arate că vectorii¹⁴

$$\bar{C}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-2} \\ \lambda^{p-1} \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_{k-i} = \binom{i}{k-1} \cdot \frac{d^i}{d\lambda^i} (\bar{C}_k), \quad (4.41)$$

unde $i \in \overline{1, k-1}$, pot fi utilizați în contextul exercițiului 4.9.

Soluția exercițiului 4.12. Introducem numerele $\binom{i}{j}_{i \in \overline{0, k-1}, j \in \overline{1, p}}$ astfel încât

$$\bar{C}_k = \begin{pmatrix} c_1^{(0)} \\ \vdots \\ c_p^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_{k-i} = \frac{(k-i)(k-i+1) \cdots (k-1)}{i!} \cdot \begin{pmatrix} c_1^{(i)} \\ \vdots \\ c_p^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Trebuie verificate relațiile — vezi (4.39) și exercițiul 4.10 —

$$(A - \lambda I_p) \bar{C}_k = 0, \quad (A - \lambda I_p) \bar{C}_{k-i-1} = (k-i-1) \bar{C}_{k-i}. \quad (4.42)$$

Au loc egalitățile — conform exercițiului 4.8 —

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_p) \bar{C}_k &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \cdots & -a_2 & -(a_1 + \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-2} \\ \lambda^{p-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_p - a_{p-1}\lambda - \cdots - a_2\lambda^{p-2} - (a_1 + \lambda)\lambda^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\det(\lambda I_p - A) \end{pmatrix} = 0, \end{aligned}$$

respectiv

$$\bar{C}_{k-i-1} = \frac{(k-i-1)(k-i) \cdots (k-1)}{(i+1)!} \cdot \frac{d^{i+1}}{d\lambda^{i+1}} (\bar{C}_k) = \frac{k-i-1}{i+1} \cdot \frac{d}{d\lambda} (\bar{C}_{k-i}),$$

¹⁴ Folosim notațiile $\binom{v}{w} = \frac{(w-v+1)(w-v+2) \cdots w}{1 \cdot 2 \cdots v}$, $\binom{0}{w} = 1$, unde $w \geq v \geq 1$.

de unde

$$c_j^{(i+1)} = \frac{k-i-1}{i+1} \cdot \frac{d}{d\lambda} [c_j^{(i)}]. \quad (4.43)$$

Mai departe, cea de-a doua relație (4.42) ne conduce la — via (4.43) —

$$\begin{aligned} (k-i-1) \begin{pmatrix} c_1^{(i)} \\ \vdots \\ c_p^{(i)} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \cdots & -a_2 & -(a_1 + \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(i+1)} \\ \vdots \\ c_p^{(i+1)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{k-i-1}{i+1} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \cdots & -a_2 & -(a_1 + \lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{d\lambda} [c_1^{(i)}] \\ \vdots \\ \frac{d}{d\lambda} [c_p^{(i)}] \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Primele $p-1$ linii ale egalităților matriceale anterioare se reorganizează sub forma expresiilor

$$\frac{d}{d\lambda} [c_{j+1}^{(i)}] = (i+1)c_j^{(i)} + \lambda \frac{d}{d\lambda} [c_j^{(i)}], \quad j \in \overline{1, p-1},$$

care sunt echivalente cu (4.40).

Ultima linie devine

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda} [a_p c_1^{(i)} + a_{p-1} c_2^{(i)} + \cdots + a_2 c_{p-1}^{(i)} + a_1 c_p^{(i)}] + \left\{ (i+1)c_p^{(i)} + \lambda \frac{d}{d\lambda} [c_p^{(i)}] \right\} \\ &= \frac{d}{d\lambda} [a_p c_1^{(i)} + a_{p-1} c_2^{(i)} + \cdots + a_2 c_{p-1}^{(i)} + a_1 c_p^{(i)}] + \frac{d}{d\lambda} [c_{p+1}^{(i)}], \end{aligned} \quad (4.44)$$

unde $c_{p+1}^{(0)} = \lambda^p$. Egalitatea (4.44) rezultă din relația

$$0 = \frac{d^{i+1}}{d\lambda^{i+1}} [\det(\lambda I_p - A)] = \frac{d^{i+1}}{d\lambda^{i+1}} (a_p + a_{p-1}\lambda + \cdots + a_2\lambda^{p-2} + a_1\lambda^{p-1} + \lambda^p).$$

Calculul s-a încheiat. \square

Exercițiul 4.13. (Soluții fundamentale) Dacă $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ este o soluție de multiplicitate $r \geq 1$ a ecuației algebrice

$$\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + a_2\lambda^{p-2} + \cdots + a_{p-1}\lambda + a_p = 0,$$

atunci funcțiile $z_i : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, unde $i \in \overline{1, r}$, cu formulele

$$z_1(t) = e^{\lambda_0 t}, z_2(t) = t e^{\lambda_0 t}, \dots, z_r(t) = t^{r-1} e^{\lambda_0 t}$$

sunt soluții ale ecuației diferențiale (4.35).

Soluția exercițiului 4.13. Fie $k \in \overline{1, r}$ fixat. Conform exercițiului 4.9, ecuația (4.35), reorganizată ca sistem diferențial cu p ecuații de ordinul I, admite soluția

$$\bar{z}(t) = \begin{pmatrix} z \\ z' \\ z'' \\ \vdots \\ z^{(p-2)} \\ z^{(p-1)} \end{pmatrix} = e^{\lambda_0 t} \cdot (\bar{C}_1 + t\bar{C}_2 + \dots + t^{k-1}\bar{C}_k),$$

unde vectorii $(\bar{C}_i)_{i \in \overline{1, k}}$ au formulele (4.41).

Observăm că primul element al coloanei $\bar{C}_k \in \mathbb{C}^p$ este 1 în timp ce coloanele \bar{C}_i , unde $i \leq k-1$, au primul element 0. De aici rezultă că $z(t) = e^{\lambda_0 t} \cdot t^{k-1}$. \square

4.7 Matrice strict pozitiv-definite. Reprezentarea covectorilor folosind produsul scalar. Produsul vectorial a $m-1$ vectori. Produsul tensorial a doi vectori. Reciproca unei baze. Rezoluția identității

Fie corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, bazele $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ introduse la pagina 1 și matricea nesingulară P dată de (1.2).

Fie $\bar{u}, \bar{v} \in E$ cu expresiile

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^m u_k^{\mathcal{S}_1} \cdot \bar{e}_k = \sum_{k=1}^m u_k^{\mathcal{S}_2} \cdot \bar{f}_k, \quad u_k^{\mathcal{S}_1}, u_k^{\mathcal{S}_2} \in \mathbb{K},$$

respectiv

$$\bar{v} = \sum_{k=1}^m v_k^{\mathcal{S}_1} \cdot \bar{e}_k = \sum_{k=1}^m v_k^{\mathcal{S}_2} \cdot \bar{f}_k, \quad v_k^{\mathcal{S}_1}, v_k^{\mathcal{S}_2} \in \mathbb{K}.$$

Conform (1.5),

$$\begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

În particular, dacă $\bar{v} = \bar{f}_k$ atunci

$$\begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} = \text{col}_{(k)} P, \quad k \in \overline{1, m}. \quad (4.46)$$

Folosim scrierea tipică pentru *produsul scalar* definit de *baza canonică* \mathcal{S}_1 — vezi relațiile¹⁵ (4.17) pentru cazul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ —, și anume

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = B_{\mathcal{S}_1}(\bar{u}, \bar{v}) = \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} & \dots & u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v_1^{\mathcal{S}_1}} \\ \vdots \\ \overline{v_m^{\mathcal{S}_1}} \end{pmatrix}. \quad (4.47)$$

Evident, produsul scalar poate fi reorganizat astfel¹⁶:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = (\bar{u} \cdot \bar{v})^t = \begin{pmatrix} \overline{v_1^{\mathcal{S}_1}} & \dots & \overline{v_m^{\mathcal{S}_1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}.$$

Fie $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$. Atunci, introducem *produsul matrice-vector* — în raport cu baza \mathcal{S}_1 — via formula¹⁷

$$A\bar{u} = A \star_{\mathcal{S}_1} \bar{u} = \bar{v}, \quad \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}. \quad (4.48)$$

Exercițiul 4.14. (*Vectorul* $\bar{v} = A\bar{u}$ *în baza* \mathcal{S}_2) Este valabilă expresia — analogă formulelor (1.15) —

$$\begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix}.$$

Soluția exercițiului 4.14. Avem următoarele estimări

¹⁵ Aici, aplicația $B_{\mathcal{S}_1} : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ este liniară în primul argument și antiliniară [13, pag. 11] în cel de-al doilea argument [16, pag. 73]. Referitor la $B_{\mathcal{S}_1}$, se folosesc și denumirile *formă biliniară hermitică* [12, pag. 316], respectiv *formă hermitic simetrică, conjugat biliniară și pozitiv definită* [8, pag. 122].

¹⁶ Formulă utilizată în fizică.

¹⁷ Conform relațiilor (1.9), (1.10), există operatorul $T \in L(E, E)$ astfel încât $\mathbb{T} = A$, de unde $A\bar{u} = \mathbb{T} \star_{\mathcal{S}_1} \bar{u} = T(\bar{u})$ pentru orice $\bar{u} \in E$.

$$\begin{aligned}\bar{v} &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} = [(\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) P^{-1}] \left[A \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \right] \\ &= (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) \left[P^{-1} A P \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} \right],\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Matricea A este considerată *strict pozitiv-definită* — în raport cu produsul scalar — dacă

$$\bar{u} \cdot A\bar{u} > 0 \quad (4.49)$$

pentru orice vector nenul $\bar{u} \in E$.

Exercițiul 4.15. Fie $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și strict pozitiv-definită. Atunci, matricea A este

i) inversabilă,

ii) are doar valori proprii pozitive (implicit, reale).

iii) ([12, pag. 337, Lema 4.4]) Eigenvectorii corespunzând valorilor proprii distincte sunt ortogonali doi câte doi.

iv) Orice eigenvector generalizat este eigenvector.

v) ([12, pag. 339, Teorema 4.6]) Există o bază a spațiului E formată doar din eigenvectori ai matricei A .

Soluția exercițiului 4.15. Partea i). Dacă matricea A nu ar fi nesingulară, atunci ar exista numerele $(u_i)_{i \in \overline{1, m}} \subset \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mai departe, vectorul $\bar{u} \in E$, unde

$$\begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

ne-ar conduce la încălcarea restricției (4.49), căci $\bar{u} \cdot A\bar{u} = \bar{u} \cdot 0_E = 0$.

Partea ii). Au loc identitățile

$$\begin{aligned}
\bar{u} \cdot A\bar{v} &= \left(u_1^{\mathcal{S}_1} \cdots u_m^{\mathcal{S}_1} \right) \left[A \begin{pmatrix} \bar{v}_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ \bar{v}_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \right] = \left[\left(u_1^{\mathcal{S}_1} \cdots u_m^{\mathcal{S}_1} \right) (A^t)^t \right] \begin{pmatrix} \bar{v}_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ \bar{v}_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \\
&= \left[A^t \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} \bar{v}_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ \bar{v}_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} = (A^t \bar{u}) \cdot \bar{v} = (A\bar{u}) \cdot \bar{v}, \quad \bar{u}, \bar{v} \in E. \quad (4.50)
\end{aligned}$$

Dacă vectorul nenul \bar{u} este eigenvector al matricei A corespunzând valorii proprii $\lambda \in \mathbb{K}$, atunci — via (1.26) — $A\bar{u} = \lambda\bar{u}$, respectiv

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{u} \cdot A\bar{u} - (A\bar{u}) \cdot \bar{u} = \bar{u} \cdot (\lambda\bar{u}) - (\lambda\bar{u}) \cdot \bar{u} \\
(\text{conform (4.1)}) &= (\bar{\lambda} - \lambda) \|\bar{u}\|_2^2.
\end{aligned}$$

Așadar, eigenvalorile matricei A sunt reale, deci *sistemele liniare și omogene (1.26), (1.29) admit soluții reale nenule*. Astfel, eigenvectorii și eigenvectorii generalizați ai matricei A se găsesc în $\text{Span}_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}_1)$.

Pozitivitatea valorilor proprii rezultă din estimările

$$\lambda \cdot \|\bar{u}\|_2^2 = \bar{u} \cdot (\lambda\bar{u}) = \bar{u} \cdot A\bar{u} > 0.$$

Partea iii). Fiind date valorile proprii $\lambda \neq \mu$ și vectorii proprii corespunzători \bar{u}, \bar{v} , deducem că

$$\begin{aligned}
0 &= \bar{u} \cdot A\bar{v} - (A\bar{u}) \cdot \bar{v} = \bar{u} \cdot (\mu\bar{v}) - (\lambda\bar{u}) \cdot \bar{v} \\
&= (\mu - \lambda) (\bar{u} \cdot \bar{v}).
\end{aligned}$$

Partea iv). Să presupunem că există eigenvectorul generalizat $\bar{v} \in E$ astfel încât

$$(A - \lambda \cdot I_m)^k \bar{v} = 0_E, \quad (A - \lambda \cdot I_m)^{k-1} \bar{v} \neq 0_E$$

pentru un anumit $2 \leq k \leq m$.

