Octavian G. Mustafa

Forma Canonică Jordan a Matricelor

Teorie, aplicaţii

Publicaţiile DAL
Craiova

Fişier prelucrat în data de [April 23, 2018]

Avertisment

Acest eseu nu a fost raportat vreunui referent. În consecinţă, conţinutul său trebuie considerat “ca atare.”

Autorul vă aşteaptă comentariile la adresa lui de e-mail[1] şi vă mulţumeşte anticipat pentru efortul depus.

Fiecare proiect de la *Publicaţiile DAL* trebuie considerat “şantier” dacă nu este declarat altfel. Versiunea sa este cea a datei de pe pagina cu titlul.

Craiova, Mai 18, 2015 *O.G.M.*

[1] octawian@yahoo.com

Prefaţă

În această lucrare discutăm despre aducerea matricelor pătrate, cu elemente (intrări) reale, la forma canonică Jordan, urmând expunerea din cartea profesorilor Hirsch şi Smale [10].

Scopul prezentării de faţă este acela de a avea la îndemână o justificare riguroasă pentru metoda fundamentală de calcul a *exponenţialei unei matrice*: Secţiunea 4.3.

Există mai multe modalităţi clasice de aducere a matricelor la forma canonică Jordan. De exemplu, tehnica descrisă în [18] — traducerea sa în româneşte este [19] — face apel la *polinomul anulator* al unui operator liniar, la *algebra polinoamelor* de o nedeterminată *cu coeficienţi în* $\mathbb{K}$ etc. Nu am urmat această cale aici, fiind interesat de obţinerea rapidă a soluţiilor *sistemelor diferenţiale liniare*, cu coeficienţi reali: Secţiunea 4.5.

Anumite detalii ale demonstraţiei principale se regăsesc şi în restul procedeelor de aducere la forma canonică Jordan. Un exemplu notabil îl constituie *proprietatea* $(\mathscr{H}\mathscr{S})$, reformulată în [19, pag. 169, Teoremă] cu ajutorul polinomului anulator.

Aplicaţiile dezvoltate în Capitolul 4 au semnificaţii de sine stătătoare. Astfel, în Exerciţiul 4.13 se calculează *soluţiile fundamentale* ale unei ecuaţii diferenţiale ordinare, liniare şi omogene, cu ajutorul eigenvectorilor generalizaţi ai matricei asociate. În Exerciţiul 4.35, elementele *bazei reciproce* a bazei unui hiperplan sunt exprimate cu ajutorul operaţiilor vectoriale din spaţiul ambient.

Craiova, `[April 23, 2018]` *O.G.M.*

Cuprins

Capitolul 1
Operatori liniari

1.1 Vectori şi covectori

Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ — vezi [10, pag. x] — un spaţiu liniar peste corpul $\mathbb{K}$, unde $n \geq 1$ este un număr natural. Aici, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Setul de vectori

$$\mathscr{S}_1 = \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\}, \qquad m \leq n,$$

reprezintă o bază a sa. Atunci, vom scrie că

$$E = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{e}_j \,\middle|\, \lambda_j \in \mathbb{K} \right\}.$$

Fie $\overline{x} \in E$. Putem folosi formalismul de calcul matriceal *vectori pe linie*, adică

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{e}_j = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \cdots & \overline{e}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

respectiv formalismul *vectori pe coloană*,

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{e}_j = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \vdots \\ \overline{e}_m \end{pmatrix}.$$

Aici, elementele λ_i constituie *componentele* (coordonatele) vectorului $\overline{x}$ în baza $\mathscr{S}_1$. În cele ce urmează, întrebuinţăm tehnica (1.1).

Dacă $\mathscr{S}_2 = \left\{\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m\right\}$ reprezintă altă bază a spaţiului E, atunci există matricea nesingulară $P \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ astfel încât

$$\begin{aligned}\left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right) &= \left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right) \cdot \left(\mathrm{col}_{(1)}P \cdots \mathrm{col}_{(m)}P\right) \\ &= \left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right) \cdot P \end{aligned} \tag{1.2}$$

unde $\mathrm{col}_{(i)}P$ desemnează cea de-a i-a coloană a matricei P.

Notăm cu $(x_i)_{i\in\overline{1,m}}$ şi $(y_i)_{i\in\overline{1,m}}$ componentele vectorului $\overline{x}$ în bazele $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$. Atunci,

$$\overline{x} = \left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \left[\left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right) \cdot P\right] \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\ &= \left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right) \left[P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\right]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Din (1.3), (1.4), ţinând seama de liniar independenţa peste $\mathbb{K}$ a vectorilor din $\mathscr{S}_1$, deducem că

$$\left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right) \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}\right] = 0,$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Aşadar, legătura *nou-vechi* pentru vectori şi coordonate este dată de formulele (1.2), (1.5) [10, pag. 37].

Componentele (1.3) ne conduc la funcţionalele liniare (covectorii) $x_i : E \to \mathbb{K}$ cu formulele

$$\begin{aligned} x_i(\overline{x}) &= x_i\left(\sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \overline{e}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot x_i(\overline{e}_j) = \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot \delta_{ij} \\ &= x_i, \qquad i \in \overline{1,m}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

unde $\delta_{ij} = 1 - (\mathrm{sign}(i-j))^2$, cu

$$\operatorname{sign} u = \begin{cases} -1, & u < 0, \\ 0, & u = 0, \\ 1, & u > 0, \end{cases}$$

desemnează[1] *simbolul lui L. Kronecker* [17, pag. 14]. Setul de covectori

$$\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}_1(\mathscr{S}_1) = \{x_1, \cdots, x_m\} \tag{1.7}$$

alcătuieşte o bază[2] a spaţiului $E^* = L(E, \mathbb{K})$, adică — [10, pag. 36] —

$$E^* = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}} \{x_1, \cdots, x_m\}.$$

1.2 Operatori şi matrice

Operatorul liniar ($\mathbb{K}$-liniar) $T : E \to E$ — [10, pag. 30] — este descris de vectorii

$$\mathscr{T} = \{T(\overline{e}_1), \cdots, T(\overline{e}_m)\}, \qquad \overline{e}_i \in \mathscr{S}_1,\, i \in \overline{1,m}, \tag{1.8}$$

căci

$$\begin{aligned} T(\overline{x}) &= T\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \overline{e}_i\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot T(\overline{e}_i) \\ &= \begin{pmatrix} T(\overline{e}_1) & \cdots & T(\overline{e}_m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} \in E. \end{aligned}$$

Introducem matricea $\mathbb{T} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ prin relaţiile

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} T(\overline{e}_1) & \cdots & T(\overline{e}_m) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \cdots & \overline{e}_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \operatorname{col}_{(1)}\mathbb{T} & \cdots & \operatorname{col}_{(m)}\mathbb{T} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \cdots & \overline{e}_m \end{pmatrix} \cdot \mathbb{T}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Atunci, pentru $\overline{x} \in E$, avem

---

[1] Se întâlnesc şi denumirile *delta (lui) Kronecker* [14, pag. 3], respectiv *simbolul delta (al lui) Kronecker* [20, pag. 5].

[2] Numită *duala* bazei $\mathscr{S}_1$ [8, pag. 23, Theorem 2]. Se spune şi că seturile $\mathscr{C}_1$ şi $\mathscr{S}_1$ sunt *biortogonale*.

$$
\begin{aligned}
T(\overline{x}) &= \left(T(\overline{e}_1)\ \cdots\ T(\overline{e}_m)\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\
&= \left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)\left[\mathbb{T}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}\right]. \qquad (1.10)
\end{aligned}
$$

Calculele de până acum au ţinut seama doar de faptul că *dimensiunea spaţiului E peste $\mathbb{K}$ este finită*, spaţiul în sine putând fi orice set de obiecte abstracte[3]. Acum, via relaţiile (1.3), (1.10), operatorului T i se asociază matricea (de reprezentare în $\mathscr{S}_1$) $\mathbb{T}$ care desemnează, la rândul său, un operator $\mathbb{T} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$. Acţiunea (operaţia) acestui operator $\mathbb{T}$ asupra spaţiului $\mathbb{C}^m$ este dată de formula [10, pag. 38]

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \mathbb{T}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m.
$$

Putem, aşadar, echivala elementele spaţiului vectorial $L(E,E)$ peste corpul $\mathbb{K}$ cu matricele din $\mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ [10, p. 31], respectiv cu vectori din spaţiul liniar $L(\mathbb{C}^m,\mathbb{C}^m)$ peste corpul $\mathbb{C}$.

Plecând de la identitatea

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x_1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_m\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},
$$

introducem baza standard[4] (canonică[5]) a spaţiului $\mathbb{C}^m$ — peste corpul $\mathbb{C}$ —

$$
\left(\overline{i}_1\ \cdots\ \overline{i}_m\right) = \left(\mathrm{col}_{(1)}I_m\ \cdots\ \mathrm{col}_{(m)}I_m\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_m. \qquad (1.11)
$$

Reamintesc formula (1.2). Avem relaţiile — operatorul T este liniar —

$$
\begin{aligned}
T(\overline{f}_j) &= T\left(\left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)\cdot\mathrm{col}_{(j)}P\right) = \left(T(\overline{e}_1)\ \cdots\ T(\overline{e}_m)\right)\cdot\mathrm{col}_{(j)}P \\
&= \left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)\cdot\left[\mathbb{T}\cdot\mathrm{col}_{(j)}P\right], \qquad j\in\overline{1,m},
\end{aligned}
$$

respectiv

[3] Operaţiile cu vectori şi scalari sunt cele tipice, vezi relaţiile din nota de subsol de la pagina 12.

[4] Vezi [10, pag. 34].

[5] Vezi [13, pag. 3, Example 1.4].

$$\left(T(\overline{f}_1)\ \cdots\ T(\overline{f}_m)\right) = \left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)\mathbb{T}P. \tag{1.12}$$

De aici, pentru $\overline{x} \in E$, deducem că

$$\begin{aligned}T(\overline{x}) &= T\left(\left(\overline{f}_1\ \cdots\ \overline{f}_m\right)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\right) = \left(T(\overline{f}_1)\ \cdots\ T(\overline{f}_m)\right)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\\ &= \left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)\left[(\mathbb{T}P)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\right].\end{aligned} \tag{1.13}$$

Notăm cu $\mathbb{W}$ matricea de reprezentare a operatorului T în $\mathscr{S}_2$. Adică,

$$\left(T(\overline{f}_1)\ \cdots\ T(\overline{f}_m)\right) = \left(\overline{f}_1\ \cdots\ \overline{f}_m\right)\mathbb{W}.$$

Atunci,

$$\begin{aligned}T(\overline{x}) &= T\left(\left(\overline{f}_1\ \cdots\ \overline{f}_m\right)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\right) = \left(T(\overline{f}_1)\ \cdots\ T(\overline{f}_m)\right)\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\\ &= \left(\overline{f}_1\ \cdots\ \overline{f}_m\right)\mathbb{W}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix} = \left[\left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)P\right]\cdot\left[\mathbb{W}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\right]\\ &= \left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)\left[P\mathbb{W}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\right].\end{aligned} \tag{1.14}$$

Expresiile (1.13), (1.14) ne conduc la

$$\left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)\left[(\mathbb{T}P - P\mathbb{W})\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}\right] = 0,$$

respectiv la — vectorii $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m$ sunt liniar independenţi peste $\mathbb{K}$ —

$$\mathbb{T}P - P\mathbb{W} = O_m, \qquad \mathbb{W} = P^{-1}\mathbb{T}P, \tag{1.15}$$

vezi [10, pag. 39]. Aici, O_m este matricea-nulă $m \times m$.

În (1.12) am folosit doar faptul că sistemul de vectori $\mathscr{S}_2 = \{\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m\}$ este legat de $\mathscr{S}_1 = \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\}$ prin matricea P din (1.2). Înlocuindu-l pe $\mathscr{S}_2$ cu $\mathscr{T}$ din (1.8) şi pe P cu $\mathbb{T}$ din (1.9), deducem că

$$\left(T^2(\overline{e}_1)\ \cdots\ T^2(\overline{e}_m)\right) = \left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)\cdot\mathbb{T}^2,$$

respectiv

$$\left(T^k(\overline{e}_1)\ \cdots\ T^k(\overline{e}_m)\right) = \left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\right)\cdot \mathbb{T}^k, \qquad k\in\mathbb{N}^*. \tag{1.16}$$

1.3 Invarianţii algebrici ai operatorului T. Valori proprii şi vectori proprii. Polinomul caracteristic. Vectori proprii generalizaţi

Plecând de la cea de-a doua dintre relaţiile (1.15), spunem că două matrice $\mathbb{W},\mathbb{T}\in\mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ sunt *similare* dacă există matricea nesingulară $P\in\mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ astfel încât $\mathbb{W}=P^{-1}\mathbb{T}P$, conform [10, pag. 39]. Această similaritate defineşte o relaţie de echivalenţă ($\sim$) între matricele din $\mathscr{M}_m(\mathbb{K})$. Într-adevăr, avem *reflexivitate*,

$$\mathbb{T}\sim\mathbb{T}, \qquad \mathbb{T}=I_m^{-1}\mathbb{T}I_m,$$

apoi *simetrie* — $\det P\neq 0$ —,

$$\mathbb{W}\sim\mathbb{T}\Longrightarrow\mathbb{T}\sim\mathbb{W}, \qquad \mathbb{W}=P^{-1}\mathbb{T}P\Longrightarrow\mathbb{T}=\left(P^{-1}\right)^{-1}\mathbb{W}\left(P^{-1}\right), \tag{1.17}$$

şi *tranzitivitate* — $\det P$, $\det R\neq 0$ —,

$$\mathbb{W}\sim\mathbb{T},\mathbb{T}\sim\mathbb{V}\Longrightarrow\mathbb{W}\sim\mathbb{V}, \quad \mathbb{W}=P^{-1}\mathbb{T}P,\ \mathbb{T}=R^{-1}\mathbb{V}R\Rightarrow\mathbb{W}=(RP)^{-1}\mathbb{V}(RP).$$

De asemeni, *dacă* $\mathbb{W}\sim\mathbb{T}$, adică $\mathbb{W}=P^{-1}\mathbb{T}P$, *atunci* $\mathbb{W}^k\sim\mathbb{T}^k$ *pentru orice* $k\in\mathbb{N}^*$. Într-adevăr, avem

$$\begin{aligned}\mathbb{W}^2 &= \left(P^{-1}\mathbb{T}P\right)\cdot\left(P^{-1}\mathbb{T}P\right)=P^{-1}\mathbb{T}\left(P\cdot P^{-1}\right)\mathbb{T}P\\ &= P^{-1}\mathbb{T}^2P,\end{aligned}$$

respectiv — prin inducţie matematică —

$$\mathbb{W}^k=P^{-1}\mathbb{T}^kP, \qquad k\in\mathbb{N}^*. \tag{1.18}$$

Determinantul, urma şi rangul (unei matrice) — ca funcţii de matricele din $\mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ — sunt invariante la relaţia de similaritate [10, pag. 40, 41]. Putem, din acest motiv, introduce mărimile

$$\mathrm{Det}\,T=\det\mathbb{T}, \quad \mathrm{Tr}\,T=\mathrm{tr}\,\mathbb{T}, \quad \mathrm{Rank}\,T=\mathrm{rank}\,\mathbb{T},$$

unde *det*, *tr* şi *rank* desemnează *determinantul*, *urma*[6], respectiv *rangul*[7] matricei de reprezentare (în $\mathscr{S}_1$) $\mathbb{T}$. Avem la dispoziţie, astfel, determinantul, urma şi rangul unui operator liniar $T:E\to E$ — invarianţi algebrici —.