Sunt valabile egalitățile

$$\begin{aligned}
A \cdot (A - \lambda \cdot I_m)^p &= [A \cdot (A - \lambda \cdot I_m)] \cdot (A - \lambda \cdot I_m)^{p-1} \\
&= [(A - \lambda \cdot I_m) \cdot A] \cdot (A - \lambda \cdot I_m)^{p-1} = \dots \\
&= (A - \lambda \cdot I_m)^p \cdot A, \quad 1 \leq p \leq k.
\end{aligned}$$

Introducând expresia $\bar{u} = (A - \lambda \cdot I_m)^{k-1} \bar{v}$ în restricția (4.49), ajungem la o contradicție, — observăm că matricea $(A - \lambda \cdot I_m)^{k-1}$ este simetrică —

$$\begin{aligned}
0 &< \bar{u} \cdot A\bar{u} \\
&= \left(v_1^{\mathcal{S}_1} \dots v_m^{\mathcal{S}_1} \right) \left[(A - \lambda \cdot I_m)^{k-1} \right]^t A (A - \lambda \cdot I_m)^{k-1} \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \\
&= \left(v_1^{\mathcal{S}_1} \dots v_m^{\mathcal{S}_1} \right) A (A - \lambda \cdot I_m)^{2k-2} \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \\
&= \left[\left(v_1^{\mathcal{S}_1} \dots v_m^{\mathcal{S}_1} \right) A (A - \lambda \cdot I_m)^{k-2} \right] \cdot \left[(A - \lambda \cdot I_m)^k \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \right] \\
&= \left[A (A - \lambda \cdot I_m)^{k-2} \bar{v} \right] \cdot \left[(A - \lambda \cdot I_m)^k \bar{v} \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Partea v). Folosim *partea iv)* și descompunerea (2.33). \square

Presupunem că, până la sfârșitul secțiunii de față, avem

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Exercițiul 4.16. (*Produsul scalar în baza \mathcal{S}_2*) Au loc identitățile

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \left(u_1^{\mathcal{S}_2} \dots u_m^{\mathcal{S}_2} \right) G \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ v_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix},$$

unde $G = P^t \cdot P$, respectiv

$$G = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} = (\bar{f}_i \cdot \bar{f}_j)_{1 \leq i, j \leq m}.$$

Soluția exercițiului 4.16. Prima egalitate rezultă din (4.18).

Pentru cea de-a doua, avem estimările — vezi (4.46) —

$$\bar{f}_i \cdot \bar{f}_j = (\text{col}_{(i)} P)^t \cdot \text{col}_{(j)} P = g_{ij}$$

oricare ar fi $1 \leq i, j \leq m$. \square

Fie¹⁸ $f \in E^*$. Plecând de la identitățile

¹⁸ Reamintesc notația de la pagina 3, $E^* = L(E, \mathbb{K})$.

$$f(\bar{u}) = (f(\bar{e}_1) \cdots f(\bar{e}_m)) \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} = (a_1^{\mathcal{S}_1} \cdots a_m^{\mathcal{S}_1}) \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

obținem *reprezentarea*¹⁹ covectorului f drept *produs scalar*²⁰ în raport cu baza \mathcal{S}_1 [8, pag. 130, Theorem], adică²¹

$$f(\bar{u}) = \bar{a} \cdot \bar{u}, \quad \bar{u} \in E,$$

unde $\bar{a} = \sum_{k=1}^m a_k^{\mathcal{S}_1} \cdot \bar{e}_k \in E$. În particular, ținând seama de (4.46), avem

$$f(\bar{f}_k) = (a_1^{\mathcal{S}_1} \cdots a_m^{\mathcal{S}_1}) \cdot \text{col}_{(k)} P = [\text{col}_{(k)} P]^t \begin{pmatrix} a_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ a_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}, \quad k \in \overline{1, m},$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} f(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ f(\bar{f}_m) \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} a_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ a_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Exercițiul 4.17. (Vectorul \bar{a} în baza \mathcal{S}_2) Este valabilă formula

$$\begin{pmatrix} a_1^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ a_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} f(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ f(\bar{f}_m) \end{pmatrix}.$$

Soluția exercițiului 4.17. Avem următoarele estimări

¹⁹ Unicitatea reprezentării se probează adaptând afirmația discutată la soluția exercițiului 4.24.

²⁰ Acest rezultat este numit frecvent *teorema F. Riesz–M. Fréchet* [12, pag. 331, Teorema 3.1].

²¹ Dacă $f \neq 0_{E^*}$, atunci — via (4.1) — $f(\bar{a}) = \|\bar{a}\|_2^2 > 0$ și $\bar{a} \in (\text{Ker } f)^\perp$ — spațiul *ortogonal* al subspațiului $\text{Ker } f$ [8, pag. 123], [16, pag. 76] —. Conform [8, pag. 130], $\bar{a} = f\left(\frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|_2}\right) \cdot \frac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|_2}$ și are loc descompunerea $\bar{u} = \left(\bar{u} - \frac{f(\bar{u})}{f(\bar{a})} \cdot \bar{a}\right) + \frac{f(\bar{u})}{f(\bar{a})} \cdot \bar{a} \in (\text{Ker } f) \oplus (\text{Ker } f)^\perp = E$. Vezi, de asemenea, nota de subsol de la pagina 127.

$$\begin{aligned}
\bar{a} &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \begin{pmatrix} a_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ a_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} = [(\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) P^{-1}] \begin{pmatrix} a_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ a_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \\
&\text{(conform (4.52))} = (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) P^{-1} \left[(P^t)^{-1} \begin{pmatrix} f(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ f(\bar{f}_m) \end{pmatrix} \right] \\
&= (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) G^{-1} \begin{pmatrix} f(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ f(\bar{f}_m) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Cu ajutorul formulelor (1.6), definim covectorii $F_k \in E^*$ astfel încât

$$F_k(\bar{f}_i) = \delta_{ki}, \quad 1 \leq i, k \leq m.$$

Aici, δ_{ki} desemnează simbolul lui Kronecker. De asemenea, via (4.51), introducem vectorii $\bar{a}_k = \sum_{i=1}^m a_{ki}^{\mathcal{S}_1} \cdot \bar{e}_i \in E$ cu proprietatea că

$$F_k(\bar{u}) = \bar{a}_k \cdot \bar{u} = \begin{pmatrix} a_{k1}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & a_{km}^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}, \quad \bar{u} \in E, \quad k \in \overline{1, m}. \quad (4.53)$$

Exercițiul 4.18. (Vectorul \bar{a}_k în baza \mathcal{S}_2) Este valabilă formula

$$\begin{pmatrix} a_{k1}^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ a_{km}^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} = \text{col}_{(k)}(G^{-1}).$$

Soluția exercițiului 4.18. Utilizăm exercițiul 4.17. Astfel,

$$\begin{pmatrix} a_{k1}^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ a_{km}^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} F_k(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ F_k(\bar{f}_m) \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \delta_{k1} \\ \vdots \\ \delta_{km} \end{pmatrix},$$

unde $k \in \overline{1, m}$. \square

Exercițiul 4.19. Fie $f \in E^*$. Atunci,

$$f = \sum_{k=1}^m f(\bar{f}_k) \cdot F_k, \quad \bar{a} = (\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_m) \begin{pmatrix} f(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ f(\bar{f}_m) \end{pmatrix}.$$

Soluția exercițiului 4.19. Prima parte rezultă din egalitățile

$$f(\bar{f}_i) = \sum_{k=1}^m f(\bar{f}_k) \delta_{ki} = \left(\sum_{k=1}^m f(\bar{f}_k) \cdot F_k \right) (\bar{f}_i), \quad i \in \overline{1, m}.$$

La partea a doua, folosim exercițiile 4.17, 4.18. Astfel,

$$\bar{a} = (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) \begin{pmatrix} a_1^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ a_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} = [(\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) G^{-1}] \begin{pmatrix} f(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ f(\bar{f}_m) \end{pmatrix},$$

de unde rezultă concluzia. \square

Observăm că au loc relațiile²² — aici, $G = P^t \cdot P$ —

$$\begin{aligned} (\bar{a}_1 \cdots \bar{a}_m) &= (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) G^{-1} = [(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) P] G^{-1} \\ &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) (P^{-1})^t, \end{aligned} \quad (4.54)$$

respectiv este valabilă *restricția de biortogonalitate*

$$\bar{a}_k \cdot \bar{f}_i = F_k(\bar{f}_i) = \delta_{ki}, \quad 1 \leq i, k \leq m. \quad (4.55)$$

Astfel, setul de vectori

$$\mathcal{S}_3 = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m\}$$

desemnează *baza reciprocă* în E a bazei \mathcal{S}_2 . Vezi [11, pag. 37].

Fie vectorii $(\bar{b}_k)_{k \in \overline{1, m-1}} \subset E$, cu expresiile

$$\bar{b}_k = \sum_{i=1}^m b_{ki}^{\mathcal{S}_1} \cdot \bar{e}_i, \quad 1 \leq k \leq m-1, \quad m \geq 3.$$

Introducem covectorul $F \in E^*$ dat de relația

$$F(\bar{u}) = F_{\mathcal{S}_1}(\bar{u}) = \begin{pmatrix} b_{11}^{\mathcal{S}_1} & b_{12}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & b_{1m}^{\mathcal{S}_1} \\ b_{21}^{\mathcal{S}_1} & b_{22}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & b_{2m}^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{(m-1)1}^{\mathcal{S}_1} & b_{(m-1)2}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & b_{(m-1)m}^{\mathcal{S}_1} \\ u_1^{\mathcal{S}_1} & u_2^{\mathcal{S}_1} & \cdots & u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}, \quad \bar{u} \in E. \quad (4.56)$$

²² Cum P reprezintă matricea de schimbare de bază a vectorilor — se trece de la \mathcal{S}_1 la \mathcal{S}_2 —, $(P^{-1})^t$ desemnează matricea de schimbare de bază a covectorilor — când se trece de la duala \mathcal{C}_1 a bazei \mathcal{S}_1 la duala \mathcal{C}_2 a bazei \mathcal{S}_2 — [13, pag. 13].

Numărul real $F(\bar{u})$, notat cu $(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}, \bar{u})$, constituie *produsul mixt*²³ (forma determinant²⁴) al vectorilor $(\bar{b}_k)_{k \in \overline{1, m-1}}$, \bar{u} . Vezi [11, pag. 31].

Vectorul folosit la reprezentarea²⁵ în formă de produs scalar a covectorului F , notat cu $\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k$, desemnează *produsul vectorial* al vectorilor $(\bar{b}_k)_{k \in \overline{1, m-1}}$. Au loc egalitățile

$$F(\bar{u}) = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}, \bar{u}) = \left(\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right) \cdot \bar{u}, \quad \bar{u} \in E.$$

Exercițiul 4.20. (*Produsul vectorial ca determinant*) Avem formula

$$\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k = \begin{vmatrix} b_{11}^{\mathcal{S}_1} & b_{12}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & b_{1m}^{\mathcal{S}_1} \\ b_{21}^{\mathcal{S}_1} & b_{22}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & b_{2m}^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{(m-1)1}^{\mathcal{S}_1} & b_{(m-1)2}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & b_{(m-1)m}^{\mathcal{S}_1} \\ \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_m \end{vmatrix}, \quad (4.57)$$

cu convenția ca *determinantul să fie dezvoltat după ultima linie*.

Soluția exercițiului 4.20. Dezvoltăm după ultima linie determinantul din (4.56). Astfel, observăm că — aici, $D_i^{\mathcal{S}_1}$ desemnează cofactorul²⁶ elementului $u_i^{\mathcal{S}_1}$ [14, pag. 9] —

$$\begin{aligned} F(\bar{u}) &= \sum_{i=1}^m u_i^{\mathcal{S}_1} \cdot D_i^{\mathcal{S}_1} = \left(D_1^{\mathcal{S}_1} \cdots D_m^{\mathcal{S}_1} \right) \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m D_i^{\mathcal{S}_1} \cdot \bar{e}_i \right) \cdot \bar{u}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Concluzia rezultă din (4.47) pe baza unicității reprezentării ca produs scalar a covectorului F . \square

Exercițiul 4.21. (*Produsul scalar dintre produsul vectorial și factorii săi*) Produsul vectorial le este ortogonal factorilor săi,

$$\bar{b}_i \cdot \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k = 0, \quad i \in \overline{1, m-1}.$$

²³ În cazul $m = 3$, se întâlnește și denumirea *triplu produs scalar* [21, pag. 10].