[6] În limba engleză, *trace*.
[7] În limba engleză, *rank*.

Lema 1.1. ([13, pag. 16]) *Rangul operatorului liniar $T : E \to E$ este egal cu dimensiunea subspaţiului liniar $T(E) \subseteq E$.*

Demonstraţie. Să presupunem că *setul de vectori* $\{T(\overline{e}_1), \ldots, T(\overline{e}_h)\}$, *unde* $h \le m$, *alcătuieşte o bază*[8] a subspaţiului $T(E)$. Atunci,

$$\big(T(\overline{e}_1) \, \cdots \, T(\overline{e}_h)\big) = \big(\overline{e}_1 \, \cdots \, \overline{e}_m\big) \cdot A,$$

unde $A \in \mathscr{M}_{m,h}(\mathbb{K})$.

Fie $\lambda \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$. Observăm că

$$\begin{aligned} T(E) &= \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{T(\overline{e}_1), \ldots, T(\overline{e}_h)\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{T(\overline{e}_1) + \lambda \cdot T(\overline{e}_2), T(\overline{e}_2), T(\overline{e}_3) \ldots, T(\overline{e}_h)\}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

respectiv

$$\begin{aligned} E &= \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1 + \lambda \cdot \overline{e}_2, \overline{e}_2, \overline{e}_3 \ldots, \overline{e}_m\}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Schimbarea de bază (1.19) produce următoarea modificare a matricei A,

$$\begin{aligned} &((T(\overline{e}_1) + \lambda \cdot T(\overline{e}_2)) \; T(\overline{e}_2) \; T(\overline{e}_3) \cdots T(\overline{e}_h)) \\ &= \big(\overline{e}_1 \, \cdots \, \overline{e}_m\big) \cdot \big((\mathrm{col}_{(1)}A + \lambda \cdot \mathrm{col}_{(2)}A) \; \mathrm{col}_{(2)}A \; \mathrm{col}_{(3)}A \cdots \mathrm{col}_{(h)}A\big). \end{aligned}$$

La rândul său, schimbarea de bază (1.20) modifică matricea A,

$$\begin{aligned} \big(T(\overline{e}_1) \, \cdots \, T(\overline{e}_h)\big) &= ((\overline{e}_1 + \lambda \cdot \overline{e}_2) \; \overline{e}_2 \; \overline{e}_3 \cdots \overline{e}_m) \\ &\times \begin{pmatrix} \mathrm{lin}_{(1)}A \\ \mathrm{lin}_{(2)}A - \lambda \cdot \mathrm{lin}_{(1)}A \\ \mathrm{lin}_{(3)}A \\ \mathrm{lin}_{(4)}A \\ \vdots \\ \mathrm{lin}_{(m)}A \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

unde $\mathrm{lin}_{(i)}A$ desemnează cea de-a i-a linie a matricei A.

Trebuie să arătăm că $\mathrm{rank}\, A = h$, adică *există h linii* ale matricei A care să fie *liniar independente peste corpul* $\mathbb{K}$.

Presupunem că, prin reducere la absurd, *toate seturile de câte h linii ale matricei A sunt* liniar dependente *peste corpul* $\mathbb{K}$. Aceasta înseamnă că, în particular, setul *tuturor* liniilor matricei A este liniar dependent, deci există numerele

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{p-1}, \lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_m\} \subset \mathbb{K}$$

---

[8] Relaţiile $\overline{y} = T(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot T(\overline{e}_i)$, unde $\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \overline{e}_i \in E$, arată că familia de vectori $\{T(\overline{e}_1), \ldots, T(\overline{e}_m)\}$ este un *sistem de generatori* pentru spaţiul $T(E)$.

astfel încât

$$\begin{aligned}\mathrm{lin}_{(p)}A = \lambda_1 \cdot \mathrm{lin}_{(1)}A + \cdots + \lambda_{p-1} \cdot \mathrm{lin}_{(p-1)}A \\ + \lambda_{p+1} \cdot \mathrm{lin}_{(p+1)}A + \cdots + \lambda_m \cdot \mathrm{lin}_{(m)}A\end{aligned}$$

pentru un anumit p. Aici, apar două situaţii. În *prima* dintre ele, $\mathrm{lin}_{(p)}A$ *conţine cel puţin un element nenul*, deci

$$\sum_{\substack{1 \le i \le m, \\ i \ne p}} |\lambda_i|^2 > 0. \tag{1.22}$$

Cea de-a doua *situaţie*, când *matricea A are (măcar) o linie nulă* — formată numai din elemente nule — va fi discutată ulterior.

Au loc relaţiile — via (1.21) —

$$\begin{aligned}&\left(T(\overline{e}_1) \ \cdots \ T(\overline{e}_h)\right) \\ &= ((\overline{e}_1 + \lambda_1 \cdot \overline{e}_p) \cdots (\overline{e}_{p-1} + \lambda_{p-1} \cdot \overline{e}_p) \ \overline{e}_p \ (\overline{e}_{p+1} + \lambda_{p+1} \cdot \overline{e}_p) \cdots (\overline{e}_m + \lambda_m \cdot \overline{e}_p)) \\ &\times B, \qquad B = \begin{pmatrix} \mathrm{lin}_{(1)}A \\ \vdots \\ \mathrm{lin}_{(p-1)}A \\ (0 \cdots 0) \\ \mathrm{lin}_{(p+1)}A \\ \vdots \\ \mathrm{lin}_{(m)}A \end{pmatrix},\end{aligned}$$

respectiv — a p-a linie a matricei B este nulă! —

$$\begin{aligned}T(\overline{e}_1), \ldots, T(\overline{e}_h) \in Q = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{ \ & \overline{e}_1 + \lambda_1 \cdot \overline{e}_p, \ldots, \overline{e}_{p-1} + \lambda_{p-1} \cdot \overline{e}_p, \\ & \overline{e}_{p+1} + \lambda_{p+1} \cdot \overline{e}_p, \ldots, \overline{e}_m + \lambda_m \cdot \overline{e}_p\}.\end{aligned}$$

Se observă că $\overline{e}_p \notin Q$, deci dimensiunea subspaţiului $Q \subseteq E$ este mai mică sau egală cu $m-1$.

Dacă $h = m$, evident, am ajuns la o contradicţie: cei h vectori liniar independenţi din $T(E)$ nu se pot afla într-un spaţiu — cel mult — $(h-1)$-dimensional!

Dacă $h \le m-1$, avem relaţia

$$\left(T(\overline{e}_1) \ \cdots \ T(\overline{e}_h)\right) = \left(\overline{f}_1 \, \overline{f}_2 \cdots \overline{f}_{p-1} \, \overline{f}_{p+1} \cdots \overline{f}_m\right) \cdot C, \tag{1.23}$$

unde

$$C = \begin{pmatrix} \text{lin}_{(1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(p-1)}A \\ \text{lin}_{(p+1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(m)}A \end{pmatrix}$$

şi $\overline{f}_i = \overline{e}_i + \lambda_i \cdot \overline{e}_p$, $i \neq p$, iar vectorii $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_{p-1}, \overline{f}_{p+1}, \cdots, \overline{f}_m\}$ sunt liniari independenţi.

Ce se întâmplă însă dacă $\text{lin}_{(p)}A$ este o linie nulă a matricei A? Adică, nu are loc (1.22)! Atunci, relaţia (1.23) devine

$$\big(T(\overline{e}_1)\ \cdots\ T(\overline{e}_h)\big) = (\overline{e}_1\, \overline{e}_2 \cdots \overline{e}_{p-1}\, \overline{e}_{p+1} \cdots \overline{e}_m) \cdot \begin{pmatrix} \text{lin}_{(1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(p-1)}A \\ \text{lin}_{(p+1)}A \\ \vdots \\ \text{lin}_{(m)}A \end{pmatrix}.$$

Reluăm discuţia anterioară: presupunem că *oricare h din cele* $m-1$ *linii rămase ale matricei A* — vezi matricea C — *sunt liniar dependente*, de unde rezultă că setul celor $m-1$ linii rămase este liniar dependent etc. Aici, "rolul" matricei A va fi "jucat" de C. Ajungem la alt spaţiu, de dimensiune cel mult $m-2$ peste corpul $\mathbb{K}$.

Procedeul poate fi repetat atâta timp cât dimensiunea spaţiului Q — egală cu numărul liniilor din A rămase în discuţie! — este mai mare sau egală cu h. $\square$

Fie[9] $\overline{x} \in \text{Ker}\, T$. Pe baza (1.3), (1.10), avem

$$0_E = T(\overline{x}) = \big(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_m\big)\, \mathbb{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Liniar independenţa vectorilor $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m$ — peste corpul $\mathbb{K}$ — ne conduce la sistemul algebric

$$\mathbb{T} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

cu necunoscutele $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$.

[9] Vezi nota de subsol de la pagina 25: definiţia lui *Ker*.

Dacă $I : E \to E$ este operatorul-identitate[10] din $L(E,E)$ şi $\lambda \in \mathbb{C}$, ne interesează mulţimea[11] Ker $(T - \lambda \cdot I)$. Conform relaţiei (1.25), aceasta înseamnă *să rezolvăm în* $\mathbb{K}$ sistemul algebric

$$(\mathbb{T} - \lambda \cdot I_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Evident, este posibil ca sistemul să nu aibă soluţii nenule!

Deoarece $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{C}$, dacă impunem ca

$$p(\lambda) = \det\ (\mathbb{T} - \lambda \cdot I_m) = 0, \tag{1.27}$$

atunci sistemul algebric (1.26) va avea întotdeauna soluţii nenule în $\mathbb{C}$ — dar nu neapărat în $\mathbb{K}$! —.

Numerele $\lambda \in \mathbb{K}$ care sunt soluţii ale ecuaţiei[12] algebrice (1.27), deci pentru care sistemul algebric (1.26) admite soluţii nenule în $\mathbb{K}$, se numesc *valori proprii*[13] sau *eigenvalori*[14] ale operatorului T. Dacă numerele $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{K}$ sunt o soluţie nenulă a sistemului (1.26), atunci vectorul

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \overline{e}_i \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\} = E \tag{1.28}$$

constituie un *vector propriu* sau un *eigenvector*[15] al operatorului T — corespunzător eigenvalorii λ —.

Observăm că — via (1.25), (1.26) — operatorul liniar T admite valoarea proprie $\lambda_0 = 0$ dacă şi numai dacă $\mathrm{Ker}\, T \neq \{0_E\}$, adică dacă T *nu este injectiv*.

Polinomul $p(\lambda)$ — cu termenul dominant $(-1)^m \lambda^m$, unde m este dimensiunea spaţiului E — verifică relaţiile, via (1.17),

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\ (\mathbb{T} - \lambda \cdot I_m) = \det\ \left(P\mathbb{W}P^{-1} - \lambda \cdot I_m\right) \\ &= \det\ \left(P\mathbb{W}P^{-1} - \lambda \cdot PI_mP^{-1}\right) = \det\ \left(P\left(\mathbb{W} - \lambda \cdot I_m\right)P^{-1}\right) \\ &= \det\ (\mathbb{W} - \lambda \cdot I_m), \end{aligned}$$

adică este invariant la relaţia de similaritate. Astfel, el poate fi ataşat operatorului T, $p(\lambda) = p_T(\lambda)$, şi se numeşte *polinomul caracteristic*[16] al operatorului.

---

[10] Adică, $I(\overline{x}) = \overline{x}$ pentru orice $\overline{x} \in E$.

[11] Nu insistăm acum asupra semnificaţiei *operaţiei* $\lambda \cdot I$ atunci când $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{K}$.

[12] Numită *ecuaţie caracteristică* a operatorului T [10, pag. 71].

[13] În limba engleză, *proper value* (sing.) [13, pag. 35]. Unii autori folosesc şi termenii *autovalori*, *rădăcini caracteristice* [2, pag. 99, 129], *rădăcini ale ecuaţiei caracteristice* [7, pag. 174] sau *valori caracteristice* [13, ibid.].

[14] În limba engleză, *eigenvalue* (sing.), conform [10, pag. 42].

[15] În limba engleză, *eigenvector* [10, ibid.].

[16] În limba engleză, *characteristic polynomial* [10, pag. 43].

Să revenim la ecuaţia (1.27). Dacă ea admite soluţia $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ — adică, λ_0 este eigenvaloare a operatorului T —, atunci au loc, evident, relaţiile

$$0 = [\det\ (\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m)]^k = \det\ \left((\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m)^k\right), \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Ceea ce înseamnă că toate sistemele algebrice

$$(\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m)^k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.29}$$

admit soluţii nenule în $\mathbb{K}$.

Dacă familia $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{K}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$, este soluţia sistemului (1.29) pentru un anumit $k \geq 2$, atunci vectorul (1.28) poartă numele de *vector propriu* (sau *eigenvector*) *generalizat*[17] al operatorului T corespunzând eigenvalorii λ_0. Relaţia (1.29) poate fi reorganizată, evident, ca

$$(\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m)^{k-1} \cdot \left[(\mathbb{T} - \lambda_0 \cdot I_m) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

aşadar *orice vector propriu este şi vector propriu generalizat*.

Exemplul 1.1. Fie $\mu \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$ şi matricea

$$(\mathbb{T} =) \qquad A = \begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

Singura eigenvaloare a lui A este $\lambda_0 = \mu$. Sistemul (1.26) devine

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Soluţiile nenule din $\mathbb{K}$ ale acestui sistem sunt $x_1 = x \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$, $x_2 = 0$, deci $\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2$ este un eigenvector corespunzând valorii proprii λ_0.

Deoarece

$$(A - \lambda_0 \cdot I_2)^2 = O_2,$$

sistemul (1.29), unde $k = 2$, devine

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

---

[17] În limba engleză, *generalized eigenvector* [13, pag. 41].

Evident, *toţi vectorii nenuli din* $\mathbb{K}^2$ sunt soluţii ale sale, deci *sunt eigenvectori generalizaţi ai matricei A*. În particular, vectorul $\overline{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ este un vector propriu generalizat corespunzând valorii proprii λ_0 care *nu este vector propriu* al matricei A.

1.4 Complexificare, realificare, decomplexificare. Complexificatul unui operator liniar

Fie $E \subseteq \mathbb{R}^n$ — [10, pag. 64] — un spaţiu liniar real m-dimensional. Aici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, deci

$$E = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{e}_j \,\middle|\, \lambda_j \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.30}$$

Mulţimea

$$E_{\mathbb{C}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\} = \left\{ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{e}_j \,\middle|\, \lambda_j \in \mathbb{C} \right\},$$

dotată cu operaţiile cu vectori şi scalari tipice[18], alcătuieşte un spaţiu vectorial complex m-dimensional care poartă numele de *complexificatul* spaţiului E[19]. Reamintindu-ne de baza canonică (1.11), observăm că spaţiul complex $\mathbb{C}^m$ este complexificatul spaţiului real $\mathbb{R}^m$: $\mathbb{C}^m = (\mathbb{R}^m)_{\mathbb{C}}$.

Nu orice spaţiu vectorial complex este complexificatul vreunui spaţiu vectorial real.

Exemplul 1.2. Fie $z_j = a_j + b_j i \in \mathbb{C}$, unde $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,2\}$, şi $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$. Introducem spaţiul[20] $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\,\overline{e}_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{e}_1\}$ şi ne întrebăm dacă există $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ astfel ca

$$E_{\mathbb{C}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{x}\} = \left\{ (a + b \cdot i) \cdot \overline{x} = \begin{pmatrix} (ax_1) + i(bx_1) \\ (ax_2) + i(bx_2) \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Adică, $E_{\mathbb{C}}$ *este* sau *nu este* complexificatul spaţiului $E = \mathbb{R}\overline{x}$?

---

[18] $\alpha \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{e}_j \right) + \beta \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot \overline{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{m} (\alpha \cdot \lambda_j + \beta \cdot \mu_j) \cdot \overline{e}_j$, unde $\alpha, \beta, \lambda_j, \mu_j \in \mathbb{C}$. De asemeni, $1 \cdot \overline{e}_j = \overline{e}_j$. În particular, $0 \cdot \overline{e}_j = 0_E$ pentru orice $j \in \overline{1,m}$.

[19] La fel ca în cazul $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 +$ (operaţii speciale), avem $z \cdot \overline{x} = (a + b \cdot i)\overline{x} \equiv (a,b) \cdot \overline{x} = (a \cdot \overline{x}, b \cdot \overline{x}) \equiv a\overline{x} + i(b\overline{x})$, unde $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Nu este obligatoriu, aici, ca $a \cdot \overline{x}$, $b \cdot \overline{x}$, unde $\overline{x} \in E$, să însemne înmulţirile cu scalari uzuale — pe componente — din $\mathbb{R}^n$!

[20] Operaţiile cu vectori şi scalari sunt cele tipice, din $\mathbb{C}^2$, respectiv $\mathbb{R}^2$.

Fie $\lambda = \alpha + \beta \cdot i \in \mathbb{C}$. Atunci, din egalităţile

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{C}} \ni \lambda \cdot \overline{e}_1 &= \begin{pmatrix} (\alpha a_1 - \beta b_1) + (\alpha b_1 + \beta a_1) \cdot i \\ (\alpha a_2 - \beta b_2) + (\alpha b_2 + \beta a_2) \cdot i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a x_1) + (b x_1) \cdot i \\ (a x_2) + (b x_2) \cdot i \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{x}\}, \end{aligned}$$

în care *necunoscutele* sunt numerele reale a, b, x_1 şi x_2, deducem că

$$\begin{cases} \alpha a_1 - \beta b_1 = (\alpha a_2 - \beta b_2) \frac{x_1}{x_2}, \\ \alpha b_1 + \beta a_1 = (\alpha b_2 + \beta a_2) \frac{x_1}{x_2}, \end{cases}$$

respectiv

$$\begin{cases} \left(a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2}\right) \cdot \alpha + \left(-b_1 + b_2 \frac{x_1}{x_2}\right) \cdot \beta = 0, \\ \left(b_1 - b_2 \frac{x_1}{x_2}\right) \cdot \alpha + \left(a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2}\right) \cdot \beta = 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

Numerele α şi β fiind *date* — putem, aşadar, presupune că $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ —, relaţiile (1.31) pot fi privite ca un sistem algebric, liniar şi omogen, în necunoscutele α, β, care admite o soluţie nenulă. Deci,

$$\begin{vmatrix} a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2} & -b_1 + b_2 \frac{x_1}{x_2} \\ b_1 - b_2 \frac{x_1}{x_2} & a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2} \end{vmatrix} = 0,$$

respectiv

$$\left(a_1 - a_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(b_1 - b_2 \frac{x_1}{x_2}\right)^2 = 0. \tag{1.32}$$

În concluzie, pentru ca spaţiul $\mathbb{C}\overline{e}_1$ să fie complexificatul unui spaţiu liniar real, *este necesar* — via egalitatea (1.32) — să existe $q \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$z_1 = q \cdot z_2. \qquad \left(q = \frac{x_1}{x_2}\right) \tag{1.33}$$

Fie $F \subseteq \mathbb{C}^n$ un spaţiu liniar complex m-dimensional care este şi *subspaţiu liniar*[21] [10, pag. 33] al spaţiului complex $\mathbb{C}^n$. Atunci, mulţimea [10, pag. 64]

$$F_{\mathbb{R}} = F \cap \mathbb{R}^n,$$

dotată cu operaţiile cu vectori şi scalari tipice — preluate de pe $\mathbb{R}^n$ —, constituie un spaţiu liniar real, pe care îl numim *realificatul* spaţiului F.

Realificarea poate conduce la mulţimi neinteresante.

[21] Adică, moşteneşte operaţiile *pe componente* ale lui $\mathbb{C}^n$!

Exemplul 1.3. Fie $\overline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ şi $F = \mathbb{C}\,\overline{e}_1$, vezi [10, pag. 65, Problem 1]. Atunci,

$$\overline{x} = \lambda \cdot \overline{e}_1 = (a + b \cdot i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \cdot i \\ -b + a \cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} \in F,$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, respectiv

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{x} \in F \cap \mathbb{R}^2.$$

De aici, $F_{\mathbb{R}} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$. Observăm că vectorul $\overline{e}_1$ din acest exemplu nu verifică relaţia (1.33).

Lema 1.2. *Fie subspaţiul liniar $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Atunci, realificatul complexificatului său — notat $E_{\mathbb{C}\mathbb{R}}$ — este*

$$(E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}} = E.$$

Demonstraţie. Conform (1.30), introducem vectorii $\overline{e}_j = \begin{pmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_n^j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Fie, de asemeni, $\overline{x} \in E_{\mathbb{C}}$ cu formula — $m \leq n$ —

$$\overline{x} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{e}_j = \sum_{j=1}^{m} (a_j + b_j \cdot i) \cdot \overline{e}_j = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_j x_n^j \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} b_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} b_j x_n^j \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_j x_n^j \end{pmatrix} + i \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \right], \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}.$$

Dacă impunem ca $\overline{x} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n$, atunci

$$\left(\begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \cdots & \overline{e}_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \right) \qquad \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.34)$$

Dat fiind că vectorii $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m$, ale căror componente alcătuiesc coloanele matricei sistemului algebric (1.34), sunt liniar independenţi peste $\mathbb{R}$, rangul matricei va fi maxim, adică m. În aceste condiţii, sistemul (1.34) admite o singură soluţie, cea nulă: $b_j = 0$ pentru orice $j \in \overline{1, m}$.

Am ajuns la

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{m} a_j x_1^j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_j x_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \overline{e}_j \in \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\} = E,$$

adică $\overline{x} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n \subseteq E$. Incluziunea inversă, $E \subseteq E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n$, este evidentă. □

Lema 1.3. ([10, pag. 67]) *Fie subspaţiul liniar $E \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $F \subseteq E_{\mathbb{C}}$ un subspaţiu liniar al spaţiului $E_{\mathbb{C}}$. Atunci,*

$$F_{\mathbb{R}} = F \cap E$$

este un subspaţiu liniar al spaţiului E.

Demonstraţie. Plecând de la $E_{\mathbb{C}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\}$, unde $\overline{e}_j \in E$, $j \in \overline{1,m}$, presupunem că $F \subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_k\}$ cu[22] $k \leq m$.

La fel ca în lema anterioară — vezi (1.34) —, ajungem la $F_{\mathbb{R}} = F \cap \mathbb{R}^n \subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_k\}$. Însă $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_k\} \subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\} = E$, de unde $F \cap \mathbb{R}^n = (F \cap \mathbb{R}^n) \cap E = F \cap (\mathbb{R}^n \cap E) = F \cap E$. □

Introducem aplicaţia $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ cu formula

$$\sigma\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \vdots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}, \qquad z_j \in \mathbb{C},\ j \in \overline{1,n},$$

unde $\overline{z} = a - b \cdot i$ — *conjugare* complexă — pentru orice $z = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$. Aici, a, $b \in \mathbb{R}$. Au loc următoarele proprietăţi

$$\begin{cases} \sigma(\alpha \cdot \overline{x} + \beta \cdot \overline{y}) = \overline{\alpha} \cdot \sigma(\overline{x}) + \overline{\beta} \cdot \sigma(\overline{y}), \\ \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}, \end{cases}$$

unde α, $\beta \in \mathbb{C}$ şi $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathbb{C}^n$ iar $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}$ este operatorul-identitate din $\mathbb{C}^n$. Adică, σ este o *involuţie* a spaţiului liniar complex $\mathbb{C}^n$ [4, pag. 25]. În particular, aplicaţia σ este $\mathbb{R}$-liniară iar $\sigma|_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este operatorul-identitate din $\mathbb{R}^n$.

Lema 1.4. ([10, pag. 64]) *Fiind dat subspaţiul liniar complex $F \subseteq \mathbb{C}^n$, există subspaţiul liniar real $E \subseteq \mathbb{R}^n$ astfel încât $F = E_{\mathbb{C}}$ dacă şi numai dacă $\sigma(F) \subseteq F$.*

Demonstraţie. Partea "$\Longrightarrow$". Cum $F = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\}$, unde sistemul $\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\}$ constituie o bază a spaţiului liniar real E, avem — $\sigma(\overline{e}_j) = \overline{e}_j$ —

[22] Subspaţiul $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{e}_1 + \overline{e}_2, \overline{e}_3 + \overline{e}_4\} \subsetneq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3, \overline{e}_4\}$ este 2-dimensional dar $k = 4$.

$$\sigma(\overline{f}) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda_j} \cdot \sigma(\overline{e}_j) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\lambda_j} \cdot \overline{e}_j \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\},$$

unde $\overline{f} = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{e}_j \in F$.

Partea "$\Longleftarrow$". Pentru orice $\overline{f} \in F$, unde $\overline{f} = \overline{x} + i \cdot \overline{y}$ şi $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$, avem $\sigma(\overline{f}) = \overline{x} + \overline{i} \cdot \overline{y} = \overline{x} - i \cdot \overline{y} \in F$, respectiv

$$\overline{x} = \frac{1}{2} \cdot \overline{f} + \frac{1}{2} \cdot \sigma(\overline{f}) \in F \tag{1.35}$$

şi

$$\overline{y} = \frac{1}{2i} \cdot \overline{f} + \frac{-1}{2i} \cdot \sigma(\overline{f}) \in F. \tag{1.36}$$

Fie $\left\{\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m\right\} \subset \mathbb{C}^n$ o bază a spaţiului liniar F. Atunci, $\overline{f}_j = \overline{x}_j + i \cdot \overline{y}_j$, unde $\overline{x}_j$, $\overline{y}_j \in \mathbb{R}^n$ şi $j \in \overline{1,m}$. Conform (1.35), (1.36), $\overline{x}_j$, $\overline{y}_j \in F$ pentru orice j.

Pentru $\overline{f} \in F$, putem scrie că — $\lambda_j \in \mathbb{C}$ —

$$\overline{f} = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{f}_j = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot \overline{x}_j + \sum_{j=1}^{m} (\lambda_j \cdot i) \cdot \overline{y}_j \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_m, \overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_m\}.$$

Adică, setul de vectori $\{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_m, \overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_m\}$, din $\mathbb{R}^n$, constituie un *sistem de generatori* pentru spaţiul liniar complex F.