²⁴ Vezi [5, pag. 70].

²⁵ Vezi [5, pag. 92].

²⁶ Se utilizează și denumirile de *complement* ori *complementar algebric* al elementului $u_i^{\mathcal{S}_1}$ [12, pag. 133].

Soluția exercițiului 4.21. Remarcăm faptul că determinantul din (4.56) este nul dacă ultima linie a sa este o combinație liniară a celorlalte linii [12, pag. 132]. Astfel,

$$\text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}\} \subseteq \text{Ker } F.$$

De asemeni, dacă vectorii $(\bar{b}_k)_{k \in \overline{1, m-1}}$ sunt liniar dependenți peste \mathbb{R} , atunci $\text{Ker } F = E$. \square

Exercițiul 4.22. (*Liniar independența factorilor dintr-un produs vectorial*) Vectorii din setul $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}\}$ sunt liniar independenți peste \mathbb{R} dacă și numai dacă

$$\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \neq 0_E.$$

Soluția exercițiului 4.22. Liniar dependența acestor vectori este echivalentă cu faptul că măcar una dintre primele $m-1$ linii ale determinantului (4.57) poate fi reprezentată ca o combinație liniară a celorlalte $m-2$ linii — dintre primele $m-1$ linii cu intrări scalare —. Combinația liniară se păstrează în toți minorii folosiți la calculul numerelor $(D_i^{\mathcal{S}^1})_{i \in \overline{1, m}}$. Deci, dacă produsul vectorial este nenul, atunci factorii acestuia sunt liniar independenți.

Dacă factorii sunt liniar independenți, atunci putem adapta demonstrația Lemei 1.1 pentru a stabili că produsul vectorial este nenul. Vezi și [12, pag. 139, Corolarul 2.4]. \square

Exercițiul 4.23. (*Produsul mixt dintre produsul vectorial și factorii săi*) Are loc identitatea

$$\left(\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_{m-1}, \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right) = \left\| \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right\|_2^2.$$

Soluția exercițiului 4.23. Via (4.58), avem

$$F \left(\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right) = \sum_{i=1}^m (D_i^{\mathcal{S}^1})^2 = \left(\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right)^2,$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Exercițiul 4.24. (*Baza reciprocă via produsul vectorial și produsul mixt*) Dacă $m \geq 3$, atunci vectorii $(\bar{a}_i)_{i \in \overline{1, m}}$, introduși în (4.53), au următoarele expresii:²⁷

²⁷ Putem folosi, ca notație, *pălăria* $\widehat{}$ pentru a desemna factorul lipsă:

$$\bar{a}_i = (-1)^{m-i} \cdot \frac{\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 \times \dots \times \bar{f}_{i-1} \times \widehat{\bar{f}_i} \times \bar{f}_{i+1} \times \bar{f}_{i+2} \times \dots \times \bar{f}_m}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)}, \quad i \in \overline{1, m}.$$

$$\begin{cases} \bar{a}_1 = (-1)^{m-1} \cdot \frac{\bar{f}_2 \times \bar{f}_3 \times \cdots \times \bar{f}_m}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)}, \\ \bar{a}_i = (-1)^{m-i} \cdot \frac{\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 \times \cdots \times \bar{f}_{i-1} \times \bar{f}_{i+1} \times \bar{f}_{i+2} \times \cdots \times \bar{f}_m}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)}, & i \in \overline{2, m-1}, \\ \bar{a}_m = \frac{\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 \times \cdots \times \bar{f}_{m-1}}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)}. \end{cases} \quad (4.59)$$

Soluția exercițiului 4.24. Fac următoarea afirmație: *fiind dați vectorii $(\bar{f}_i)_{i \in \overline{1, m}}$ din (4.55), care alcătuiesc o bază a spațiului liniar E , există cel mult o familie $(\bar{a}_i)_{i \in \overline{1, m}}$ cu proprietatea că $\bar{a}_k \cdot \bar{f}_i = \delta_{ki}$ pentru orice i, k .*

Într-adevăr, în caz contrar ar exista seturile de vectori $(\bar{b}_i)_{i \in \overline{1, m}}$, $(\bar{c}_i)_{i \in \overline{1, m}}$, unde $\bar{c}_i = \bar{a}_i - \bar{b}_i = \sum_{j=1}^m c_{ij}^{\mathcal{S}_1} \cdot \bar{e}_j$, pentru care

$$\bar{b}_k \cdot \bar{f}_i = \delta_{ki}, \quad \bar{c}_k \cdot \bar{f}_i = 0, \quad 1 \leq i, k \leq m,$$

iar vectorii \bar{c}_i nu ar fi toți nuli. Atunci, sistemul algebric — conform (4.46) —

$$P^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ar admite soluții nenule²⁸, de forma $\begin{pmatrix} c_{i1}^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ c_{im}^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}$, ceea ce ar contrazice nesingularitatea

matricei P . Afirmația este probată.

Mai departe, să remarcăm că

$$(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m) = \det P, \quad (4.60)$$

respectiv

$$\begin{aligned} & (\bar{f}_1 \times \bar{f}_2 \times \cdots \times \bar{f}_{i-1} \times \bar{f}_{i+1} \times \bar{f}_{i+2} \times \cdots \times \bar{f}_m) \cdot \bar{w} \\ &= (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{i-1}, \bar{f}_{i+1}, \bar{f}_{i+2}, \dots, \bar{f}_m, \bar{w}) \\ &= (-1)^{m-i} \cdot (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{i-1}, \bar{w}, \bar{f}_{i+1}, \dots, \bar{f}_m), \quad \bar{w} \in E. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Pentru a proba partea a doua a dublei egalități anterioare, transformăm primul produs mixt în cel de-al doilea cu ajutorul a $m-i$ permutări de linii.

În sfârșit, via (4.60), (4.61), vectorii din partea dreaptă a egalităților (4.59) — notați \bar{b}_i , unde $1 \leq i \leq m$ — verifică relațiile $\bar{b}_k \cdot \bar{f}_i = \delta_{ki}$ pentru orice i, k , ceea ce încheie demonstrația. \square

²⁸ Cu alte cuvinte, ar exista vectori nenuli care să îi fie ortogonali unei baze a spațiului E [12, pag. 329, Propoziția 2.10 (ii)].

Exercițiul 4.25. (Baza reciprocă a bazei \mathcal{S}_3) Vectorii bazei \mathcal{S}_2 admit reprezentările — $m \geq 3$ —

$$\begin{cases} \bar{f}_1 = (-1)^{m-1} \cdot \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3 \times \dots \times \bar{a}_m}{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)}, \\ \bar{f}_i = (-1)^{m-i} \cdot \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \times \dots \times \bar{a}_{i-1} \times \bar{a}_{i+1} \times \bar{a}_{i+2} \times \dots \times \bar{a}_m}{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)}, \quad i \in \overline{2, m-1}, \\ \bar{f}_m = \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 \times \dots \times \bar{a}_{m-1}}{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)}. \end{cases} \quad (4.62)$$

Soluția exercițiului 4.25. Notăm cu \bar{b}_i , unde $1 \leq i \leq m$, vectorii din partea dreaptă a egalităților (4.62). Atunci, deducem că

$$\bar{c}_k = \bar{f}_k - \bar{b}_k, \quad \bar{c}_k \cdot \bar{a}_i = 0, \quad 1 \leq i, k \leq m.$$

Aplicăm raționamentul de la exercițiul 4.24: vectorii $(\bar{c}_k)_{k \in \overline{1, m}}$, fiindu-i ortogonali bazei \mathcal{S}_3 , sunt obligatoriu nuli. \square

Exercițiul 4.26. (Produsul mixt în baza \mathcal{S}_2) Este valabilă identitatea

$$(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}, \bar{u}) = \det P \cdot \begin{vmatrix} b_{11}^{\mathcal{S}_2} & b_{12}^{\mathcal{S}_2} & \dots & b_{1m}^{\mathcal{S}_2} \\ b_{21}^{\mathcal{S}_2} & b_{22}^{\mathcal{S}_2} & \dots & b_{2m}^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{(m-1)1}^{\mathcal{S}_2} & b_{(m-1)2}^{\mathcal{S}_2} & \dots & b_{(m-1)m}^{\mathcal{S}_2} \\ u_1^{\mathcal{S}_2} & u_2^{\mathcal{S}_2} & \dots & u_m^{\mathcal{S}_2} \end{vmatrix}.$$

Soluția exercițiului 4.26. Utilizăm egalitățile (4.45). \square

Exercițiul 4.27. (Produsul mixt ca determinant J . Gram) Are loc egalitatea

$$(\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}, \bar{u}) = \frac{1}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)} \cdot \begin{vmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_m \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_m \\ \bar{u} \cdot \bar{f}_1 & \bar{u} \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{u} \cdot \bar{f}_m \end{vmatrix}. \quad (4.63)$$

În particular, — [12, pag. 352, Exercițiul 3 a)] —

$$(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)^2 = \begin{vmatrix} \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_1 & \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_1 \cdot \bar{f}_m \\ \bar{f}_2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{f}_2 \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_2 \cdot \bar{f}_m \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{f}_m \cdot \bar{f}_1 & \bar{f}_m \cdot \bar{f}_2 & \dots & \bar{f}_m \cdot \bar{f}_m \end{vmatrix}. \quad (4.64)$$

Soluția exercițiului 4.27. Remarcăm că

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} b_{11}^{\mathcal{S}_1} & b_{12}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & b_{1m}^{\mathcal{S}_1} \\ b_{21}^{\mathcal{S}_1} & b_{22}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & b_{2m}^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{(m-1)1}^{\mathcal{S}_1} & b_{(m-1)2}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & b_{(m-1)m}^{\mathcal{S}_1} \\ u_1^{\mathcal{S}_1} & u_2^{\mathcal{S}_1} & \cdots & u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11}^{\mathcal{S}_1} & f_{12}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & f_{1m}^{\mathcal{S}_1} \\ f_{21}^{\mathcal{S}_1} & f_{22}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & f_{2m}^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{m1}^{\mathcal{S}_1} & f_{m2}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & f_{mm}^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}^t \\
&= \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_m \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_m \\ \bar{u} \cdot \bar{f}_1 & \bar{u} \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{u} \cdot \bar{f}_m \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Exercițiul 4.28. (*Produsul vectorial via produsul scalar și produsul mixt*) Avem relația

$$\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k = \frac{1}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)} \cdot \begin{vmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_m \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_m \\ \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \cdots & \bar{f}_m \end{vmatrix}, \quad (4.65)$$

cu convenția ca *determinantul să fie dezvoltat după ultima linie*.

Soluția exercițiului 4.28. Reorganizăm determinantul din (4.63) sub forma

$$\begin{aligned}
& \begin{vmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_m \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_m \\ \bar{u} \cdot \bar{f}_1 & \bar{u} \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{u} \cdot \bar{f}_m \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_m \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_m \end{vmatrix} \\
& \left(\sum_{j=1}^m u_j^{\mathcal{S}_1} \cdot f_{1j}^{\mathcal{S}_1} \right) \left(\sum_{j=1}^m u_j^{\mathcal{S}_1} \cdot f_{2j}^{\mathcal{S}_1} \right) \cdots \left(\sum_{j=1}^m u_j^{\mathcal{S}_1} \cdot f_{mj}^{\mathcal{S}_1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^m u_j^{\mathcal{S}_1} \cdot \begin{vmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_m \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_m \\ f_{1j}^{\mathcal{S}_1} & f_{2j}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & f_{mj}^{\mathcal{S}_1} \end{vmatrix} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m \begin{vmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_m \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_m \\ f_{1j}^{\mathcal{S}_1} & f_{2j}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & f_{mj}^{\mathcal{S}_1} \end{vmatrix} \cdot \bar{e}_j \right) \cdot \bar{u},
\end{aligned}$$

de unde

$$F(\bar{u}) = (\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}, \bar{u}) = \left(\sum_{j=1}^m \mathcal{BF}_j^{\mathcal{S}_1} \cdot \bar{e}_j \right) \cdot \bar{u}, \quad \bar{u} \in E, \quad (4.66)$$

pentru

$$\mathcal{BF}_j^{\mathcal{S}_1} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_1 \cdot \bar{f}_m \\ \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_2 \cdot \bar{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_1 & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_2 & \cdots & \bar{b}_{m-1} \cdot \bar{f}_m \\ f_{1j}^{\mathcal{S}_1} & f_{2j}^{\mathcal{S}_1} & \cdots & f_{mj}^{\mathcal{S}_1} \end{vmatrix}}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)}, \quad j \in \overline{1, m}.$$

Concluzia rezultă din (4.66) pe baza unicității reprezentării ca produs scalar a covectorului F . \square

Exercițiul 4.29. (*Dublul produs vectorial*²⁹, *J. Lagrange, H. Grassmann*) Fie $m = 3$. Atunci, are loc identitatea

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c}) \bar{a}, \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in E. \quad (4.67)$$

De asemenea³⁰,

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = -\bar{c} \times \widehat{\bar{d}} \times (\bar{a} \times \bar{b}) = \begin{vmatrix} \bar{c} \cdot \bar{a} & \bar{c} \cdot \bar{b} \\ \widehat{\bar{d} \cdot \bar{a}} & \widehat{\bar{d} \cdot \bar{b}} \\ \bar{a} & \bar{b} \end{vmatrix}, \quad \bar{d} \in E.$$

²⁹ Vezi [11, pag. 33]. Se întâlnește și denumirea *triplu produs vectorial* [21, pag. 12] pentru cantitatea $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$.