Fie $\left\{\overline{t}_1, \cdots, \overline{t}_p\right\} \subseteq \{\overline{x}_1, \cdots, \overline{x}_m, \overline{y}_1, \cdots, \overline{y}_m\}$ un *sistem maximal* de vectori liniar independenţi — peste $\mathbb{R}$ —. Atunci, acest sistem va fi baza spaţiului F, deci

$$F = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left\{\overline{t}_1, \cdots, \overline{t}_p\right\} = E_{\mathbb{C}},$$

unde $E = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\{\overline{t}_1, \cdots, \overline{t}_p\}$. $\square$

Un subspaţiu liniar complex $F \subseteq \mathbb{C}^n$ este *decomplexificabil* [10, pag. 64] dacă există subspaţiul liniar real $E \subseteq \mathbb{R}^n$ astfel încât $F = E_{\mathbb{C}}$.

Lema 1.5. *Fie subspaţiul decomplexificabil $F \subseteq \mathbb{C}^n$. Atunci, complexificatul realificatului său — notat $F_{\mathbb{R}\mathbb{C}}$ — este*

$$(F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = F.$$

Demonstraţie. Conform Lemei 1.2, cum $F = E_{\mathbb{C}}$, avem $F_{\mathbb{R}} = E_{\mathbb{C}\mathbb{R}} = E$. De aici, $(F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = E_{\mathbb{C}} = F$. $\square$

Operaţia de realificare poate fi aplicată oricărui subspaţiu complex $F \subseteq \mathbb{C}^n$. Cum $F_{\mathbb{R}} \subseteq F$, deducem că

$$\begin{aligned} F_{\mathbb{R}\mathbb{C}} &= (F_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(F_{\mathbb{R}}) \\ &\subseteq \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(F) = F, \end{aligned} \tag{1.37}$$

vezi [10, pag. 344]. Exemplul 1.3 — via observaţia că $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{0_{\mathbb{R}^2}\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ — ne arată că putem avea şi incluziune strictă în (1.37).

Fie $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un subspaţiu liniar real cu baza[23] $\mathscr{S}_1$ şi $T : E \to E$ un operator liniar. Pe baza formulei (1.10), introducem operatorul liniar $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ astfel

$$T_{\mathbb{C}}(\overline{z}) = \sum_{j=1}^{m} z_j \cdot T(\overline{e}_j) = \begin{pmatrix} \overline{e}_1 & \cdots & \overline{e}_m \end{pmatrix} \mathbb{T} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}, \tag{1.38}$$

unde $\overline{z} = \sum\limits_{j=1}^{m} z_j \cdot \overline{e}_j$ şi $z_j \in \mathbb{C}$ pentru orice j. Operatorul $T_{\mathbb{C}}$ poartă numele de *complexificatul* operatorului T [10, pag. 65]. Având aceeaşi matrice de reprezentare, operatorii T şi $T_{\mathbb{C}}$ au acelaşi polinom caracteristic [10, pag. 66].

Lema 1.6. ([10, pag. 65, Proposition]) *Operatorul liniar $Q : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ este complexificatul unui operator liniar $T : E \to E$ — adică, $Q = T_{\mathbb{C}}$ — dacă şi numai dacă*

$$Q \circ \sigma = \sigma \circ Q, \qquad Q = \sigma \circ Q \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ Q \circ \sigma.$$

Demonstraţie. Observăm că, aplicaţia σ fiind o involuţie, avem $\sigma^{-1} = \sigma$.

Partea "$\Longrightarrow$". Fie $\overline{z} = \sum\limits_{j=1}^{m} z_j \cdot \overline{e}_j \in E_{\mathbb{C}}$, unde $\overline{e}_j \in E$. Atunci — reamintesc că $\sigma(\overline{e}_j) = \overline{e}_j$ şi $T_{\mathbb{C}}(\overline{e}_j) = T(\overline{e}_j)$ pentru orice j —,

$$\begin{aligned}(\sigma \circ Q \circ \sigma)(\overline{z}) &= (\sigma \circ T_{\mathbb{C}} \circ \sigma)(\overline{z}) = (\sigma \circ T_{\mathbb{C}}) \left(\sum_{j=1}^{m} \overline{z_j} \cdot \overline{e}_j \right) = \sigma \left(\sum_{j=1}^{m} \overline{z_j} \cdot T_{\mathbb{C}}(\overline{e}_j) \right) \\ &= \sigma \left(\sum_{j=1}^{m} \overline{z_j} \cdot T(\overline{e}_j) \right) = \sum_{j=1}^{m} \overline{\overline{z_j}} \cdot T(\overline{e}_j) = \sum_{j=1}^{m} z_j \cdot T(\overline{e}_j) = T_{\mathbb{C}}(\overline{z}) \\ &= Q(\overline{z}).\end{aligned}$$

Partea "$\Longleftarrow$". Să arătăm că $Q(E) \subseteq E$. Pentru $\overline{z} = Q(\overline{x}) \in E_{\mathbb{C}}$, unde $\overline{x} \in E$, avem[24]

$$\sigma(\overline{z}) = (\sigma \circ Q)(\overline{x}) = (Q \circ \sigma)(\overline{x}) = Q(\overline{x}) = \overline{z},$$

deci $\overline{z} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n = E_{\mathbb{C}\mathbb{R}} = E$. Am folosit Lema 1.2.

Fie $T = Q|_E : E \to E$. Cum $E_{\mathbb{C}} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\}$ şi $\overline{e}_j \in E$, putem scrie că

$$\begin{aligned}Q(\overline{z}) &= Q\left(\sum_{j=1}^{m} z_j \cdot \overline{e}_j \right) = \sum_{j=1}^{m} z_j \cdot T(\overline{e}_j) = T_{\mathbb{C}} \left(\sum_{j=1}^{m} z_j \cdot \overline{e}_j \right) \\ &= T_{\mathbb{C}}(\overline{z}), \qquad \overline{z} \in E_{\mathbb{C}}.\end{aligned}$$

Am obţinut că

---

[23] Introdusă la pagina 1.

[24] $\sigma(\overline{e}) = \overline{e}$ pentru orice $\overline{e} \in E$.

$$Q = (Q|_E)_{\mathbb{C}}\,,$$

adică *Q este complexificatul restricţiei sale la spaţiul liniar E.* □

Lema 1.7. *Dacă operatorii liniari $Q_k : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ sunt complexificaţii operatorilor liniari (reali) $T_k : E \to E$, unde $k \in \{1,2\}$, atunci,*

$$Q_1 \circ Q_2 = (T_1 \circ T_2)_{\mathbb{C}}\,.$$

Demonstraţie. Conform (1.38), dacă $\mathbb{T}_k \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ este matricea de reprezentare în $\mathscr{S}_1$ a operatorulilor T_k şi $(T_k)_{\mathbb{C}}$, atunci $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \cdot \mathbb{T}_2$ este matricea de reprezentare în $\mathscr{S}_1$ a operatorilor $T_1 \circ T_2$ şi $(T_1 \circ T_2)_{\mathbb{C}}$.

Pe de altă parte, matricea de reprezentare $\mathbb{Q}$ în $\mathscr{S}_1$ a operatorului $Q_1 \circ Q_2$ este produsul matricelor de reprezentare ale acestor operatori, adică

$$\mathbb{Q} = \mathbb{T}_1 \cdot \mathbb{T}_2.$$

Concluzia rezultă din (1.38). □

Capitolul 2
Teoreme de descompunere

2.1 Suma directă de subspaţii vectoriale. Suma directă de operatori

Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ un spaţiu liniar peste corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ cu baza $\mathscr{S}_1$ — introdusă la pagina 1 —.

Lema 2.1. *Dacă $V \subseteq E$ este un $\mathbb{K}$-subspaţiu liniar*[1]*, atunci există $W \subseteq E$ alt $\mathbb{K}$-subspaţiu liniar astfel încât $V \cap W = \{0_E\}$ şi orice element $\overline{e} \in E$ să se scrie sub forma*

$$\overline{e} = \overline{v} + \overline{w}, \qquad \overline{v} \in V, \overline{w} \in W. \tag{2.1}$$

Demonstraţie. Renumerotând, eventual, vectorii din $\mathscr{S}_1$, putem presupune că $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_h\}$, unde $h \leq m$. Atunci, fie — pentru $h < m$ —

$$W = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_{h+1}, \cdots, \overline{e}_m\}. \tag{2.2}$$

Dacă $h = m$, adică $V = E$, luăm $W = \{0_E\}$.

Fie $\overline{e} \in E$. Au loc relaţiile

$$\begin{aligned} \overline{e} &= \sum_{j=1}^{m} k_j \cdot \overline{e}_j \qquad (k_j \in \mathbb{K} \text{ pentru orice } j) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{h} k_j \cdot \overline{e}_j + \sum_{j=h+1}^{m} 0 \cdot \overline{e}_j \right) + \left(\sum_{j=1}^{h} 0 \cdot \overline{e}_j + \sum_{j=h+1}^{m} k_j \cdot \overline{e}_j \right) \\ &= \overline{v} + \overline{w}. \end{aligned}$$

În particular, dacă $\overline{e} \in V \cap W$, putem scrie că

[1] Adică, operaţiile cu *scalari* folosesc numai elemente (scalari) din corpul $\mathbb{K}$.

$$\overline{e} = \sum_{j=1}^{h} k_j \cdot \overline{e}_j = \sum_{j=h+1}^{m} k_j \cdot \overline{e}_j,$$

respectiv

$$\sum_{j=1}^{h} k_j \cdot \overline{e}_j + \sum_{j=h+1}^{m} (-k_j) \cdot \overline{e}_j = 0.$$

Vectorii $\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\}$ fiind liniar independenţi, rezultă că toate coordonatele vectorului $\overline{e}$ în baza $\mathscr{S}_1$ sunt nule, deci $\overline{e} = 0_E$.

Descompunerea (2.1) este *unică* datorită faptului că $V \cap W = \{0_E\}$. Într-adevăr, în caz contrar am avea

$$\begin{aligned}\overline{e} = \overline{v}_1 + \overline{w}_1 &= \sum_{j=1}^{m} k_j^{(1)} \cdot \overline{e}_j \\ = \overline{v}_2 + \overline{w}_2 &= \sum_{j=1}^{m} k_j^{(2)} \cdot \overline{e}_j,\end{aligned}$$

unde $k_j^{(1)}$, $k_j^{(2)} \in \mathbb{K}$ pentru orice j, respectiv

$$\begin{aligned}0 &= (\overline{v}_1 - \overline{v}_2) + (\overline{w}_1 - \overline{w}_2) \qquad (2.3)\\ &= \left[\sum_{j=1}^{h} \left(k_j^{(1)} - k_j^{(2)}\right) \cdot \overline{e}_j\right] + \left[\sum_{j=h+1}^{m} \left(k_j^{(1)} - k_j^{(2)}\right) \cdot \overline{e}_j\right]. \qquad (2.4)\end{aligned}$$

Concluzia poate fi obţinută în două moduri. Mai întâi, conform (2.3), deducem că

$$\overline{v}_1 - \overline{v}_2 = \overline{w}_2 - \overline{w}_1 \in V \cap W,$$

deci

$$\overline{v}_1 = \overline{v}_2 \quad \text{şi} \quad \overline{w}_1 = \overline{w}_2. \qquad (2.5)$$

Aici nu am ţinut seama de dimensiunea spaţiului ambient E!

Pe de altă parte, via (2.4), liniar independenţa vectorilor $\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_m\}$ ne conduce la $k_j^{(1)} = k_j^{(2)}$ pentru orice j, adică tot la (2.5). □

Lema 2.2. *În contextul Lemei 2.1, dacă V este un subspaţiu propriu*[2]*, atunci spaţiul W nu este unic.*

Demonstraţie. În demonstraţia anterioară am arătat, via formula (2.2), existenţa *unui* subspaţiu W pentru care să aibă loc descompunerea (2.1).

---

[2] Adică, $h < m$. Vezi şi [10, pag. 33].

Putem construi *alt* subspaţiu, notat W_1, cu aceleaşi proprietăţi ca W. Mai precis, fie — pentru $h < m-1$ —

$$W_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{\overline{e}_h + \overline{e}_{h+1}, \overline{e}_{h+2}, \overline{e}_{h+3}, \cdots, \overline{e}_m\}.$$

Evident, spaţiul V îşi păstrează formula, $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_h\}$. Când $h = m-1$, luăm $W_1 = \mathbb{K}(\overline{e}_h + \overline{e}_{h+1})$.

Se observă că

$$\overline{e}_h + \overline{e}_{h+1} \in W_1 \backslash W, \qquad \overline{e}_{h+1} \in W \backslash W_1,$$

deci subspaţiile W şi W_1 sunt distincte. □

Subspaţiul W constituie un *complement*[3] al subspaţiului V iar existenţa descompunerii (2.1) se notează cu expresia $E = V \oplus W$ [8, pag. 29, Theorem], numită *suma directă* a spaţiilor V şi W. Prin partiţionarea bazei $\mathscr{S}_1$, putem scrie că[4]

$$\overline{e} = \sum_{r=1}^{s} \left[\sum_{j=h_r+1}^{h_{r+1}} k_j^{(r)} \cdot \overline{e}_j \right] = \sum_{r=1}^{s} \left[\sum_{j \le h_r} 0 \cdot \overline{e}_j + \sum_{j=h_r+1}^{h_{r+1}} k_j^{(r)} \cdot \overline{e}_j + \sum_{j \ge h_{r+1}+1} 0 \cdot \overline{e}_j \right],$$

unde

$$\{1, \cdots, m\} = \{h_1 + 1, \cdots, h_2\} \cup \{h_2 + 1, \cdots, h_3\} \cup \cdots \cup \{h_s + 1, \cdots, h_{s+1}\}$$

şi $h_1 = 0 < h_2 < h_3 < \cdots < h_s < h_{s+1} = m$. De unde,

$$\begin{aligned} E &= V_1 \oplus (V_2 \oplus (\cdots \oplus (V_{s-1} \oplus V_s) \cdots)) \\ &= V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots V_s. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Lema 2.3. *Dacă $V_1, V_2, \ldots, V_s \subseteq E$, unde $s \ge 2$, sunt $\mathbb{K}$-subspaţii liniare şi orice egalitate de forma*

$$\overline{v}_1 + \overline{v}_2 + \cdots + \overline{v}_s = 0_E, \qquad \overline{v}_i \in V_i, \qquad i \in \overline{1,s},$$

ne conduce la $\overline{v}_i = 0_E$ pentru orice $1 \le i \le s$, atunci subspaţiile au în comun, două câte două, numai vectorul nul. Reciproca este adevărată doar pentru $s = 2$.