³⁰ Reorganizarea egalității (4.67) ne permite generalizarea sa. Vezi exercițiul 4.37.

Soluția exercițiului 4.29. Vectori liniar dependenți. Dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\bar{a} = \lambda \cdot \bar{b}$, atunci

$$\begin{aligned}\bar{a} \times \bar{b} = 0_E &= (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} \\ &= \lambda \cdot [(\bar{b} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{b}) \bar{c}] = [(\lambda \bar{b}) \cdot \bar{c}] \bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c}) (\lambda \bar{b}) \\ &= (\bar{a} \cdot \bar{c}) \bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{c}) \bar{a}.\end{aligned}$$

Dacă $\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a}$, atunci este suficient să probăm egalitatea

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{a} = (\bar{a}^2) \bar{b} - (\bar{b} \cdot \bar{a}) \bar{a}. \quad (4.68)$$

Începem prin a observa că — vezi exercițiul 4.23 —

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}) = \|\bar{a} \times \bar{b}\|_2^2, \quad \bar{a}, \bar{b} \in E.$$

Expresia (4.65) ne conduce la relația — conform exercițiului 4.22, impunem ca $\bar{a} \times \bar{b} \neq 0_E$ —

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{a} = \frac{1}{\|\bar{a} \times \bar{b}\|_2^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \|\bar{a} \times \bar{b}\|_2^2 \\ \bar{a}^2 & \bar{a} \cdot \bar{b} & 0 \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{a} \times \bar{b} \end{vmatrix}.$$

Ajagem la (4.68) dezvoltând determinantul după ultima linie.

Vectori liniar independenți.³¹ Dacă $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \neq 0$, atunci identitatea (4.65) implică

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = \frac{1}{(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \\ \bar{c} \cdot \bar{a} & \bar{c} \cdot \bar{b} & \bar{c}^2 \\ \bar{a} & \bar{b} & \bar{c} \end{vmatrix},$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Exercițiul 4.30. (*Dublul produs vectorial, formula A. Cauchy–J. Binet*) Fie $m = 3$. Atunci, este valabilă expresia

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) = \frac{|\bar{a} \cdot \bar{c} \bar{a} \cdot \bar{d}|}{|\bar{b} \cdot \bar{c} \bar{b} \cdot \bar{d}|}, \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in E. \quad (4.69)$$

În particular, are loc *identitatea lui J. Lagrange*, și anume

$$\|\bar{a} \times \bar{b}\|_2^2 = \frac{|\bar{a}^2 \bar{a} \cdot \bar{b}|}{|\bar{b} \cdot \bar{a} \bar{b}^2|} = \bar{a}^2 \cdot \bar{b}^2 - (\bar{a} \cdot \bar{b})^2. \quad (4.70)$$

³¹ Altă soluție a acestui caz este oferită de exercițiul 4.37: scriem produsul $\bar{c} \times (\bar{a} \times \bar{b})$ în baza $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \times \bar{b}\}$.

Soluția exercițiului 4.30. Vectori linear dependenți. Dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\bar{c} = \lambda \cdot \bar{d}$, atunci $\bar{c} \times \bar{d} = 0_E$ și

$$\begin{aligned} (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) &= 0 \\ &= \lambda \cdot \frac{|\bar{a} \cdot \bar{d} \bar{a} \cdot \bar{d}|}{|\bar{b} \cdot \bar{d} \bar{b} \cdot \bar{d}|} \\ &= \frac{|\bar{a} \cdot (\lambda \cdot \bar{d}) \bar{a} \cdot \bar{d}|}{|\bar{b} \cdot (\lambda \cdot \bar{d}) \bar{b} \cdot \bar{d}|}. \end{aligned}$$

Vectori linear independenți. Dacă $\bar{c} \times \bar{d} \neq 0_E$, atunci — via relația (4.63) — avem

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \times \bar{d}) &= (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) \\ &= \frac{1}{(\bar{c}, \bar{d}, \bar{c} \times \bar{d})} \cdot \begin{vmatrix} \bar{a} \cdot \bar{c} \bar{a} \cdot \bar{d} \bar{a} \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) \\ \bar{b} \cdot \bar{c} \bar{b} \cdot \bar{d} \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) \\ 0 & 0 & (\bar{c} \times \bar{d})^2 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Ajagem la (4.69) dezvoltând determinantul din (4.71) după ultima linie. \square

Exercițiul 4.31. Fie $m = 3$. În contextul exercițiilor 4.16, 4.18, matricea G^{-1} este simetrică și admite reprezentările

$$\begin{aligned} G^{-1} &= \frac{1}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)^2} \\ &\times \begin{pmatrix} (\bar{f}_2 \times \bar{f}_3, \bar{f}_2, \bar{f}_3) & (\bar{f}_1, \bar{f}_2 \times \bar{f}_3, \bar{f}_3) & (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_2 \times \bar{f}_3) \\ (\bar{f}_3 \times \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) & (\bar{f}_1, \bar{f}_3 \times \bar{f}_1, \bar{f}_3) & (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3 \times \bar{f}_1) \\ (\bar{f}_1 \times \bar{f}_2, \bar{f}_2, \bar{f}_3) & (\bar{f}_1, \bar{f}_1 \times \bar{f}_2, \bar{f}_3) & (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_1 \times \bar{f}_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$= \frac{1}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \begin{pmatrix} (\bar{a}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3) & (\bar{a}_2, \bar{f}_2, \bar{f}_3) & (\bar{a}_3, \bar{f}_2, \bar{f}_3) \\ (\bar{f}_1, \bar{a}_1, \bar{f}_3) & (\bar{f}_1, \bar{a}_2, \bar{f}_3) & (\bar{f}_1, \bar{a}_3, \bar{f}_3) \\ (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{a}_1) & (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{a}_2) & (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{a}_3) \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

Soluția exercițiului 4.31. Formula (4.72). Inversa matricei $G = (g_{ij})_{i,j \in \overline{1,3}}$ are expresia

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G} \cdot \begin{pmatrix} G^{11} & G^{21} & G^{31} \\ G^{12} & G^{22} & G^{32} \\ G^{13} & G^{23} & G^{33} \end{pmatrix},$$

unde G^{ji} reprezintă cofactorul elementului g_{ij} [12, pag. 136, Propoziția 1.4]. De asemenea, pe baza formulei (4.64), $\det G = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)^2$.

Prin calcul direct,

$$\begin{aligned}
G^{11} &= \overline{f_2^2 f_3^2} - (\overline{f_2} \cdot \overline{f_3})^2 \\
(\text{conform (4.70)}) &= \|\overline{f_2} \times \overline{f_3}\|_2^2 \\
&= (\overline{f_2} \times \overline{f_3}, \overline{f_2}, \overline{f_3}).
\end{aligned}$$

În mod analog, stabilim valorile intrărilor G^{22} , G^{33} .

Apoi,

$$\begin{aligned}
G^{12} &= - \begin{vmatrix} \overline{f_1} \cdot \overline{f_2} & \overline{f_1} \cdot \overline{f_3} \\ \overline{f_3} \cdot \overline{f_2} & \overline{f_3}^2 \end{vmatrix} \\
(\text{conform (4.69)}) &= - (\overline{f_1} \times \overline{f_3}) \cdot (\overline{f_2} \times \overline{f_3}) \\
&= (\overline{f_1}, \overline{f_2} \times \overline{f_3}, \overline{f_2}).
\end{aligned}$$

În mod analog, stabilim valorile intrărilor G^{ij} , unde $i \neq j$.

Simetria matricei G^{-1} . Avem egalitățile

$$\begin{aligned}
G^{21} &= (\overline{f_1}, \overline{f_2} \times \overline{f_3}, \overline{f_3}) = [\overline{f_1} \times (\overline{f_2} \times \overline{f_3})] \cdot \overline{f_3} \\
&= (\overline{f_1} \cdot \overline{f_3}) (\overline{f_2} \cdot \overline{f_3}) - (\overline{f_1} \cdot \overline{f_2}) \overline{f_3}^2 \\
&= [(\overline{f_3} \cdot \overline{f_2}) \overline{f_1} - (\overline{f_1} \cdot \overline{f_2}) \overline{f_3}] \cdot \overline{f_3} \\
&= [(\overline{f_3} \times \overline{f_1}) \times \overline{f_2}] \cdot \overline{f_3} = (\overline{f_3} \times \overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3}) \\
&= G^{12}.
\end{aligned}$$

În mod analog, testăm faptul că $G^{ij} = G^{ji}$, unde $i \neq j$.

Formula (4.73). Aplicăm exercițiul 4.24. \square

Exercițiul 4.32. (Coordonate în baza \mathcal{S}_2 . Cazul $m = 3$) Are loc identitatea

$$\overline{w} = \frac{(\overline{w}, \overline{f_2}, \overline{f_3})}{(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3})} \cdot \overline{f_1} + \frac{(\overline{f_1}, \overline{w}, \overline{f_3})}{(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3})} \cdot \overline{f_2} + \frac{(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{w})}{(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \overline{f_3})} \cdot \overline{f_3}, \quad \overline{w} \in E.$$

Soluția exercițiului 4.32. Fie $(w_i)_{i \in \overline{1,3}}$ coordonatele vectorului \overline{w} în baza³² \mathcal{S}_3 . Deducem că — via exercițiul 4.18 și reprezentarea (4.73) —

³² Introdusă la pagina 115.

$$\begin{aligned}
\bar{w} &= \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \bar{a}_i \\
&= w_1 \cdot \left[\frac{(\bar{a}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_1 + \frac{(\bar{f}_1, \bar{a}_1, \bar{f}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_2 + \frac{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{a}_1)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_3 \right] \\
&+ w_2 \cdot \left[\frac{(\bar{a}_2, \bar{f}_2, \bar{f}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_1 + \frac{(\bar{f}_1, \bar{a}_2, \bar{f}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_2 + \frac{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{a}_2)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_3 \right] \\
&+ w_3 \cdot \left[\frac{(\bar{a}_3, \bar{f}_2, \bar{f}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_1 + \frac{(\bar{f}_1, \bar{a}_3, \bar{f}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_2 + \frac{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{a}_3)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_3 \right] \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^3 w_i \cdot \bar{a}_i, \bar{f}_2, \bar{f}_3 \right)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_1 + \frac{\left(\bar{f}_1, \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \bar{a}_i, \bar{f}_3 \right)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_2 + \frac{\left(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \sum_{i=1}^3 w_i \cdot \bar{a}_i \right)}{(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3)} \cdot \bar{f}_3,
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Exercițiul 4.33. (Coordonate în bazele $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$) Sunt valabile egalitățile

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^m (\bar{w} \cdot \bar{a}_i) \cdot \bar{f}_i = \sum_{i=1}^m (\bar{w} \cdot \bar{f}_i) \cdot \bar{a}_i, \quad \bar{w} \in E.$$

Soluția exercițiului 4.33. Fie $(W_i)_{i \in \overline{1, m}}$ și $(w_i)_{i \in \overline{1, m}}$ coordonatele vectorului \bar{w} în bazele \mathcal{S}_2 , respectiv \mathcal{S}_3 . Pentru a calcula aceste numere, le aplicăm produsul scalar relațiilor

$$\bar{w} = \sum_{i=1}^m W_i \cdot \bar{f}_i = \sum_{i=1}^m w_i \cdot \bar{a}_i$$

și ținem seama de restricția de biortogonalitate (4.55). \square

Exercițiul 4.34. (Regula lui G. Cramer) Fie $\bar{w} \in E$. În contextul exercițiului 4.33, avem formulele — $m \geq 3$ —

$$\begin{cases} \bar{w} \cdot \bar{a}_1 = \frac{(\bar{w}, \bar{f}_2, \bar{f}_3, \dots, \bar{f}_m)}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)}, \\ \bar{w} \cdot \bar{a}_i = \frac{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{i-1}, \bar{w}, \bar{f}_{i+1}, \dots, \bar{f}_m)}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)}, \\ \bar{w} \cdot \bar{a}_m = \frac{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{m-1}, \bar{w})}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)}, \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{cases} \bar{w} \cdot \bar{f}_1 = \frac{(\bar{w}, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots, \bar{a}_m)}{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)}, \\ \bar{w} \cdot \bar{f}_i = \frac{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{i-1}, \bar{w}, \bar{a}_{i+1}, \dots, \bar{a}_m)}{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)}, \\ \bar{w} \cdot \bar{f}_m = \frac{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m-1}, \bar{w})}{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)}, \end{cases}$$

unde $i \in \overline{2, m-1}$.

Soluția exercițiului 4.34. Prima soluție. Folosim estimarea (4.61).

A doua soluție. Fie $(u_i)_{i \in \overline{1, m}}$ și $(W_i)_{i \in \overline{1, m}}$ coordonatele vectorului \bar{w} în bazele \mathcal{S}_1 , respectiv \mathcal{S}_2 . Atunci,

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \sum_{i=1}^m W_i \cdot \bar{f}_i = (\bar{f}_1 \cdots \bar{f}_m) \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_m \end{pmatrix} = (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \left[P \cdot \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_m \end{pmatrix} \right] \\ &= (\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_m) \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Avem de rezolvat, așadar, sistemul algebric cramerian

$$P \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}. \quad (4.74)$$

Formula soluției este dată de expresiile [12, pag. 142, Propoziția 3.3]

$$W_i = \frac{\det P_i}{\det P}, \quad i \in \overline{1, m},$$

unde P_i desemnează matricea obținută din matricea P prin înlocuirea celei de-a i -a coloane cu coloana situată în partea dreaptă a ecuației (4.74).

Concluzia rezultă din (4.56), (4.60). \square

Exercițiul 4.35. (Baza reciprocă într-un hiperplan) Dacă vectorii $(\bar{b}_i)_{i \in \overline{1, m-1}}$, unde $m \geq 3$, sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{R} , atunci

i) setul $\left\{ \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}, \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right\}$ alcătuiește o bază a spațiului E .

ii) Vectorii $(\bar{B}_i)_{i \in \overline{1, m-1}}$, cu formula — [3, pag. 6] —

$$\bar{B}_i = (-1)^{m-i} \cdot \frac{\bar{b}_1 \times \cdots \times \bar{b}_{i-1} \times \widehat{\bar{b}_i} \times \bar{b}_{i+1} \times \cdots \times \bar{b}_{m-1} \times \left(\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right)}{\left\| \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right\|_2^2}, \quad (4.75)$$

unde $1 \leq i \leq m-1$, se găsesc în hiperplanul $\mathcal{H} = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{ \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1} \}$.

iii) Au loc restricțiile de biortogonalitate

$$\bar{B}_i \cdot \bar{b}_k = \delta_{ik}, \quad 1 \leq i, k \leq m-1. \quad (4.76)$$

iv) Setul $\{\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_{m-1}\}$, dat de (4.75), constituie singura familie de vectori din \mathcal{H} care îndeplinește restricția de biortogonalitate (4.76).

Soluția exercițiului 4.35. Partea i). Ținând seama de exercițiul 4.22, introducem vectorul $\bar{b} = \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \neq 0_E$.

Formula (4.60) implică, via exercițiul 4.23, faptul că determinantul matricei de schimbare de bază — trecerea de la \mathcal{S}_1 la setul de vectori din enunț — are valoarea

$$\left\| \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right\|_2^2 > 0.$$

Partea iii). Folosim estimările (4.61).

Partea ii).³³ Fie subspațiul liniar $M = \mathbb{R}\bar{b}$ al spațiului E . Introducem subspațiul liniar $M^\perp = \{\bar{u} \in E \mid \bar{u} \cdot \bar{b} = 0\}$. Atunci — [8, pag. 129, Theorem] —,

$$E = M \oplus M^\perp \quad (4.77)$$

și $\dim_{\mathbb{R}} M^\perp = m - \dim_{\mathbb{R}} M = m - 1$.

Pentru a stabili egalitatea (4.77), să remarcăm că orice vector $\bar{u} \in E$ poate fi descompus astfel³⁴:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \left(\bar{u} - \frac{\bar{u} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|_2^2} \cdot \bar{b} \right) + \frac{\bar{u} \cdot \bar{b}}{\|\bar{b}\|_2^2} \cdot \bar{b} \\ &= \bar{v} + \bar{w}, \quad \bar{v} \in M^\perp, \bar{w} = \lambda \cdot \bar{b} \in M, \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mai departe, exercițiul 4.21 ne conduce la

$$\bar{b}_i \cdot \bar{b} = \bar{B}_i \cdot \bar{b} = 0, \quad i \in \overline{1, m-1},$$

de unde deducem că setul $\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}\}$ alcătuiește o bază a spațiului M^\perp , respectiv $(\bar{B}_i)_{i \in \overline{1, m-1}} \subset M^\perp$. Aici, $\mathcal{H} = M^\perp$.

Afirm că setul $\{\bar{B}_1, \dots, \bar{B}_{m-1}\}$ alcătuiește o bază a spațiului M^\perp . Pentru aceasta este suficient să arătăm că vectorii din set sunt liniar independenți peste corpul \mathbb{R} [8, pag. 11, Theorem]. Dacă, prin absurd, ar exista numerele reale $(\alpha_i)_{i \in \overline{1, m-1}}$, nu toate nule, astfel încât

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \cdot \bar{B}_i = 0_E,$$

atunci, conform (4.76), am ajunge la

³³ Pentru altă abordare, vezi exercițiul 4.37.

³⁴ Reprezentarea este unică deoarece $M \cap M^\perp = \{0_E\}$. Într-adevăr, dacă ar exista vectorii $\bar{p} \in M$ și $\bar{q} \in M^\perp$ astfel încât $\bar{p} = \bar{q}$, atunci ar avea loc egalitățile $0 = \bar{p} \cdot \bar{q} = \|\bar{p}\|_2^2$, de unde $\bar{p} = 0_E$.

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i \cdot \bar{B}_i \right) \cdot \bar{b}_k = \alpha_k \cdot (\bar{B}_k \cdot \bar{b}_k) = \alpha_k, \quad k \in \overline{1, m-1},$$

adică la o contradicție. Afirmatia a fost probată.

Partea iv). Adaptăm tehnica de la soluția exercițiului 4.24. Astfel, dacă vectorii $(\bar{c}_i)_{i \in \overline{1, m-1}}$, $(\bar{d}_i)_{i \in \overline{1, m-1}}$ desemnează baze ale subspațiului \mathcal{H} cu proprietatea că

$$\bar{c}_i \cdot \bar{b}_k = \bar{d}_i \cdot \bar{b}_k = \delta_{ik}, \quad 1 \leq i, k \leq m-1,$$

atunci seturile

$$\left\{ \bar{c}_1, \dots, \bar{c}_{m-1}, \frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|_2^2} \right\}, \quad \left\{ \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_{m-1}, \frac{\bar{b}}{\|\bar{b}\|_2^2} \right\}$$

sunt baze ale spațiului E care verifică restricția de biortogonalitate în raport cu baza de la *partea i*). \square

Exercițiul 4.36. (*Orientarea bazelor reciproce*) În contextul exercițiului 4.35, *i*) bazele $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ sunt la fel orientate³⁵ în spațiul liniar E .
ii) Avem identitatea

$$\prod_{i=1}^{m-1} \bar{B}_i = \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \bar{b}_i}{\left\| \prod_{i=1}^{m-1} \bar{b}_i \right\|_2^2}. \quad (4.78)$$

iii)³⁶ Dacă familiile $\mathcal{B}_1 = (\bar{b}_i)_{i \in \overline{1, m-1}}$ și $\mathcal{B}_2 = (\bar{B}_i)_{i \in \overline{1, m-1}}$ sunt baze reciproce în hiperplanul \mathcal{H} , atunci seturile de vectori

$$\left\{ \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{m-1}, \prod_{i=1}^{m-1} \bar{b}_i \right\}, \quad \left\{ \bar{B}_1, \dots, \bar{B}_{m-1}, \prod_{i=1}^{m-1} \bar{B}_i \right\}$$

sunt baze reciproce în spațiul liniar E .

iv) Este valabilă relația

$$(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m) = \frac{1}{(\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m)}.$$

Soluția exercițiului 4.36. Partea i). Matricea de schimbare de bază, $G = (P^t \cdot P)^{-1}$, are determinantul pozitiv.

Partea ii). Deducem că — via (4.75), respectiv (4.65) —

³⁵ Vezi [5, pag. 82].

³⁶ În particular, formula (4.75) rezultă din (4.59).

$$\prod_{i=1}^{m-1} \bar{B}_i = \frac{(-1)^{m-(m-1)}}{\left\| \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right\|_2^2} \cdot \bar{B}_1 \times \bar{B}_2 \times \cdots \times \bar{B}_{m-2}$$

$$\times \left[\bar{b}_1 \times \cdots \times \bar{b}_{m-2} \times \left(\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right) \right]$$

$$= \frac{-1}{\left\| \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right\|_2^4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\left(\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_{m-2}, \bar{b}_{m-1}, \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right) & 0 \\ \bar{b}_1 & \bar{b}_2 & \cdots & \bar{b}_{m-3} & \bar{b}_{m-2} & \bar{b}_{m-1} & \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \end{vmatrix}.$$

Partea iii). În virtutea relației (4.78), obținem că

$$\left(\prod_{i=1}^{m-1} \bar{B}_i \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{m-1} \bar{b}_j \right) = 1. \quad (4.79)$$

Conform exercițiului 4.35, *partea iv*), vectorii din familia \mathcal{B}_2 au reprezentarea (4.75). Concluzia rezultă din (4.76), (4.79).

Partea iv). Pe baza (4.60), (4.54), obținem că

$$(\bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_m) = \det \left[(P^{-1})^t \right] = \frac{1}{\det P},$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Exercițiul 4.37. (*Produsul vectorial multiplu: produse vectoriale de produse vectoriale*) Fiind dați vectorii $\mathcal{U} = (\bar{u}_i)_{i \in \overline{1, m-1}}$, $\mathcal{V} = (\bar{v}_i)_{i \in \overline{1, m-1}} \subset E$, introducem matricea produselor scalare — $m \geq 3$ —

$$G^{\mathcal{U}\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_{m-1} \\ \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_{m-1} \end{pmatrix} = \left(G_{ij}^{\mathcal{U}\mathcal{V}} \right)_{i, j \in \overline{1, m-1}}$$

și notăm cu $D_{ij}^{\mathcal{U}\mathcal{V}}$ minorul corespunzător elementului $G_{ij}^{\mathcal{U}\mathcal{V}}$, unde $i, j \in \overline{1, m-1}$. Atunci,

i) dacă setul \mathcal{V} este liniar dependent peste corpul \mathbb{R} , au loc identitățile

$$\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k D_{ik}^{\mathcal{U}^{\mathcal{V}}} \cdot \bar{v}_k = 0_E, \quad 1 \leq i \leq m-1, \quad (4.80)$$

pentru orice $\mathcal{U} \subset E$.

ii) Este valabilă dubla egalitate

$$\begin{aligned} & \bar{u}_1 \times \cdots \times \bar{u}_{i-1} \times \widehat{\bar{u}_i} \times \bar{u}_{i+1} \times \cdots \times \bar{u}_{m-1} \times \left(\prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \right) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m+k} D_{ik}^{\mathcal{U}^{\mathcal{V}}} \cdot \bar{v}_k = - \begin{vmatrix} \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_{m-1} \\ \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_1} & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_2} & \cdots & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_{m-1} \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_{m-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.81)$$

pentru orice $i \in \overline{1, m-1}$, cu convenția ca *determinantul să fie dezvoltat după ultima linie*.

Soluția exercițiului 4.37. Remarcăm că demonstrația părții a doua a egalității (4.81) se reduce la dezvoltarea determinantului din dreapta.