Demonstraţie. Dacă ar exista $i \neq j \in \overline{1,s}$ astfel încât $V_i \cap V_j \neq \{0_E\}$, atunci, luând $\overline{u} \in (V_i \cap V_j) \setminus \{0_E\}$, am putea introduce vectorii $\overline{v}_i = \overline{u}$, $\overline{v}_j = -\overline{u}$, respectiv $\overline{v}_k = 0_E$ pentru orice $k \neq i, j$. Evident, $\sum_{r=1}^{s} \overline{v}_r = 0$, ceea ce ar contrazice ipoteza.

Pentru partea a doua, să presupunem că $s \ge 3$. Subspaţiile $V_1 = \mathbb{K}(\overline{e}_1 + \overline{e}_2)$, $V_2 = \mathbb{K}\overline{e}_1$ şi $V_3 = \mathbb{K}\overline{e}_2$ au, două câte două, în comun doar vectorul nul chiar dacă are loc relaţia

---

[3] Mai precis, un *complement algebric*, vezi [6, pag. 45, Definiţia 2.1.6].

[4] Facem convenţia ca *orice sumă cu zero termeni să fie nulă.*

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{s}\overline{v}_r &= \overline{v}_1+\overline{v}_2+\overline{v}_3+0_E+\cdots+0_E\\ &= (\overline{e}_1+\overline{e}_2)+(-\overline{e}_1)+(-\overline{e}_2)+0_E+\cdots+0_E\\ &= 0_E.\end{aligned}$$

În sfârşit, dacă $s=2$ şi ar exista $\overline{v}_i \in V_i \setminus \{0_E\}$ cu $\overline{v}_1+\overline{v}_2=0$, atunci am ajunge la

$$\overline{u}=\overline{v}_1=-\overline{v}_2\in (V_i\cap V_j)\setminus\{0_E\},$$

ceea ce ar contrazice ipoteza. $\square$

Lema 2.4. ([12, pag. 204, Propoziţia 2.2]) *Fie $V_1,V_2,\ldots,V_s\subseteq E$, unde $s\geq 2$, $\mathbb{K}$-subspaţii liniare. Atunci, orice egalitate de forma*

$$\overline{v}_1+\overline{v}_2+\cdots+\overline{v}_s=0_E,\qquad \overline{v}_i\in V_i,\qquad i\in\overline{1,s},$$

ne va conduce la $\overline{v}_i=0_E$ pentru orice $1\leq i\leq s$ dacă şi numai dacă

$$V_i\cap \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\left\{\bigcup_{j\in\overline{1,s}\setminus\{i\}}V_j\right\}=\{0_E\}$$

pentru orice $1\leq i\leq s$.

Demonstraţie. Fie $\overline{v}_i\in\left(V_i\cap \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\left\{\bigcup_{j\in\overline{1,s}\setminus\{i\}}V_j\right\}\right)\setminus\{0_E\}$ pentru un anumit i. Atunci, există vectorii $\mathscr{W}=\{\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_t\}\subset \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\left\{\bigcup_{j\in\overline{1,s}\setminus\{i\}}V_j\right\}$, unde $t\geq 1$, şi scalarii $\left(\alpha_{\overline{w}_q}\right)_{q\in\overline{1,t}}\subset\mathbb{K}$, nu toţi nuli, astfel încât[5]

$$\begin{aligned}\overline{v}_i &= \sum_{q=1}^{t}\alpha_{\overline{w}_q}\overline{w}_q=\sum_{\overline{w}\in\mathscr{W}}\alpha_{\overline{w}}\overline{w}=\sum_{j\in\overline{1,s}\setminus\{i\}}\left(\sum_{\overline{w}\in\mathscr{W}\cap V_j}\alpha_{\overline{w}}\overline{w}\right)\\ &= \sum_{j\in\overline{1,s}\setminus\{i\}}(-\overline{v}_j),\end{aligned}$$

unde $\overline{v}_j\in V_j$ pentru orice $j\neq i$ şi cel puţin unul dintre aceşti vectori este nenul.

Am obţinut că

$$\overline{v}_i+\sum_{j\in\overline{1,s}\setminus\{i\}}\overline{v}_j=0_E.$$

Reciproc, dacă $\overline{v}_i\neq 0_E$ pentru un anumit i, atunci

5 Reamintesc convenţia ca *orice sumă de vectori cu* 0 *termeni să aibă valoarea* 0_E.

$$\bar{v}_i = \sum_{j \in \overline{1,s} \setminus \{i\}} (-\bar{v}_j) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ \bigcup_{j \in \overline{1,s} \setminus \{i\}} V_j \right\},$$

de unde $\{\bar{v}_i\} \subset V_i \cap \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ \bigcup_{j \in \overline{1,s} \setminus \{i\}} V_j \right\} \neq \{0_E\}$. $\square$

Păstrând contextul Lemei 2.1, fie $T : V \to V$ un operator liniar cu matricea de reprezentare $\mathbb{T}_V$, unde

$$\big(T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_h)\big) = \big(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_h\big) \mathbb{T}_V, \qquad \mathbb{T}_V \in \mathscr{M}_h(\mathbb{K}).$$

Operatorul T poate fi *prelungit cu zero* la întregul spaţiu E. Mai precis, noul operator — notat tot cu T — verifică relaţia

$$\big(T(\bar{e}_1) \cdots T(\bar{e}_h)\; T(\bar{e}_{h+1}) \cdots T(\bar{e}_m)\big) = \big(\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_h\; \bar{e}_{h+1} \cdots \bar{e}_m\big) \mathbb{T},$$

unde[6]

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_V & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & O_{m-h} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K}).$$

Mai departe, fiind daţi operatorii liniari $T : V \to V$ şi $P : W \to W$, cu matricele $\mathbb{T}_V$ şi $\mathbb{P}_W$, deducem că suma prelungirilor lor cu zero în spaţiul E este un operator liniar $M : E \to E$ a cărui matrice de reprezentare în baza $\mathscr{S}_1$ are formula

$$\begin{aligned} \mathbb{M} = \mathbb{T} + \mathbb{P} &= \begin{pmatrix} \mathbb{T}_V & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & O_{m-h} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{P}_W \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbb{T}_V & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{P}_W \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dacă spaţiul E este descompus în suma directă a spaţiilor $V_1, \ldots, V_s$ — vezi (2.6) —, atunci, fiind daţi operatorii liniari $T_r : V_r \to V_r$ de matrice $\mathbb{T}_{V_r}$, unde $r \in \overline{1,s}$, suma prelungirilor lor cu zero în spaţiul E este operatorul $T : E \to E$ cu matricea

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_{V_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{T}_{V_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{T}_{V_s} \end{pmatrix}.$$

Acesta se notează cu expresia $T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_s$ şi se numeşte *suma directă* a operatorilor $(T_r)_{r \in \overline{1,s}}$ [10, pag. 41].

Lema 2.5. *Fie $T : E \to E$ un operator liniar şi $E = V \oplus W$. Dacă $T(V) \subseteq V$ şi $T(W) \subseteq W$, atunci există operatorii $\mathbb{K}$-liniari $T_1 : V \to V$ şi $T_2 : W \to W$ astfel încât*

---

[6] $O_{p,q}$ reprezintă matricea-nulă cu p linii şi q coloane. Aici, $O_p = O_{p,p}$.

$$T = T_1 \oplus T_2.$$

Demonstraţie. Pentru $V = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_h\}$, $W = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_{h+1}, \cdots, \overline{e}_m\}$, deducem că

$$T(\overline{e}_j) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_h\},\ j \in \overline{1,h},$$

şi

$$T(\overline{e}_k) \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_{h+1}, \cdots, \overline{e}_m\},\ k \in \overline{h+1,m},$$

respectiv matricea de reprezentare a operatorului în raport cu baza $\mathscr{S}_1$ are forma

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} A & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B \end{pmatrix}, \qquad A \in \mathscr{M}_h(\mathbb{K}),\ B \in \mathscr{M}_{m-h}(\mathbb{K}). \tag{2.7}$$

Avem $T_1 = T|_V$ cu matricea $\mathbb{T}_V = A$ şi $T_2 = T|_W$ cu matricea $\mathbb{T}_W = B$. $\square$

Lema 2.6. *Fie $E = V \oplus W \subseteq \mathbb{C}^n$ un spaţiu liniar peste corpul $\mathbb{K}$ şi operatorul liniar $T : E \to E$ astfel încât $T(V) \subseteq V$ şi $T(W) \subseteq W$. Dacă $\lambda \in \mathbb{K}$ este o valoare proprie a operatorului T, atunci λ este valoare proprie pentru cel puţin unul dintre operatorii*

$$T|_V,\ T|_W.$$

Demonstraţie. Fie $\overline{e} = \overline{v} + \overline{w} \in E$, unde $\overline{v} \in V$ şi $\overline{w} \in W$, un vector propriu corespunzător valorii proprii λ.

Din relaţiile

$$\begin{aligned} T(\overline{e}) &= T(\overline{v}) + T(\overline{w}) = T|_V\ (\overline{v}) + T|_W\ (\overline{w}) \\ &= \lambda \cdot \overline{e} \\ &= \lambda \cdot \overline{v} + \lambda \cdot \overline{w} \end{aligned}$$

deducem că

$$\begin{aligned} T|_V\ (\overline{v}) - \lambda \cdot \overline{v} &= \lambda \cdot \overline{w} - T|_W\ (\overline{w}) \qquad (\in V \cap W) \\ &= 0_E, \end{aligned}$$

respectiv

$$T|_V\ (\overline{v}) = \lambda \cdot \overline{v}, \qquad T|_W\ (\overline{w}) = \lambda \cdot \overline{w}.$$

Cum $\overline{e} \neq 0_E$, cel puţin unul dintre vectorii $\overline{v}$, $\overline{w}$ este nenul. Presupunem că $\overline{w} \neq 0$. Atunci, $\overline{w}$ este eigenvector pentru valoarea proprie λ a operatorului corespunzător, adică $T|_W$. $\square$

Exemplul 2.1. În contextul Lemei 2.2, fie $T : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^6$ operatorul liniar bijectiv dat de relaţiile

$$T(\bar{i}_1)=\bar{i}_2,\quad T(\bar{i}_2)=\bar{i}_1,\quad T(\bar{i}_3)=\bar{i}_3,$$
$$T(\bar{i}_4)=\bar{i}_4,\quad T(\bar{i}_5)=\bar{i}_6,\quad T(\bar{i}_6)=\bar{i}_5,$$

unde sistemul $\mathscr{S}_1=\{\bar{i}_1,\dots,\bar{i}_6\}$ desemnează baza canonică (1.11). Avem

$$\mathbb{T}=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{pmatrix},\qquad \det\mathbb{T}=1.$$

Introducem subspaţiile liniare

$$V=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\bar{i}_1,\bar{i}_2,\bar{i}_3\right\},\quad W=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\bar{i}_4,\bar{i}_5,\bar{i}_6\right\},\quad W_1=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\bar{i}_3+\bar{i}_4,\bar{i}_5,\bar{i}_6\right\}.$$

Atunci, avem

$$(E=)\qquad \mathbb{R}^6=V\oplus W=V\oplus W_1$$

şi — $T(\bar{i}_3+\bar{i}_4)=\bar{i}_3+\bar{i}_4$ —

$$T(V)=V,\quad T(W)=W,\quad T(W_1)=W_1.$$

Cu alte cuvinte, subspaţiul V poate admite mai multe complemente, fiecare dintre acestea invariat de către operatorul T!

2.2 Teorema $N+M$

Fie $E\subseteq\mathbb{C}^n$ un spaţiu liniar m-dimensional peste corpul $\mathbb{K}\in\{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ şi $T:E\to E$ un operator $\mathbb{K}$-liniar.

Introducem mulţimile[7]

$$K_i(T)=\mathrm{Ker}\left(T^i\right),\qquad L_i(T)=\mathrm{Im}\left(T^i\right),\qquad i\in\mathbb{N}.$$

Aici, $T^0=I$, unde I este operatorul-identitate din $L(E,E)$, şi $T^i=T\circ T\circ\cdots\circ T$ — i factori T —.

Lema 2.7. *Pentru orice $i\geq 0$, mulţimile $K_i(T)$ şi $L_i(T)$, împreună cu operaţiile liniare de pe E, sunt spaţii liniare peste corpul $\mathbb{K}$.*

---

[7] Fiind dat operatorul liniar $P:E\to E$, mulţimile $\mathrm{Ker}\,P=\{\bar{e}|P(\bar{e})=0_E\}$ şi $\mathrm{Im}\,P=\{P(\bar{e})|\bar{e}\in E\}=P(E)$, dotate cu operaţiile spaţiului ambient E, sunt spaţii liniare peste corpul $\mathbb{K}$ [8, pag. 88].

Demonstraţie. Aplicaţia $T^i : E \to E$ fiind un operator liniar, nucleul[8] (*Ker*) şi imaginea[9] sa (*Im*) sunt subspaţii liniare ale spaţiului E. □

Lema 2.8. *Mulţimile*

$$N = \bigcup_{i \geq 0} K_i(T), \qquad M = \bigcap_{i \geq 0} L_i(T)$$

sunt subspaţii liniare ale spaţiului E.