Partea i). Există $p \in \overline{1, m-1}$ și numerele $(\lambda_r)_{r \in I} \subset \mathbb{R}$, unde $I = \overline{1, m-1} \setminus \{p\}$, astfel încât

$$\bar{v}_p = \sum_{r \in I} \lambda_r \cdot \bar{v}_r.$$

Înmulțim cu $(-1)^m$ membrul stâng al identităților (4.80). Rezultatul se reorganizează — folosind cea de-a doua egalitate (4.81) — drept

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{ccccccc}
 \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_1 & \cdots & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_{p-1} & \bar{u}_1 \cdot \left(\bar{v}_p - \sum_{r \in I} \lambda_r \bar{v}_r \right) & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_{p+1} & \cdots & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_{m-1} \\
 \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1 & \cdots & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_{p-1} & \bar{u}_2 \cdot \left(\bar{v}_p - \sum_{r \in I} \lambda_r \bar{v}_r \right) & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_{p+1} & \cdots & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_{m-1} \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_1} & \cdots & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_{p-1}} & \widehat{\bar{u}_i \cdot \left(\bar{v}_p - \sum_{r \in I} \lambda_r \bar{v}_r \right)} & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_{p+1}} & \cdots & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_{m-1}} \\
 \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_1 & \cdots & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_{p-1} & \bar{u}_{m-1} \cdot \left(\bar{v}_p - \sum_{r \in I} \lambda_r \bar{v}_r \right) & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_{p+1} & \cdots & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_{m-1} \\
 \bar{v}_1 & \cdots & \bar{v}_{p-1} & \bar{v}_p - \sum_{r \in I} \lambda_r \bar{v}_r & \bar{v}_{p+1} & \cdots & \bar{v}_{m-1}
 \end{array} \right\} \cdot
 \end{array}$$

Partea ii). Dacă vectorii din setul \mathcal{V} sunt liniar dependenți peste corpul \mathbb{R} , atunci, via exercițiul 4.22, produsul lor vectorial este nul. Dubla egalitate (4.81) rezultă, în acest caz, din *partea i*). Este suficient, așadar, să stabilim egalitatea din enunț atunci când *vectorii din \mathcal{V} sunt liniar independenți*.

Pe baza exercițiilor 4.35, *partea i*), și 4.23, respectiv a reprezentării (4.65), deducem că membrul stâng al dublei relații de demonstrat este egal cu

$$\frac{1}{\left\| \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \right\|_2^2} \cdot \left(\begin{array}{cccccc}
 \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_1 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\
 \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_2 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\
 \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_1} & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_2} & \cdots & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_{m-1}} & \widehat{\bar{u}_i \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j} \\
 \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_{m-1} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & \left\| \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \right\|_2^2 \\
 \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \cdots & \bar{v}_{m-1} & \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j
 \end{array} \right) \cdot \quad (4.82)$$

Dezvoltând determinantul (4.82) după ultima linie, obținem

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k}}{\left\| \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \right\|_2^2} \cdot \begin{vmatrix} \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \widehat{\bar{u}_1 \cdot \bar{v}_k} & \cdots & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_1 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\ \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \widehat{\bar{u}_2 \cdot \bar{v}_k} & \cdots & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_2 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\ \vdots & \vdots & \cdots & \widehat{\vdots} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_1} & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_2} & \cdots & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_k} & \cdots & \widehat{\bar{u}_i \cdot \bar{v}_{m-1}} & \widehat{\bar{u}_i \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \widehat{\vdots} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \widehat{\bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_k} & \cdots & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_{m-1} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\ 0 & 0 & \cdots & \widehat{0} & \cdots & 0 & \left\| \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \right\|_2^2 \end{vmatrix} \cdot \bar{v}_k.$$

Mai departe, determinanții din sumă se dezvoltă după ultima linie. \square

Exercițiul 4.38. (*Produsul vectorial multiplu: produs scalar de produse vectoriale*)
În contextul exercițiului 4.37, avem egalitatea

$$\left(\prod_{i=1}^{m-1} \bar{u}_i \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \right) = \det G^{\mathcal{U}\mathcal{V}}.$$

Soluția exercițiului 4.38. La fel ca anterior, este suficient să stabilim egalitatea din enunț atunci când *vectorii din \mathcal{V} sunt liniar independenți*.

Membrul stâng al egalității de demonstrat este egal cu

$$\begin{aligned} & \left(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{m-1}, \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \right) \\ & = \frac{1}{\left\| \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \right\|_2^2} \cdot \begin{vmatrix} \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_1 \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_1 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\ \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_2 \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_2 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \bar{u}_i \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_i \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_i \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_i \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_1 & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_2 & \cdots & \bar{u}_{m-1} \cdot \bar{v}_{m-1} & \bar{u}_{m-1} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \left\| \prod_{j=1}^{m-1} \bar{v}_j \right\|_2^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Determinantul se dezvoltă după ultima linie. \square

Exercițiul 4.39. (*Identitatea lui C. Jacobi*³⁷) Fie $m \geq 3$ și setul de vectori $\mathcal{F} = (\bar{f}_i)_{i \in \overline{1, m}} \subset E$. Atunci,
i) (Cazul $m = 3$) este valabilă identitatea

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} + (\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a} + (\bar{c} \times \bar{a}) \times \bar{b} = 0_E, \quad \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in E. \quad (4.83)$$

ii) Introducând mărimile

$$\varepsilon_{ijk} = \text{sign}[(i-j) \cdot (j-k) \cdot (k-i)], \quad i, j, k \in \overline{1, m},$$

au loc relațiile

$$\varepsilon_{ijk} = \text{sign}(k-j)$$

dacă numărul i este sau cel mai mic sau cel mai mare dintre elementele mulțimii $\{i, j, k\}$, respectiv

$$\varepsilon_{ijk} = \text{sign}(j-k)$$

în caz contrar.

iii) (Cazul $m = 3$) Fiind dată permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix},$$

³⁷ Vezi [21, pag. 14, Problem 1.2.8].

avem³⁸

$$\varepsilon_{ijk} = \prod_{1 \leq \alpha < \beta \leq 3} \frac{\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)}{\alpha - \beta}.$$

iv) Vectorii $\mathcal{U} = (\bar{u}_{ijk})_{\substack{i < j, \\ i, j, k \in \overline{1, m}}}$, cu formula

$$\begin{aligned} \bar{u}_{ijk} &= \bar{f}_1 \times \cdots \times \bar{f}_{i-1} \times \widehat{\bar{f}_i} \times \bar{f}_{i+1} \times \cdots \times \bar{f}_{j-1} \times \widehat{\bar{f}_j} \times \bar{f}_{j+1} \times \cdots \times \bar{f}_m \\ &\times \left(\bar{f}_1 \times \cdots \times \bar{f}_{k-1} \times \widehat{\bar{f}_k} \times \bar{f}_{k+1} \times \cdots \times \bar{f}_m \right), \quad i < j, \quad i, j, k \in \overline{1, m}, \end{aligned}$$

satisfac identitatea

$$\sum_{1 \leq i < j \leq m} \sum_{k=1}^m \varepsilon_{ijk} \bar{u}_{ijk} = 0_E.$$

Soluția exercițiului 4.39. Partea i). Prima soluție. Exprimăm termenii sumei din membrul stâng al expresiei (4.83) cu ajutorul dublului produs vectorial (4.67).

A doua soluție. Să presupunem că termenul $(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c}$ este nenul. Atunci, via exercițiul 4.22, setul $\{\bar{a}, \bar{b}\} \subset E$ este liniar independent peste corpul \mathbb{R} . Exercițiul 4.21 ne conduce la relațiile — vezi (4.77) —

$$M = \mathbb{R}(\bar{a} \times \bar{b}), \quad M^\perp = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\bar{a}, \bar{b}\}$$

și

$$\begin{aligned} (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} &\in M^\perp \\ &\subseteq \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Estimarea (4.84) implică

$$\begin{aligned} \bar{S} &= (\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} + (\bar{b} \times \bar{c}) \times \bar{a} + (\bar{c} \times \bar{a}) \times \bar{b} \\ &\in N = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \subseteq E. \end{aligned}$$

Această relație rămâne valabilă și atunci când setul $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\} \subset E$ este liniar dependent peste corpul \mathbb{R} .

Remarcăm că, pentru a dovedi că $\bar{S} = 0_E$, este suficient să probăm afirmația următoare: *vectorul \bar{S} îi este ortogonal unei familii de generatori a spațiului \mathbb{R} -liniar N .*

³⁸ Aici, numerele ε_{ijk} desemnează simbolul *T. Levi-Civita* [21, pag. 15]. Se utilizează și denumirile *simbol de permutare* [14, pag. 9] ori *signatura* permutării σ [12, pag. 44].

Au loc identitățile

$$\begin{aligned}
\bar{S} \cdot \bar{a} &= (\bar{a} \times \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) + (\bar{c} \times \bar{a}, \bar{b}, \bar{a}) \\
&= (\bar{c}, \bar{a}, \bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{a}, \bar{c} \times \bar{a}) \\
&= (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) + (\bar{b} \times \bar{a}) \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) \\
&= (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot (\bar{a} \times \bar{b}) + [-(\bar{a} \times \bar{b})] \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analog, $\bar{S} \cdot \bar{b} = \bar{S} \cdot \bar{c} = 0$.

Partea iv). Folosim tehnica celei de-a doua soluții de la *partea i*). Astfel,

$$\bar{S} = \sum_{1 \leq i < j \leq m} \sum_{k=1}^m \varepsilon_{ijk} \cdot \bar{u}_{ijk} \in N = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_m\} \subseteq E.$$

Fie $p \in \overline{1, m}$. Vom estima, în cele ce urmează, numerele $\bar{S} \cdot \bar{f}_p$.

Cazul $p = 1$. Deducem că

$$\begin{aligned}
&\bar{S} \cdot \bar{f}_1 \\
&= \left[\sum_{j=2}^m \sum_{k \in \overline{2, m} \setminus \{j\}} \varepsilon_{1jk} \cdot (\bar{u}_{1jk} \cdot \bar{f}_1) \right] + \left[\sum_{2 \leq i < j \leq m} \sum_{k \in \overline{1, m} \setminus \{i, j\}} \varepsilon_{ijk} \cdot (\bar{u}_{ijk} \cdot \bar{f}_1) \right] \\
&= \left[\sum_{j=2}^m \sum_{k \in \overline{2, m} \setminus \{j\}} \varepsilon_{1jk} \cdot (-1)^{m-1} \cdot \left(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \widehat{\bar{f}}_j, \dots, \bar{f}_m, \prod_{\beta \in \overline{1, m} \setminus \{k\}} \bar{f}_\beta \right) \right] \\
&+ \left[\sum_{2 \leq i < j \leq m} \sum_{k \in \overline{1, m} \setminus \{i, j\}} \varepsilon_{ijk} \cdot (-1)^{m-1} \right. \\
&\times \left. \left(\bar{f}_1, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \widehat{\bar{f}}_i, \dots, \widehat{\bar{f}}_j, \dots, \bar{f}_m, \prod_{\beta \in \overline{1, m} \setminus \{k\}} \bar{f}_\beta \right) \right] \quad (4.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[(-1)^{m-1} \cdot \sum_{\substack{j, k \in \overline{2, m} \\ j \neq k}} \text{sign}(k-j) \cdot \left(\prod_{\alpha \in \overline{1, m} \setminus \{j\}} \bar{f}_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \overline{1, m} \setminus \{k\}} \bar{f}_\beta \right) \right] + 0 \\
&= (-1)^{m-1} \cdot \sum_{2 \leq j < k \leq m} (-\mathcal{P}\mathcal{S}_{jk} + \mathcal{P}\mathcal{S}_{jk}) \quad (4.86) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

unde $\mathcal{P}\mathcal{S}_{jk} = \left(\prod_{\alpha \in \overline{1, m} \setminus \{j\}} \bar{f}_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \overline{1, m} \setminus \{k\}} \bar{f}_\beta \right)$.

Cazul $p = m$. În mod analog,

$$\begin{aligned}
\bar{S} \cdot \bar{f}_m &= \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k \in \overline{1, m-1} \setminus \{i\}} \varepsilon_{ink} \cdot (\bar{u}_{ink} \cdot \bar{f}_m) \\
&= - \sum_{\substack{i, k \in \overline{1, m-1} \\ i \neq k}} [-\text{sign}(k-i)] \cdot \left(\prod_{\alpha \in \overline{1, m} \setminus \{i\}} \bar{f}_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \overline{1, m} \setminus \{k\}} \bar{f}_\beta \right) \\
&= \sum_{1 \leq i < k \leq m} (-\mathcal{P}\mathcal{S}_{ik} + \mathcal{P}\mathcal{S}_{ik}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Cazul $2 \leq p \leq m-1$. Avem relațiile³⁹

$$\begin{aligned}
&\bar{S} \cdot \bar{f}_p \\
&= \sum_{1 \leq i < j \leq m} \sum_{k=1}^m \varepsilon_{ijk} \cdot (\bar{u}_{ijk} \cdot \bar{f}_p) \\
&= \left[\sum_{1 \leq i < j < p} \sum_{k=1}^m \varepsilon_{ijk} \cdot (\bar{u}_{ijk} \cdot \bar{f}_p) + \sum_{i < p < j} \sum_{k=1}^m \varepsilon_{ijk} \cdot (\bar{u}_{ijk} \cdot \bar{f}_p) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p < i < j \leq m} \sum_{k=1}^m \varepsilon_{ijk} \cdot (\bar{u}_{ijk} \cdot \bar{f}_p) \right] \\
&\quad + \left[\sum_{1 \leq i < (j=p)} \sum_{k=1}^m \varepsilon_{ipk} \cdot (\bar{u}_{ipk} \cdot \bar{f}_p) \right] + \left[\sum_{(i=p) < j \leq m} \sum_{k=1}^m \varepsilon_{pjk} \cdot (\bar{u}_{pjk} \cdot \bar{f}_p) \right] \\
&= (0 \text{ — via metoda din (4.85) —}) \\
&\quad + \left\{ \sum_{1 \leq i < p} \left[\left(\sum_{k \in \overline{1, i}} + \sum_{k \in \overline{i, p}} \right) + \sum_{k \in \overline{p, m}} \right] \varepsilon_{ipk} \cdot (\bar{u}_{ipk} \cdot \bar{f}_p) \right\} \\
&\quad + \left\{ \sum_{p < j \leq m} \left[\sum_{k \in \overline{1, p}} + \left(\sum_{k \in \overline{p, j}} + \sum_{k \in \overline{j, m}} \right) \right] \varepsilon_{pjk} \cdot (\bar{u}_{pjk} \cdot \bar{f}_p) \right\} \\
&= \left\{ \sum_{1 \leq i < p} \left[(0 \text{ — via metoda din (4.86) —}) + \sum_{k \in \overline{p, m}} \varepsilon_{ipk} \cdot (\bar{u}_{ipk} \cdot \bar{f}_p) \right] \right\} \\
&\quad + \left\{ \sum_{p < j \leq m} \left[\sum_{k \in \overline{1, p}} + (0 \text{ — via metoda din (4.86) —}) \right] \varepsilon_{pjk} \cdot (\bar{u}_{pjk} \cdot \bar{f}_p) \right\}.
\end{aligned}$$

Așadar,

³⁹ Ca de obicei, *sumele cu 0 termeni sunt nule*.

$$\begin{aligned}
& \bar{S} \cdot \bar{f}_p \\
&= \sum_{1 \leq i < p} \sum_{p < k \leq m} \varepsilon_{ipk} \cdot (\bar{u}_{ipk} \cdot \bar{f}_p) + \sum_{p < j \leq m} \sum_{1 \leq k < p} \varepsilon_{pjk} \cdot (\bar{u}_{pjk} \cdot \bar{f}_p) \\
&= \left(\sum_{1 \leq i < p} \sum_{p < k \leq m} \bar{u}_{ipk} \cdot \bar{f}_p \right) + \left(\sum_{p < j \leq m} \sum_{1 \leq k < p} \bar{u}_{pjk} \cdot \bar{f}_p \right) \\
&= \left[\sum_{1 \leq i < p} \sum_{p < k \leq m} (-1)^{m-p+1} \cdot \left(\prod_{\alpha \in \overline{1, m} \setminus \{i\}} \bar{f}_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \overline{1, m} \setminus \{k\}} \bar{f}_\beta \right) \right] \\
&+ \left[\sum_{p < j \leq m} \sum_{1 \leq k < p} (-1)^{m-p} \cdot \left(\prod_{\alpha \in \overline{1, m} \setminus \{j\}} \bar{f}_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \overline{1, m} \setminus \{k\}} \bar{f}_\beta \right) \right] \\
&= (-1)^{m-p} \cdot \sum_{1 \leq v < p} \sum_{p < w \leq m} (-\mathcal{P} \mathcal{S}_{vw} + \mathcal{P} \mathcal{S}_{vw}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Exercițiul 4.40. Fie $m \geq 3$ și $\bar{u} \in E \setminus \{0_E\}$. Atunci, există vectorii $(\bar{b}_i)_{i \in \overline{1, m-1}} \subset E$ cu proprietatea că

$$\bar{u} = \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k. \quad (4.87)$$

Vectorii pot fi aleși într-o infinitate de moduri.

Soluția exercițiului 4.40. Construim baza \mathcal{S}_2 a spațiului E astfel încât $\bar{f}_1 = \bar{u}$ [8, pag. 11, Theorem]. Atunci, via exercițiul 4.25, optăm pentru

$$\bar{b}_1 = \frac{(-1)^{m-1}}{(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_m)} \cdot \bar{a}_2, \quad \bar{b}_j = \bar{a}_{j+1}, \quad j \in \overline{2, m-1}.$$

La partea a doua, să observăm că are loc egalitatea

$$\bar{b}_1 \times \bar{b}_2 \times \bar{b}_3 \times \dots \times \bar{b}_{m-1} = \bar{b}_1 \times (\lambda \cdot \bar{b}_1 + \bar{b}_2) \times \bar{b}_3 \times \dots \times \bar{b}_{m-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Exercițiul 4.41. Fie $m \geq 3$ și $\bar{u} \in E$. Dacă

$$(\bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{m-1}) = 0$$

pentru orice vectori $(\bar{v}_i)_{i \in \overline{1, m-1}} \subset E$, atunci $\bar{u} = 0_E$.

Soluția exercițiului 4.41. Presupunem că, prin absurd, $\bar{u} \neq 0_E$. Atunci, conform exercițiului 4.40, există vectorii $(\bar{b}_i)_{i \in \overline{1, m-1}}$ din (4.87).

Luând $\bar{v}_i = \bar{b}_i$, unde $1 \leq i \leq m-1$, ajungem la — via exercițiul 4.23 —

$$0 = (\bar{u}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_{m-1}) = (-1)^{m-1} \left(\prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right) \cdot \bar{u} = (-1)^{m-1} \left\| \prod_{k=1}^{m-1} \bar{b}_k \right\|_2^2 \neq 0,$$

ceea ce este, evident, o contradicție. \square

Introducem *produsul tensorial* — în raport cu baza \mathcal{S}_1 — al vectorilor $\bar{u}, \bar{v} \in E$ cu formula — vezi [5, pag. 60] —

$$\bar{u} \otimes \bar{v} = \bar{u} \otimes_{\mathcal{S}_1} \bar{v} = \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} & \dots & v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R}). \quad (4.88)$$

Exercițiul 4.42. (*Produsul tensorial în baza \mathcal{S}_2*) Este valabilă expresia

$$\bar{u} \otimes \bar{v} = P \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_2} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_2} & \dots & v_m^{\mathcal{S}_2} \end{pmatrix} P^t.$$

Soluția exercițiului 4.42. Utilizăm relațiile (4.45). \square

Exercițiul 4.43. Fie $A, B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ și $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{x} \in E$. Au loc egalitățile:

- i) $(\bar{u} \otimes \bar{v})^t = \bar{v} \otimes \bar{u}$.
- ii) $(\bar{u} \otimes \bar{v}) \bar{w} = (\bar{v} \cdot \bar{w}) \bar{u}$.
- iii) $(\bar{u} \otimes \bar{v}) (\bar{w} \otimes \bar{x}) = (\bar{v} \cdot \bar{w}) (\bar{u} \otimes \bar{x})$.
- iv) $\bar{u} \cdot [(\bar{v} \otimes \bar{v}) \bar{w}] = \bar{w} \cdot [(\bar{v} \otimes \bar{v}) \bar{u}] = (\bar{u} \cdot \bar{v}) (\bar{w} \cdot \bar{v})$.
- v) $(A\bar{u}) \otimes (B\bar{v}) = A(\bar{u} \otimes \bar{v}) B^t$.
- vi) $[(\bar{u} \otimes \bar{u}) \bar{v}] \otimes [(\bar{u} \otimes \bar{u}) \bar{v}] = (\bar{u} \cdot \bar{v})^2 (\bar{u} \otimes \bar{u})$.

Soluția exercițiului 4.43. Partea i). Folosim formula (4.88).

Partea ii). Conform (4.48), avem

$$\begin{aligned} (\bar{u} \otimes \bar{v}) \bar{w} &= (\bar{e}_1 \dots \bar{e}_m) \left\{ \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} & \dots & v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ w_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \right] \right\} \\ &= (\bar{v} \cdot \bar{w}) \left[(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_m) \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Partea iii). Din nou, întrebuițăm asociativitatea înmulțirii matricelor. Astfel,

$$(\bar{u} \otimes \bar{v}) (\bar{w} \otimes \bar{x}) = \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} v_1^{\mathcal{S}_1} & \dots & v_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{\mathcal{S}_1} \\ \vdots \\ w_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1^{\mathcal{S}_1} & \dots & x_m^{\mathcal{S}_1} \end{pmatrix}.$$

Partea iv). Prima egalitate rezultă din (4.50), ținând seama de faptul că matricea $\bar{v} \otimes \bar{v}$ este simetrică — via *partea i*) —. Pentru cea de-a doua egalitate folosim *partea ii*).

Partea v). Prin calcul direct, pe baza definițiilor (4.88), (4.48).

Partea vi). Aplicăm *partea ii*). \square

Exercițiul 4.44. Fie bazele reciproce $\mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ ale spațiului liniar E . Atunci,
i) matricele

$$A = \sum_{i=1}^m \bar{a}_i \otimes \bar{a}_i, \quad B = \sum_{i=1}^m \bar{f}_i \otimes \bar{f}_i$$

sunt simetrice și strict pozitiv-definite.

ii) ([3, pag. 7]) Sunt valabile descompunerile — *rezoluția identității* [18, pag. 168]

$$I_m = \sum_{i=1}^m \bar{f}_i \otimes \bar{a}_i = \sum_{i=1}^m \bar{a}_i \otimes \bar{f}_i.$$

iii) ([3, pag. 12]) $B = A^{-1}$.

iv) Avem relațiile⁴⁰

$$(\bar{f}_i \otimes \bar{a}_i)^2 = \bar{f}_i \otimes \bar{a}_i, \quad i \in \overline{1, m},$$

respectiv

$$(\bar{f}_j \otimes \bar{a}_j) (\bar{f}_k \otimes \bar{a}_k) = O_m, \quad 1 \leq j \neq k \leq m.$$

v) Vectorii celor două baze admit reprezentările

$$\bar{a}_i = A \bar{f}_i, \quad \bar{f}_i = B \bar{a}_i, \quad i \in \overline{1, m}.$$

Soluția exercițiului 4.44. Partea i). Simetria matricelor A, B rezultă din exercițiul 4.43, *partea i*). Fiind dat vectorul nenul $\bar{u} \in E$, avem — via același exercițiu, *partea iv*) —

$$\bar{u} \cdot A \bar{u} = \sum_{i=1}^m \bar{u} \cdot [(\bar{a}_i \otimes \bar{a}_i) \bar{u}] = \sum_{i=1}^m (\bar{u} \cdot \bar{a}_i)^2. \quad (4.89)$$

Cum $\bar{u} \neq 0_E$, coordonatele sale în baza \mathcal{S}_2 — vezi exercițiul 4.33 — nu pot fi toate nule, deci $\bar{u} \cdot A \bar{u} > 0$.

Partea ii). Observăm că, pe baza exercițiului 4.25, este suficient⁴¹ să stabilim prima dintre egalități.

⁴⁰ Operatorii $T_i \in L(E, E)$, reprezentați în baza \mathcal{S}_1 de matricele $\mathbb{T}_i = \bar{f}_i \otimes \bar{a}_i$, sunt *idempotenți* — proiectori [8, pag. 73, Theorem 1] — și are loc egalitatea $E = \text{Im } T_1 \oplus \dots \oplus \text{Im } T_m$.

⁴¹ Altă justificare a celei de-a doua egalități: îi aplicăm operația de transpunere primeia dintre egalități, conform exercițiului 4.43, *partea i*).

Fie $\bar{v} \in E$. Atunci, — apelând, din nou, la exercițiul 4.33 —

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^m \bar{f}_i \otimes \bar{a}_i - I_m \right) \bar{v} &= \sum_{i=1}^m (\bar{a}_i \cdot \bar{v}) \bar{f}_i - \bar{v} \\ &= \bar{v} - \bar{v} = 0_E. \end{aligned}$$

Vectorul \bar{v} fiind arbitrar, demonstrația se încheie căci O_m este singura matrice pentru care $O_m \bar{v} = 0_E$ indiferent de \bar{v} .