Demonstraţie. Fie $\overline{x} \in K_i(T)$, adică $T^i(\overline{x}) = 0$. Avem $T^{i+1}(\overline{x}) = \left(T \circ T^i\right)(\overline{x}) = T\left(T^i(\overline{x})\right) = T(0_E) = 0_E$, de unde $\overline{x} \in K_{i+1}(T)$. De aici,

$$K_0(T) = \operatorname{Ker} I = \{0_E\} \subseteq K_1(T) \subseteq \cdots \subseteq K_i(T) \subseteq K_{i+1}(T) \subseteq \cdots \subseteq E. \tag{2.8}$$

Fie $\overline{y} \in L_{i+1}(T)$, adică $\overline{y} = T^{i+1}(\overline{x})$ pentru un anumit $\overline{x} \in E$. Avem $\overline{y} = \left(T^i \circ T\right)(\overline{x}) = T^i(T(\overline{x})) = T^i(\overline{z})$, de unde $\overline{y} \in L_i(T)$. De aici,

$$L_0(T) = \operatorname{Im} I = E \supseteq L_1(T) \supseteq \cdots \supseteq L_i(T) \supseteq L_{i+1}(T) \supseteq \cdots \supseteq \{0_E\}. \tag{2.9}$$

Facem următoarea observaţie: *dacă $V \subset E$ este un subspaţiu liniar propriu, de bază $\mathscr{S}$, al spaţiului liniar E iar $\overline{e} \in E \backslash V$, atunci vectorii din sistemul $\mathscr{B} = \mathscr{S} \cup \{\overline{e}\}$ sunt liniar independenţi peste corpul* $\mathbb{K}$. Într-adevăr, cum $V = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(\mathscr{S})$, dacă $\overline{e}$ ar fi o combinaţie liniară de elemente din $\mathscr{S}$, deci $\overline{e} \in \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(\mathscr{S})$, atunci am ajunge la $\overline{e} \in V$, adică la o contradicţie.

Pe baza observaţiei anterioare, deducem că în niciunul din şirurile de spaţii (2.8), (2.9) nu putem avea *o infinitate* de incluziuni stricte. O asemenea situaţie ar conduce fie la o infinitate de vectori $\overline{x}_i \in K_{i+1}(T) \backslash K_i(T) \subset E$ fie la o infinitate de vectori $\overline{y}_i \in L_i(T) \backslash L_{i+1}(T) \subset E$ care să fie liniar independenţi peste corpul $\mathbb{K}$. Numai că numărul maxim de elemente liniar independente din E este m!

Deducţia anterioară poate fi îmbunătăţită. Astfel, *să presupunem că avem $K_t(T) = K_{t+1}(T)$ pentru un anumit $t \in \mathbb{N}^*$. Atunci, $K_{t+1}(T) = K_{t+2}(T)$.* Pentru a proba acest fapt, fie $\overline{x} \in K_{t+2}(T)$. Atunci, $0_E = T^{t+2}(\overline{x}) = T^{t+1}(T(\overline{x}))$, de unde $T(\overline{x}) \in K_{t+1}(T)$, respectiv $T(\overline{x}) \in K_t(T)$. Am ajuns la $T^{t+1}(\overline{x}) = T^t(T(\overline{x})) = 0_E$, adică $\overline{x} \in K_{t+1}(T)$. În concluzie, $K_{t+2}(T) \subseteq K_{t+1}(T)$. Incluziunea inversă provine din (2.8). Mai departe, *să presupunem că avem $L_t(T) = L_{t+1}(T)$ pentru un anumit $t \in \mathbb{N}^*$. Atunci, $L_{t+1}(T) = L_{t+2}(T)$.* Pentru a proba acest fapt, fie $\overline{x} = T^{t+1}(\overline{y}) \in L_{t+1}(T)$. Atunci, $\overline{x} = T(T^t(\overline{y})) = T(\overline{z})$, unde $\overline{z} \in L_t(T) = L_{t+1}(T)$. Avem $\overline{z} = T^{t+1}(\overline{v})$, de unde $\overline{x} = T(\overline{z}) = T^{t+2}(\overline{v})$. Am ajuns la $\overline{x} \in L_{t+2}(T)$. Incluziunea inversă provine din (2.9).

Aşadar, există numerele naturale p, r pentru care

$$\begin{cases} K_i(T) = K_{i+1}(T) = K_{i+2}(T) = \cdots, \\ L_j(T) = L_{j+1}(T) = L_{j+2}(T) = \cdots, \end{cases} \tag{2.10}$$

[8] În limba engleză, *kernel* [13, pag. 16]. Sau *spaţiul nul* al operatorului T, vezi [13, pag. 16], [8, ibid.].

[9] În limba engleză, *image* [10, pag. 34].

unde $i \geq p$ şi $j \geq r$, şi

$$K_0(T) \subsetneq K_1(T) \subsetneq \cdots \subsetneq K_p(T), \tag{2.11}$$

respectiv

$$L_0(T) \supsetneq L_1(T) \supsetneq \cdots \supsetneq L_r(T).$$

De aici, $N = K_p(T)$ şi $M = L_r(T)$. Concluzia rezultă din Lema 2.7. $\square$

Lema 2.9. *În contextul Lemei 2.8,*

$$T(N) \subseteq N, \qquad T(M) \subseteq M.$$

Demonstraţie. Fie $\overline{e} \in N$. Atunci, fixăm $i \geq 0$ astfel încât $\overline{e} \in K_i(T)$. În cazul $i \geq 1$ au loc relaţiile

$$\begin{aligned} T^i(T(\overline{e})) &= T^{i+1}(\overline{e}) = T\left(T^i(\overline{e})\right) = T\left(0_E\right) \\ &= 0_E, \end{aligned}$$

din care deducem că $T(\overline{e}) \in K_i(T) \subseteq N$.

Mai departe, fie $\overline{e} \in M$. Atunci, via (2.10), $M = T^r(E)$, deci există $\overline{f} \in E$ cu proprietatea că $\overline{e} = T^r(\overline{f})$. Avem

$$T(\overline{e}) = T^{r+1}(\overline{f}) \in \operatorname{Im} T^{r+1} = \operatorname{Im} T^r = M,$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Lema 2.10. ([10, pag. 333, Theorem]) *În contextul Lemei 2.9, fie $P : E \to E$ un operator $\mathbb{K}$-liniar care* comută *cu T, adică*

$$T \circ P = P \circ T.$$

Atunci,

$$P(N) \subseteq N. \tag{2.12}$$

Demonstraţie. Din $T \circ P = P \circ T$ rezultă că $T^2 \circ P = T \circ (T \circ P) = T \circ (P \circ T) = (T \circ P) \circ T = (P \circ T) \circ T = P \circ T^2$, respectiv

$$T^k \circ P = P \circ T^k, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Fie $\overline{x} \in N = K_p(T)$ — vezi (2.10) —. Au loc relaţiile

$$T^p(P(\overline{x})) = (T^p \circ P)(\overline{x}) = (P \circ T^p)(\overline{x}) = P(0_E) = 0_E,$$

adică $P(\overline{x}) \in K_p(T)$. $\square$

Teorema 2.1. ([10, pag. 332, Lemma]) *Spaţiul liniar E admite descompunerea*

$$E = N \oplus M. \tag{2.13}$$

Demonstraţie. Fie $T_1 = T|_M$. Conform Lemei 2.9, operatorul $T_1 : M \to M$ este bine-definit. Mai mult, ţinând seama de (2.10), putem scrie că

$$M = T^r(E) = T^{r+1}(E) = T\left(T^r(E)\right) = T(M) = T_1(M),$$

adică T_1 este *surjectiv*. Deoarece spaţiul liniar M este finit dimensional iar operatorul T_1 este $\mathbb{K}$-liniar, deducem că T_1 este *bijectiv*, deci şi *injectiv*[10].

Cum operatorul T_1 este bijectiv, *toate puterile sale sunt bijective*, adică $\operatorname{Ker}\left(T_1^v\right) = \{0_E\}$, unde $v \geq 0$. Aşadar, *pentru orice* $\overline{e} \in M \backslash \{0_E\}$, *şirul* $\left(T_1^v(\overline{e})\right)_{v \geq 1}$ *conţine doar vectori nenuli din* M. În particular, fie $\overline{x} \in N \cap M \backslash \{0_E\}$. Atunci, cum $\overline{x} \in N$, există $i \geq 1$ astfel încât $\overline{x} \in K_i(T)$, adică $T^i(\overline{x}) = 0_E$. Deoarece $\overline{x} \in M \backslash \{0_E\}$, relaţiile

$$0_E = T^i(\overline{x}) = T_1^i(\overline{x}) \neq 0_E$$

ne conduc la o contradicţie. Am obţinut că

$$N \cap M = \{0_E\}.$$

Rămâne să stabilim că are loc descompunerea (2.1). Fie $\overline{e} \in E$. Atunci, $T^r(\overline{e}) \in M$. Cum[11] $M = T_1^r(M)$, *există şi este unic* vectorul $\overline{w} \in M$ cu proprietatea că

$$T^r(\overline{e}) = T_1^r(\overline{w}).$$

Luând $\overline{v} = \overline{e} - \overline{w}$, observăm că $T^r(\overline{v}) = T^r(\overline{e}) - T^r(\overline{w}) = T^r(\overline{e}) - T_1^r(\overline{w}) = 0_E$, adică $\overline{v} \in K_r(T) \subseteq N$. □

Lema 2.11. *În contextul Teoremei 2.1,*

$$T = T_1 \oplus T_2, \tag{2.14}$$

unde $T_1 = T|_N$ *şi* $T_2 = T|_M$. *De asemeni, există* $p \in \mathbb{N}^*$ *astfel ca*

$$\mathbb{T}_N^p = O_h, \tag{2.15}$$

unde h *este dimensiunea* $\mathbb{K}$*-subspaţiului* N.

Demonstraţie. Conform (2.10), fixăm $p \geq 1$ pentru care $K_i(T) = K_p(T)$ oricare ar fi $i \geq p$. Atunci, $N = K_p(T)$.

Formulele (1.24), (1.25) ne conduc la — reamintesc relaţia (1.16) —

---

[10] Vezi [10, pag. 35, 327, Proposition 3] sau [8, pag. 62, Theorem 2].

[11] Operatorul T_1^r este bijectiv!

$$0_E = T^p(\overline{v}) = \begin{pmatrix}\overline{e}_1 & \cdots & \overline{e}_m\end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \mathbb{T}_N & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{T}_M \end{pmatrix}^p \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

unde $N = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_h\}$, $M = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_{h+1}, \cdots, \overline{e}_m\}$ şi $\overline{v} = \sum\limits_{i=1}^{h} x_i \cdot \overline{e}_i + \sum\limits_{i=h+1}^{m} 0 \cdot \overline{e}_i \in N$, respectiv la identitatea dublă

$$\begin{pmatrix} \mathbb{T}_N & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{T}_M \end{pmatrix}^p \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}_N^p & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & \mathbb{T}_M^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.16}$$

valabilă pentru orice $x_1, \ldots, x_h \in \mathbb{K}$.

Singura matrice care poate fi pusă în locul lui $\mathbb{T}_N^p$ în (2.16) pentru a satisface identitatea este matricea-nulă, O_h. Relaţia (1.18) ne arată că formula (2.15) este independentă de baza spaţiului N. $\square$

Operatorul liniar $T_1 : N \to N$ din Lema 2.11 este numit *nilpotent* [10, pag. 109].

2.3 Teorema de descompunere primară

Lema 2.12. *Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ un $\mathbb{K}$-spaţiu liniar de dimensiune $m \leq n$ şi $T : E \to E$ un operator $\mathbb{K}$-liniar cu valoarea proprie $\lambda_0 \in \mathbb{K}$.*

Presupunem că T verifică proprietatea $(\mathscr{H}\mathscr{S})$: *sau ecuaţia caracteristică*

$$p_T(\lambda) = 0$$

are toate rădăcinile reale sau

$$\mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Fie subspaţiul liniar[12]

$$V = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{Ker}\,(T - \lambda_0 \cdot I)^k$$

[12] Subspaţiul V se mai numeşte şi λ_0-*eigenspaţiul generalizat* al operatorului T iar mulţimea $\mathrm{Ker}\,(T - \lambda_0 \cdot I) \subseteq V$ poartă numele de λ_0-*eigenspaţiul* operatorului T [10, pag. 110].

şi W un complement al acestuia cu proprietatea că $T(W) \subseteq W$. Atunci, sau $W = \{0_E\}$ sau polinomul caracteristic $p_T(\lambda)$ al operatorului T admite un zero $\lambda_1 \neq \lambda_0$ în $\mathbb{K}$.

Demonstraţie. Începem prin a arăta că situaţia din ipoteză — existenţa subspaţiilor V, W — are loc întotdeauna.

Pasul întâi. Aplicând Teorema 2.1 şi Lema 2.9 operatorului liniar $T - \lambda_0 \cdot I$, deducem că V este un subspaţiu liniar al spaţiului E care este invariat de $T - \lambda_0 \cdot I$. De asemeni, subspaţiul V admite un complement, şi anume

$$W = \bigcap_{k \geq 0} \text{Im } (T - \lambda_0 \cdot I)^k,$$

care să fie invariant la acţiunea lui $T - \lambda_0 \cdot I$.

Pasul al doilea. Facem observaţia că, *fiind dat $\mu \in \mathbb{K}$, operatorul liniar $T - \mu \cdot I$ invariază un subspaţiu liniar $H \subseteq E$ dacă şi numai dacă şi operatorul T invariază subspaţiul în cauză.* Într-adevăr, dacă $(T - \mu \cdot I)(\overline{e}) = T(\overline{e}) - \mu \cdot \overline{e} \in H$ pentru un anumit $\overline{e} \in H$, atunci $T(\overline{e}) = [T(\overline{e}) - \mu \cdot \overline{e}] + \mu \cdot \overline{e} \in H$, adică $T(H) \subseteq H$. Afirmaţia reciprocă este evidentă: $(T - \mu \cdot I)(H) \subseteq H$ când $T(H) \subseteq H$.

În consecinţă, spaţiile V, W, care sunt invariate de $T - \lambda_0 \cdot I$, vor fi invariate şi de operatorul T, respectiv de toţi operatorii $(T - \mu \cdot I)_{\mu \in \mathbb{K}}$. Am ajuns, aşadar, la cele două descompuneri (2.13), (2.14) — bazată pe Lema 2.5 —.

Revenind la firul principal al demonstraţiei, ipotezele ne situează în contextul Lemei 2.5. Pentru $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \cdots, \overline{e}_h\}$, $W = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_{h+1}, \cdots, \overline{e}_m\}$, matricea de reprezentare a operatorului T în baza $\mathscr{S}_1 = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m\}$ a spaţiului E are forma (2.7). În particular, dacă $h < m$ — vezi (2.7) — şi $\lambda \in \mathbb{K}$ este o eigenvaloare a operatorului T, atunci matricea de reprezentare a operatorului $T - \lambda \cdot I$ în baza $\mathscr{S}_1$ are forma

$$\mathbb{T} - \lambda \cdot I_m = \mathbb{T} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & I_{m-h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - \lambda \cdot I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B - \lambda \cdot I_{m-h} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

de unde

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \begin{vmatrix} A - \lambda \cdot I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B - \lambda \cdot I_{m-h} \end{vmatrix} \\ &= \det\,(A - \lambda \cdot I_h) \cdot \det\,(B - \lambda \cdot I_{m-h}) \qquad (2.18) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Fie $\overline{v} \in V$, unde $\overline{v} = \sum_{i=1}^{h} x_i \cdot \overline{e}_i$. Conform (2.10), există numărul $p \geq 1$ astfel încât $V = K_p(T - \lambda_0 \cdot I)$.

Relaţiile (2.16) devin — vezi (2.17) —

$$\begin{pmatrix} (A-\lambda_0 \cdot I_h)^p & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & (B-\lambda_0 \cdot I_{m-h})^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

La fel ca în demonstraţia Lemei 2.11, pentru ca identitatea (2.19) să aibă loc este obligatoriu să avem

$$(A-\lambda_0 \cdot I_h)^p = O_h, \tag{2.20}$$

ceea ce ne conduce la o *formulă de reprezentare* a matricei A, şi anume

$$A = \lambda_0 \cdot I_h + M, \qquad M \in \mathscr{M}_h(\mathbb{K}), M = \text{nilpotentă}. \tag{2.21}$$

Facem următoarea observaţie: *dacă $\mathbb{T}_1 : E \to E$ este* prelungirea cu zero *a operatorului $T_1 : V \to V$, adică*

$$\mathbb{T}_1 = \begin{pmatrix} A & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & O_{m-h} \end{pmatrix},$$

şi $\overline{e} = \sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \overline{e}_i \in E$ este un eigenvector (generalizat) corespunzând valorii proprii $\mu \neq 0$ — a acestei prelungiri $\mathbb{T}_1$ —, atunci sistemul algebric

$$\begin{aligned} (\mathbb{T}_1 - \mu \cdot I_m)^k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ x_{h+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A-\mu \cdot I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & O_{m-h} - \mu \cdot I_{m-h} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ x_{h+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (A-\mu \cdot I_h)^k & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & (-\mu \cdot I_{m-h})^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ x_{h+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad (2.22) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, k \in \mathbb{N}^*, \end{aligned}$$

are drept soluţie nenulă setul de coordonate în baza $\mathscr{S}_1$ al vectorului $\overline{e}$. Prezenţa termenului $(-\mu \cdot I_{m-h})^k$ în (2.22) ne arată că sistemul poate avea (asemenea) soluţii nenule dacă şi numai dacă $\det(A-\mu\cdot I_h)=0$ *şi* $x_{h+1}=\cdots=x_m=0$. Adică, μ trebuie să fie eigenvaloare pentru operatorul "mic" $T_1 : V \to V$ şi $\overline{e}=\sum\limits_{i=1}^{h} x_i\cdot\overline{e}_i \in V$ un eigenvector (generalizat) corespunzându-i lui μ. Cu alte cuvinte, valorile proprii *nenule* şi vectorii proprii (generalizaţi) ai unui operator $T_1 : V \to V$ coincid cu valorile proprii nenule, respectiv cu vectorii proprii (generalizaţi) ai prelungirii acestui operator cu zero în întregul spaţiu E. Evident, o observaţie similară se face în privinţa operatorului $T_2 : W \to W$ şi a prelungirii sale cu zero, notată tot cu T_2, în întreg spaţiul ambient E!

Numărul $\lambda_0 \in \mathbb{K}$, fiind o valoare proprie a operatorului $T : E \to E$, este o rădăcină, de multiplicitate[13] $m_0 \in \mathbb{N}^*$, a polinomului caracteristic $p_T(\lambda)$. Atunci, avem

$$p_T(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^{m_0}\cdot q(\lambda), \tag{2.23}$$

unde q este tot un polinom cu coeficienţi în $\mathbb{K}$, având gradul mai mic decât m — gradul polinomului $p_T(\lambda)$ —, care nu se anulează pentru $\lambda=\lambda_0$.

Formula (2.20) ne arată că *numărul* λ_0 *este valoare proprie a matricei* A. În plus, via (2.18), deducem că există $1 \le n_0 \le m_0$ astfel încât $(\lambda-\lambda_0)^{n_0} | \det(A-\lambda\cdot I_h)$.

Afirmăm că $n_0 = m_0$, adică λ_0 *nu este un zero al polinomului* $\det(B-\lambda\cdot I_{m-h})$. Pentru a proba aceasta, presupunem că, prin absurd, λ_0 este un asemenea zero, adică o valoare proprie a matricei B. Observaţia anterioară, pentru operatorul $T_2 : W \to W$ şi $\mu=\lambda_0$, ne conduce la sistemul algebric

$$\begin{pmatrix} -\lambda_0\cdot I_h & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B-\lambda_0\cdot I_{m-h} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_h \\ x_{h+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m. \tag{2.24}$$

Cum $\det(B-\lambda_0\cdot I_{m-h})=0$, dacă luăm $x_1=\cdots=x_h=0$, atunci va exista vectorul nenul $\overline{w}=\sum\limits_{i=h+1}^{m} x_i\cdot\overline{e}_i \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_{h+1},\ldots,\overline{e}_m\}=W$ ale cărui componente să verifice sistemul algebric (2.24). Astfel, $\overline{w}$ devine un eigenvector[14] al (prelungirii cu zero a) operatorului T_2, de unde, dată fiind unicitatea descompunerii (2.1), deducem că

$$T(\overline{w}) = T(0_E+\overline{w}) = T_2(\overline{w}) = \lambda_0\cdot\overline{w},$$

respectiv $\overline{w} \in \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_0\cdot I) \subseteq V$. Am ajuns, evident, la o contracţie: $\overline{w} \in V \cap W$.

---

[13] Această cantitate se numeşte *multiplicitatea algebrică* a eigenvalorii λ_0, vezi [1, pag. 157].

[14] Dacă $\lambda_0 = 0$, atunci nu este obligatoriu ca $x_1=\cdots=x_h=0$! Putem, în schimb, impune noi această restricţie, deoarece suntem interesaţi de construcţia unui *anumit* vector $\overline{w}$.

Mai facem o afirmaţie[15]: *numărul* λ_0 *este singura valoare proprie a matricei* $A \in \mathscr{M}_h(\mathbb{K})$. La fel ca până acum, presupunem că, prin absurd, există $\mu \neq \lambda_0$ în $\mathbb{K}$ astfel încât $\det(A - \mu \cdot I_h) = 0$. Folosind sistemul algebric (2.22), cu $k = 1$, deducem existenţa[16] unui vector nenul $\overline{v} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_h\} = V$ pentru care este valabilă dubla egalitate $T(\overline{v}) = T_1(\overline{v}) = \mu \cdot \overline{v}$.

Cum $\overline{v} \in V$, există $j \geq 1$ cu proprietatea că $\overline{v} \in \mathrm{Ker}\ (T - \lambda_0 \cdot I)^j$. Adică, $(T - \lambda_0 \cdot I)^j(\overline{v}) = 0_E$. Însă, remarcăm că

$$\begin{aligned}(T - \lambda_0 \cdot I)^2(\overline{v}) &= (T - \lambda_0 \cdot I)((T - \lambda_0 \cdot I)(\overline{v})) = (T - \lambda_0 \cdot I)(T(\overline{v}) - \lambda_0 \cdot \overline{v}) \\ &= (T - \lambda_0 \cdot I)((\mu - \lambda_0) \cdot \overline{v}) = (\mu - \lambda_0) \cdot (T - \lambda_0 \cdot I)(\overline{v}) \\ &= (\mu - \lambda_0)^2 \cdot \overline{v},\end{aligned}$$

respectiv — prin inducţie matematică —

$$0_E = (T - \lambda_0 \cdot I)^j(\overline{v}) = (\mu - \lambda_0)^j \cdot \overline{v}.$$

Am ajuns, din nou, la o contradicţie: $\overline{v} = 0_E$.

Demonstraţia afirmaţiei se bazează, aşadar, pe construcţia unui vector $\overline{v} \neq 0_E$. Acest vector nu poate fi folosit dacă $\mu \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{K}$ pentru că am avea

$$\overline{v} \in \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_h\} \supsetneq \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_h\} = V,$$

adică *este posibil ca* $\overline{v} \notin V$. Ca să evităm asemenea complicaţii, am introdus proprietatea $(\mathscr{H}\mathscr{S})$ [10, pag. 128, Theorem 1].

În concluzie,

$$\det(A - \lambda \cdot I_h) = (-1)^{m_0} \cdot (\lambda - \lambda_0)^{m_0}, \qquad \lambda \in \mathbb{K}, \tag{2.25}$$

deci am obţinut următoarea formulă pentru polinomul caracteristic al operatorului T, şi anume

$$p_T(\lambda) = (-1)^{m_0}(\lambda - \lambda_0)^{m_0} \cdot \det(B - \lambda \cdot I_{m-h}). \tag{2.26}$$

Expresia (2.25) ne arată că gradul polinomului $\det(A - \lambda \cdot I_h)$ — adică, h, dimensiunea subspaţiului V peste $\mathbb{K}$ — este egal cu m_0, multiplicitatea algebrică a valorii proprii λ_0. Cu alte cuvinte,

$$\dim_{\mathbb{K}}\left(\bigcup_{i \geq 0} \mathrm{Ker}\ (T - \lambda_0 \cdot I)^i\right) = m_0. \tag{2.27}$$

Vezi [10, pag. 333].

În sfârşit, cum suma dimensiunilor celor două subspaţii, $\dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W$, este dimensiunea spaţiului E, adică m, dacă $W \neq \{0_E\}$, adică $\dim_{\mathbb{K}} W \geq 1$, deducem că

---

[15] Vezi [10, pag. 332, ecuaţia (2)].

[16] Aici, impunem ca $x_{h+1} = \cdots = x_m = 0$.

$\dim_{\mathbb{K}} V = m_0 \leq m-1$. Dat fiind că gradul polinomului $p_T(\lambda)$ este m, rezultă că *factorul* $\det(B-\lambda\cdot I_{m-h})$ *din (2.26) este un polinom cu gradul cel puţin* 1. Numărul (complex) λ_1 căutat este o soluţie a ecuaţiei algebrice $\det(B-\lambda\cdot I_{m-h})=0$. □

Vom lucra, până la sfârşitul secţiunii de faţă, cu scalari din corpul

$$\mathbb{K}=\mathbb{C} \tag{2.28}$$

şi vom aplica în mod inductiv Lema 2.12.

În contextul Teoremei 2.1, dacă am fixat baza $\mathscr{S}_1$ a spaţiului ambient E, atunci operatorul $T_2 : W \to W$ este reprezentat de matricea

$$\mathbb{T}_W = B, \qquad B \in \mathscr{M}_{m-m_0}(\mathbb{K}),$$

iar prelungirea cu zero în E a operatorului T_2, pe care o notăm cu $\overline{T}_2 : E \to E$, are matricea

$$\mathbb{T}_2 = \begin{pmatrix} O_{m_0} & O_{m_0,m-m_0} \\ O_{m-m_0,m_0} & B \end{pmatrix}. \tag{2.29}$$

Polinomul caracteristic $p_T(\lambda)$ se scrie în mod unic sub forma[17]

$$p_T(\lambda) = (-1)^m \cdot (\lambda-\lambda_0)^{m_0} \cdot (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_s)^{m_s}, \quad s \in \mathbb{N}^*, \tag{2.30}$$

unde numerele *complexe* $\{\lambda_0,\ldots,\lambda_s\}$ desemnează valorile proprii distincte ale operatorului liniar T iar numerele $\{m_0,\ldots,m_s\} \subset \mathbb{N}^*$ sunt multiplicităţile algebrice ale acestor valori proprii. Evident, $\sum_{i=0}^{s} m_i = m$. Vezi [10, pag. 330].

Reprezentarea (2.26) a polinomului $p_T(\lambda)$ ne conduce la următoarea expresie a polinomului caracteristic $p_{T_2}(\lambda)$ al operatorului liniar $T_2 : W \to W$. Adică,

$$p_{T_2}(\lambda) = (-1)^{m-m_0} \cdot (\lambda-\lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda-\lambda_s)^{m_s}.$$

Aplicând Lema 2.12 operatorului[18] $T_2 : W \to W$, obţinem relaţiile omoloage celor care au caracterizat operatorul T:

$$W = V_1 \oplus W_1, \qquad T_2 = T_2^1 \oplus T_2^2,$$

unde

$$V_1 = \bigcup_{k\geq 0} \text{Ker } (T_2-\lambda_1\cdot I)^k, \qquad W_1 = \bigcap_{k\geq 0} \text{Im } (T_2-\lambda_1\cdot I)^k.$$

[17] Atenţie, în [10, pag. 110] se foloseşte ca polinom caracteristic mărimea $(-1)^m \cdot p_T(\lambda)$.

[18] Atenţie, operatorul $\overline{T}_2$ admite întotdeauna şi *valoarea proprie* 0, a cărei multiplicitate algebrică este *cel puţin* m_0. Cum operatorul T ar putea avea şi el valoarea proprie 0, dacă i-am aplica Lema 2.12 operatorului $\overline{T}_2$, atunci argumentaţia s-ar complica excesiv.