Partea iii). Deducem că — exercițiul 4.43, *partea iii*), și (4.55) —

$$\begin{aligned} AB &= \sum_{1 \leq i, j \leq m} (\bar{a}_i \otimes \bar{a}_i) (\bar{f}_j \otimes \bar{f}_j) = \sum_{1 \leq i, j \leq m} (\bar{a}_i \cdot \bar{f}_j) (\bar{a}_i \otimes \bar{f}_j) \\ &= \sum_{k=1}^m \bar{a}_k \otimes \bar{f}_k = I_m, \end{aligned}$$

respectiv — matricele A, B sunt simetrice —

$$I_m = (I_m)^t = (AB)^t = BA.$$

Partea iv). Folosim exercițiul 4.43, *partea iii*), și restricția de biortogonalitate (4.55).

Partea v). La prima egalitate, — via *partea i*) —,

$$\begin{aligned} A\bar{f}_i &= \sum_{k=1}^m (\bar{a}_k \otimes \bar{a}_k) \bar{f}_i = \sum_{k=1}^m (\bar{a}_k \cdot \bar{f}_i) \bar{a}_k = \sum_{k=1}^m \delta_{ki} \bar{a}_k \\ &= \bar{a}_i, \quad i \in \overline{1, m}. \end{aligned}$$

La cea de-a doua egalitate, — vezi *partea iii*) —,

$$\begin{aligned} B\bar{a}_i &= A^{-1} (A\bar{f}_i) = (A^{-1}A) \bar{f}_i \\ &= \bar{f}_i, \end{aligned}$$

unde $1 \leq i \leq m$. \square

Exercițiul 4.45. Fie $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și strict pozitiv-definită. Dacă⁴²

$$\bar{f}_i \cdot A\bar{f}_j = \delta_{ij}, \quad i, j \in \overline{1, m}, \quad (4.90)$$

atunci

i) setul $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\} \subset E$ este liniar independent peste corpul \mathbb{R} .

ii) Sunt valabile identitățile

⁴² Existența vectorilor $(\bar{f}_i)_{i \in \overline{1, m}} \subset E$ este asigurată de *teorema lui J. Lagrange* [12, pag. 319, Teorema 1.6]. Vezi și exercițiul 4.46.

$$\begin{cases} A = \sum_{k=1}^m (A\bar{f}_k) \otimes (A\bar{f}_k), \\ I_m = \sum_{k=1}^m (A\bar{f}_k) \otimes \bar{f}_k = \sum_{k=1}^m \bar{f}_k \otimes (A\bar{f}_k), \\ A^{-1} = \sum_{k=1}^m \bar{f}_k \otimes \bar{f}_k. \end{cases}$$

Soluția exercițiului 4.45. Partea i). Dacă ar exista numerele $(\alpha_i)_{i \in \overline{1,m}} \subset \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât

$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \bar{f}_j = 0_E,$$

atunci

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{f}_i \cdot A 0_E = \bar{f}_i \cdot A \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot \bar{f}_j \right) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \cdot (\bar{f}_i \cdot A\bar{f}_j) \\ &= \sum_{j=1}^m \delta_{ij} \alpha_j, \quad 1 \leq i \leq m, \end{aligned}$$

de unde va rezulta că toate numerele $(\alpha_i)_{i \in \overline{1,m}}$ ar fi nule.

Partea ii). Conform (4.90), setul

$$\{A\bar{f}_1, \dots, A\bar{f}_m\}$$

verifică restricția de biortogonalitate în raport cu baza \mathcal{S}_2 a spațiului liniar E , deci coincide cu \mathcal{S}_3 . Concluziile exercițiului de față vor rezulta din exercițiul 4.44.

Pe de altă parte, adaptând tehnicile de la exercițiile anterioare, putem realiza demonstrații independente ale cerințelor din enunț. Astfel, pentru $\bar{u} \in E$, avem

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^m (\bar{u} \cdot A\bar{f}_i) \bar{f}_i = \sum_{j=1}^m (\bar{u} \cdot \bar{f}_j) (A\bar{f}_j).$$

Apoi, — în virtutea relației (4.50) —

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^m (A\bar{f}_k) \otimes (A\bar{f}_k) - A \right] \bar{u} &= \sum_{k=1}^m [(A\bar{f}_k) \cdot \bar{u}] (A\bar{f}_k) - A\bar{u} \\ &= \sum_{k=1}^m (\bar{f}_k \cdot A\bar{u}) (A\bar{f}_k) - A\bar{u} \\ &= A\bar{u} - A\bar{u} = 0_E, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^m (A\bar{f}_k) \otimes \bar{f}_k - I_m \right] \bar{u} &= \sum_{k=1}^m (\bar{f}_k \cdot \bar{u}) (A\bar{f}_k) - I_m \bar{u} \\ &= \bar{u} - \bar{u} = 0_E. \end{aligned}$$

Mai departe,

$$\begin{aligned} \left(A \sum_{k=1}^m \bar{f}_k \otimes \bar{f}_k - I_m \right) \bar{u} &= \sum_{k=1}^m (\bar{f}_k \cdot \bar{u}) (A\bar{f}_k) - I_m \bar{u} \\ &= \bar{u} - \bar{u} = 0_E \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \left[\left(\sum_{k=1}^m \bar{f}_k \otimes \bar{f}_k \right) A - I_m \right] \bar{u} &= \sum_{k=1}^m (\bar{f}_k \cdot A\bar{u}) \bar{f}_k - I_m \bar{u} \\ &= \sum_{k=1}^m [(A\bar{f}_k) \cdot \bar{u}] \bar{f}_k - \bar{u} \\ &= \bar{u} - \bar{u} = 0_E, \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstrația. \square

Exercițiul 4.46. Fie $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})$ o matrice simetrică și strict pozitiv-definită. Dacă $(\lambda_i)_{i \in \overline{1,m}}$ sunt valorile proprii, nu neapărat distincte, ale matricei iar $(\bar{u}_i)_{i \in \overline{1,m}}$, unde⁴³ $\bar{u}_i \cdot \bar{u}_j = \delta_{ij}$ pentru orice $i, j \in \overline{1,m}$, sunt eigenvectorii corespunzători, atunci au loc egalitățile

$$\begin{cases} A = \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot (\bar{u}_k \otimes \bar{u}_k), \\ I_m = \sum_{k=1}^m \bar{u}_k \otimes \bar{u}_k, \\ A^{-1} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_k} \cdot (\bar{u}_k \otimes \bar{u}_k), \end{cases}$$

respectiv⁴⁴

$$\bar{u} \cdot A\bar{v} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot (\bar{u} \cdot \bar{u}_k) (\bar{v} \cdot \bar{u}_k), \quad \bar{u}, \bar{v} \in E.$$

În contextul exercițiului 4.44, *partea v)*, este valabilă⁴⁵ egalitatea

⁴³ Vectorii proprii corespunzând valorilor proprii distincte sunt ortogonali, conform exercițiului 4.15, *partea iii)*. Eigenvectorii corespunzând aceleiași valori proprii pot fi ortonormați folosind *procedeul J. Gram–E. Schmidt* [12, pag. 352, exercițiul 2].

⁴⁴ Numerele $(\bar{u} \cdot \bar{u}_r)_{r \in \overline{1,m}} \subset \mathbb{R}$, din dezvoltarea $\bar{u} = \sum_{r=1}^m (\bar{u} \cdot \bar{u}_r) \bar{u}_r$, se mai numesc și *coeficienți J. Fourier* ai vectorului $\bar{u} \in E$ în raport cu baza $(\bar{u}_r)_{r \in \overline{1,m}}$ [16, pag. 79].

⁴⁵ Baza reciprocă a unei baze ortonormate [8, pag. 122] coincide cu aceasta.

$$\bar{a}_i = I_m \bar{u}_i = \bar{u}_i, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Soluția exercițiului 4.46. Ținând seama de exercițiul 4.15, *partea ii*), introducem vectorii $\bar{f}_i = \frac{\bar{u}_i}{\sqrt{\lambda_i}}$. Atunci, $A\bar{f}_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot \bar{u}_i$, respectiv $\bar{f}_i \cdot A\bar{f}_j = \delta_{ij}$, unde $i, j \in \overline{1, m}$. Aplicăm exercițiul 4.45. \square

Referințe Bibliografice

1. Amann, H.: Ordinary differential equations, An introduction to nonlinear analysis. Walter de Gruyter, Berlin (1990)
2. Barbu, V.: Ecuații diferențiale. Editura Junimea, Iași (1985)
3. Boulanger, Ph., Hayes, M.: Bivectors and waves in mechanics and optics. Chapman & Hall, London (1993)
4. Dinculeanu, N.: Integrarea pe spații local compacte. Editura Academiei R.P.R., București (1965)
5. Frankel, T.: The geometry of physics, An introduction, Second edition. Cambridge University Press, Cambridge (2006)
6. Gașpar, D.: Analiză funcțională. Editura Facla, Timișoara (1981)
7. Halanay, A.: Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale. Editura Tehnică, București (1956)
8. Halmos, P.R.: Finite-dimensional vector spaces. Springer-Verlag, New York (1987)
9. Hille, E.: Analytic function theory, Volume I. Chelsea Publishing Comp., New York (1982)
10. Hirsch, M.W., Smale, S.: Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. Academic Press, New York (1974)
11. Iacob, C.: Mecanică teoretică, Ediția a II-a. Editura Didactică și Pedagogică, București (1980)
12. Ion, I.D., Radu, N.: Algebra. Editura Didactică și Pedagogică, București (1970)
13. Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, Berlin (1995)
14. Kay, D.C.: Theory and problems of tensor calculus. McGraw-Hill, New York (1988)
15. Perko, L.: Differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag, New York (1996)
16. Rudin, W.: Analiză reală și complexă, Ediția a treia. Editura Theta, București (1999)
17. Schouten, J.A.: Tensor analysis for physicists. Clarendon Press, Oxford (1951)
18. Schwabl, F.: Quantum mechanics, Fourth edition. Springer-Verlag, Berlin (2007)
19. Shilov, G.E.: Linear algebra. Dover Publications, Inc., New York (1977)
20. Șilov, G.E.: Analiză matematică, Spații finit-dimensionale. Editura Științifică și Enciclopedică, București (1983)
21. Wong, C.W.: Introduction to mathematical physics, Methods & concepts, Second edition. Oxford University Press, Oxford (2013)

Index

- acțiunea operatorului, 4
- aplicația σ , 15

- baza canonică, 4
- baza duală, 3
- baza reciprocă, 115
- baza standard, 4
- blocuri nilpotente elementare, 51

- coeficienți Fourier, 142
- cofactor, 116
- complement, 21
- complexificat, 12
- complexificatul unui operator, 17
- componente, 1
- comutare, 27
- conjugare complexă, 15
- covector, 2

- decomplexificabil, 16
- Det T , 6
- diagonalizabil, 37

- ecuație caracteristică, 10
- ecuație diferențială, 103
- eigenvaloare, 10
- eigenvector, 10
- eigenvector generalizat, 11
- exponențiala unei matrice, 80

- forma canonică Jordan, 56
- formă biliniară, 85, 109

- identificare, 73
- identitatea lui Jacobi, 133
- identitatea lui Lagrange, 122
- image, 26

- intrare, vii
- involuție, 15

- legătura *nou-vechi*, 2
- l_2 -norma, 69

- matrice de reprezentare, 5
- matrice Jordan elementară, 56
- matrice similare, 6
- matrice strict pozitiv-definită, 110
- media Cesàro, 70
- multiplicitate algebrică, 32

- $\text{nil}(\bar{v}, T)$, 44
- nilpotent, 29
- norma euclidiană de index 2, 69
- nucleu, 26

- operator diagonal, 37
- operația “ $\otimes_{\mathcal{S}_1}$ ”, 138
- operația “ \star ”, 73
- operația “ $\star_{\mathcal{S}_1}$ ”, 109

- pălăria “ $\hat{\star}$ ”, 117
- polinomul caracteristic, 10
- prelungire cu zero, 23
- produs Cauchy, 74
- produs matrice-vector, 109
- produs mixt, 116
- produs scalar, 85
- produs scalar triplu, 116
- produs tensorial, 138
- produs vectorial, 116
- produs vectorial dublu, 121, 122
- produs vectorial multiplu, 129, 132
- produs vectorial triplu, 121
- proprietatea ($\mathcal{H}\mathcal{S}$), 29

- Rank T , 6
realificat, 13
regula lui Cramer, 125
relația " \sim ", 6
restricția de biortogonalitate, 115
- semi-simplu, 37, 63
seturi biortogonale, 3
 σ -bază, 60
sign u , 3
signatura permutării, 134
simbolul de permutare, 134
simbolul lui Kronecker, 3
simbolul lui Levi-Civita, 134
- sistem diferențial, 88
soluție fundamentală, 107
spațiu Banach, 69
spațiul ortogonal al unui subspațiu, 113
suma Cesàro, 71
suma directă, 21
sumabilitate, 71
sumare prin părți, 73
- $\text{Tr } T$, 6
- valoare proprie, 10
vectori pe coloană, 1
vectori pe linie, 1