Aici, $I : W \to W$ este operatorul-identitate din $L(W,W)$, respectiv[19] $T_2^1 = T_2|_{V_1} = T|_{V_1}$ şi $T_2^2 = T_2|_{W_1} = T|_{W_1}$. În plus, dacă $\overline{v}_1 \in E$ este un eigenvector (generalizat) corespunzând valorii proprii λ_1 a operatorului liniar $T : E \to E$, atunci avem $\overline{v}_1 \in W$ — am văzut că subspaţiul V conţine doar eigenvectori (generalizaţi) ai valorii proprii λ_0 —. Ceea ce înseamnă că [10, pag. 332, ecuaţia (1)]

$$\mathrm{Ker}\,(T - \lambda_1 \cdot I)^i = \mathrm{Ker}\,(T_2 - \lambda_1 \cdot I)^i, \qquad i \geq 1, \tag{2.31}$$

respectiv

$$V_1 = \bigcup_{k \geq 0} \mathrm{Ker}\,(T - \lambda_1 \cdot I)^k.$$

Pentru a ne convinge de acest fapt, nu avem decât să analizăm sistemul algebric asociat membrului stâng al egalităţii (2.31). Mai precis, fiind dată ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} (A - \lambda_1 \cdot I_{m_0})^i & O_{m_0,m-m_0} \\ O_{m-m_0,m_0} & (B - \lambda_1 \cdot I_{m-m_0})^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_0} \\ x_{m_0+1} \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m,$$

existenţa unui set $\{x_1, \ldots, x_{m_0}\}$ *de numere complexe care să conţină* măcar un număr nenul[20] *va însemna că sistemul algebric omogen*

$$(A - \lambda_1 \cdot I_{m_0})^i \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m_0}$$

admite soluţii nenule. Astfel, ajungem la $\det(A - \lambda_1 \cdot I_{m_0}) = 0$. Adică, matricea A ar trebui să aibă valoarea proprie $\lambda_1 \neq \lambda_0$, ceea ce contrazice demonstraţia Lemei anterioare!

Mai departe, matricea B are forma

$$B = \begin{pmatrix} A_1 & O_{h_1,m-m_0-h_1} \\ O_{m-m_0-h_1,h_1} & B_1 \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

unde $A_1 \in \mathscr{M}_{h_1}(\mathbb{K})$, $B_1 \in \mathscr{M}_{m-m_0-h_1}(\mathbb{K})$.

Inserăm expresia matricei B din (2.32) în (2.29) şi ajungem la matricea de reprezentare a (prelungirii cu zero a) operatorului $T_2^1 : E \to E$, şi anume

---

[19] Evident, $T_2|_{V_1} = (T|_W)|_{V_1} = T|_{V_1}$ pentru că $V_1 \subseteq W$.

[20] Adică, de exemplu, $x_{m_0} \neq 0$ şi $\overline{v}_1 = x_{m_0} \cdot \overline{e}_{m_0} + \left(\sum_{i=m_0+1}^{m} x_i \cdot \overline{e}_i \right) \in K_i(T - \lambda_1 \cdot I) \backslash W$.

$$\mathbb{T}_2^1 = \begin{pmatrix} O_{m_0} & O_{m_0,m-m_0} \\ O_{m-m_0,m_0} & \begin{pmatrix} A_1 & O_{h_1,m-m_0-h_1} \\ O_{m-m_0-h_1,h_1} & O_{m-m_0-h_1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Este clar că avem, în fapt, următoarea matrice:

$$\mathbb{T}_2^1 = \begin{pmatrix} O_{m_0} & O_{m_0,h_1} & O_{m_0,m-m_0-h_1} \\ O_{h_1,m_0} & A_1 & O_{h_1,m-m_0-h_1} \\ O_{m-m_0-h_1,m_0} & O_{m-m_0-h_1,h_1} & O_{m-m_0-h_1} \end{pmatrix}.$$

În mod analog,

$$\mathbb{T}_2^2 = \begin{pmatrix} O_{m_0} & O_{m_0,h_1} & O_{m_0,m-m_0-h_1} \\ O_{h_1,m_0} & O_{h_1} & O_{h_1,m-m_0-h_1} \\ O_{m-m_0-h_1,m_0} & O_{m-m_0-h_1,h_1} & B_1 \end{pmatrix}.$$

Aşadar, am dedus că[21] $E = V_0 \oplus V_1 \oplus W_1$ şi $T = T_0 \oplus T_1 \oplus T_2$, unde

$$V_i = \bigcup_{k \geq 0} \text{Ker } (T - \lambda_i \cdot I)^k, \quad \dim_{\mathbb{K}} V_i = m_i, \quad T_i = T|_{V_i}\,, \qquad i \in \{0, 1\},$$

şi

$$T_2 = T|_{W_1}\,.$$

Teorema 2.2. *Fiind date spaţiul liniar complex $E \subseteq \mathbb{C}^n$, de dimensiune $m \leq n$, şi operatorul $\mathbb{C}$-liniar $T : E \to E$, are loc descompunerea*

$$T = \mathscr{D} + \mathscr{N}\,,$$

unde operatorul $\mathbb{C}$-liniar $\mathscr{N} : E \to E$ este nilpotent iar operatorul $\mathbb{C}$-liniar $\mathscr{D} : E \to E$ admite o matrice-diagonală[22] de reprezentare.

Demonstraţie. Ne găsim în contextul Lemei 2.12 şi al cerinţei (2.28). Există, aşadar, subspaţiile liniare complexe $V_i \subseteq E$, unde

$$V_i = \bigcup_{j \geq 0} \text{Ker } (T - \lambda_i \cdot I)^j\,, \qquad \dim_{\mathbb{C}} V_i = m_i \,(\text{vezi } (2.30))$$

pentru $0 \leq i \leq s$, şi[23] [10, pag. 110, Theorem 1]

$$E = V_0 \oplus V_1 \oplus \cdots \oplus V_s. \tag{2.33}$$

[21] Aici, $V_0 = V$.

[22] Matricea $M = (m_{vw})_{v,w} \in \mathscr{M}_q(\mathbb{K})$ este *matrice-diagonală* dacă singurele elemente (intrări) nenule ale sale se găsesc pe diagonala principală a matricei. Adică, $m_{vw} = 0$ pentru orice $v \neq w \in \overline{1,q}$. Prin extensie de limbaj, o matrice definită *pe blocuri* este matrice-diagonală dacă numai blocurile de pe diagonala principală pot fi nenule.

[23] La ultima aplicare a Lemei 2.12, obţinem $W = W_s = \{0_E\}$.

Matricea de reprezentare a operatorului liniar T în baza $\mathscr{S}_1$ are forma

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} A_0 & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & A_s \end{pmatrix}, \quad A_i \in \mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{C}).$$

Aici, conform (2.21),

$$A_i = \lambda_i \cdot I_{m_i} + M_i, \qquad M_i \in \mathscr{M}_{m_i}(\mathbb{C}), \tag{2.34}$$

şi există numărul $p_i \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că

$$M_i^{p_i} = O_{m_i}. \tag{2.35}$$

Introducem matricele

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_0 & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & D_s \end{pmatrix}, \qquad D_i = \lambda_i \cdot I_{m_i}, \qquad i \in \overline{0,s},$$

şi

$$\mathbb{N} = \begin{pmatrix} M_0 & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & M_s \end{pmatrix}.$$

Îl notăm cu p pe cel mai mare dintre numerele $\{p_0, \ldots, p_s\}$ [10, pag. 112]. Atunci,

$$\begin{aligned} \mathbb{N}^p &= \begin{pmatrix} M_0^p & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & M_s^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0^{p_0} \cdot M_0^{p-p_0} & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & M_s^{p_s} \cdot M_s^{p-p_s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O_{m_0} & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & O_{m_s} \end{pmatrix} = O_m. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Via (1.9), definim operatorul $\mathscr{D}$ de matrice $\mathbb{D}$ şi operatorul $\mathscr{N}$ de matrice $\mathbb{N}$. □

Un operator $\mathbb{K}$-liniar $\mathscr{D} : E \to E$ care admite o matrice-diagonală de reprezentare este numit *diagonalizabil* [10, pag. 45] atunci când $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ şi *semi-simplu* pentru $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ [10, pag. 63]. În cazul particular când $s = 0$, deci $\mathbb{D} = D_0 = \lambda_0 \cdot I_{m_0} = \lambda_0 \cdot I_m$, operatorul poartă numele de *operator diagonal* [10, pag. 46]. Tot aici se observă că, pentru orice matrice $\mathbb{W} \sim \mathbb{D}$, avem $\mathbb{W} = \lambda_0 \cdot I_m = \mathbb{D}$ [10, pag. 111].

Lema 2.13. *În contextul Teoremei 2.2, avem*

$$\mathscr{D}\circ\mathscr{N}=\mathscr{N}\circ\mathscr{D}.$$

Demonstraţie. La fel ca în (1.16), operatorul $\mathscr{D}\circ\mathscr{N}$ este reprezentat de matricea $\mathbb{D}\mathbb{N}$ în baza $\mathscr{S}_1$ a spaţiului E iar operatorul $\mathscr{N}\circ\mathscr{D}$ de matricea $\mathbb{N}\mathbb{D}$.

Mai departe,

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\mathbb{N} &= \begin{pmatrix} D_0M_0 & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & D_sM_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\lambda_0 I_{m_0}\right)M_0 & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & \left(\lambda_s I_{m_s}\right)M_s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} M_0\left(\lambda_0 I_{m_0}\right) & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & M_s\left(\lambda_s I_{m_s}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0D_0 & \cdots & O_{m_0,m_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_{m_s,m_0} & \cdots & M_sD_s \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{N}\mathbb{D}.
\end{aligned}$$

□

Lema 2.14. ([10, pag. 120, Problema 8]) *În contextul Teoremei 2.2, au loc inegalităţile*

$$p_i \le m_i, \qquad i\in\overline{0,s}, \tag{2.37}$$

unde numerele p_i au fost definite în (2.35). Adică, matricele M_i din (2.34) îndeplinesc condiţiile

$$M_i^{m_i}=O_{m_i} \quad \textit{pentru orice } i. \tag{2.38}$$

Demonstraţie. Ştim că $V_i=K_{p_i}(T-\lambda_i\cdot I)$. Incluziunile stricte (2.11), şi anume

$$\{0_E\}\subsetneq \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_i\cdot I)\subsetneq \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_i\cdot I)^2\subsetneq\cdots\subsetneq \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_i\cdot I)^{p_i}=V_i,$$

ne permit să alegem vectorii $\overline{x}_1\in \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_i\cdot I)\backslash\{0_E\}$, $\overline{x}_2\in \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_i\cdot I)^2\backslash \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_i\cdot I)$, $\ldots$, $\overline{x}_{p_i}\in \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_i\cdot I)^{p_i}\backslash \mathrm{Ker}\,(T-\lambda_i\cdot I)^{p_i-1}$. Setul $\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_{p_i}\}\subset V_i$ este liniar independent peste $\mathbb{K}$. Cum $\dim_{\mathbb{K}}V_i=m_i$, ajungem la (2.37). În sfârşit,

$$M_i^{m_i}=M_i^{p_i}\cdot M_i^{m_i-p_i}=O_{m_i},$$

unde $0\le i\le s$. □

Via (2.33), (2.36), (2.37), remarcăm că

$$p=\max\{p_0,\ldots,p_s\}\le\max\{m_0,\ldots,m_s\}\le m,$$

respectiv

$$\mathbb{N}^m=O_m. \tag{2.39}$$

Lema 2.15. ([10, pag. 121, problema 17]) *În contextul Lemei 2.5, fie $P_i : E \to E$, unde $1 \leq i \leq 3$, operatori $\mathbb{K}$-liniari astfel încât P_1 să fie diagonalizabil, P_2 să fie nilpotent şi P_3 să fie diagonal. Atunci, dacă*

$$P_i(V) \subseteq V, \quad P_i(W) \subseteq W \quad \textit{pentru orice } i,$$

$P_1|_V$ este diagonalizabil, $P_2|_V$ este nilpotent şi $P_3|_V$ este diagonal.

Demonstraţie. Dacă operatorul $\mathbb{K}$-liniar $T : E \to E$ invariază subspaţiile V şi W, atunci există baza $\mathscr{S}_1$ a spaţiului E pentru care $V = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_h\}$, $W = \text{Span}_{\mathbb{K}}\{\overline{e}_{h+1}, \ldots, \overline{e}_m\}$ şi matricea de reprezentare are forma

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} A & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B \end{pmatrix}, \quad A \in \mathscr{M}_h(\mathbb{K}), B \in \mathscr{M}_{m-h}(\mathbb{K}).$$

De aici, evident,

$$\mathbb{T}^j = \begin{pmatrix} A^j & O_{h,m-h} \\ O_{m-h,h} & B^j \end{pmatrix}, \qquad j \in \mathbb{N}^*.$$

Matricea A îl reprezintă pe $T|_V$ în baza $(\mathscr{S}_1)_V = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_h\}$.
Dacă $\mathbb{T}^p = O_m$ pentru un anumit $p \in \mathbb{N}^*$ — adică, $T = P_2$ —, atunci $A^p = O_h$.
Dacă există setul de numere $\{d_1, \ldots, d_m\} \subset \mathbb{K}$ pentru care

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{m-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{pmatrix},$$

deci $T = P_1$, atunci

$$A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{h-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_h \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

În sfârşit, dacă $T = P_3$, există $\lambda \in \mathbb{K}$ cu proprietatea că $T = \lambda \cdot I$, unde $I \in L(E,E)$ este operatorul-identitate. Atunci, evident $T|_V = \lambda \cdot I|_V$.

Facem observaţia că

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O_{m-h,h} & B \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & C_k \\ O_{m-h,h} & B^k \end{pmatrix}, \qquad k \in \mathbb{N}^*,$$

unde $A \in \mathscr{M}_h(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{m-h}(\mathbb{K})$, $C_k \in \mathscr{M}_{h,m-h}(\mathbb{K})$, deci condiţia $P_i(W) \subseteq W$ nu este necesară aici — am introdus-o deoarece ea intervine în demonstraţia Lemei 2.16 —. $\square$

Lema 2.16. ([10, pag. 333, Theorem]) *În contextul Teoremei 2.2, există o singură descompunere a operatorului T sub forma*

$$T = P_1 + P_2,$$

unde $P_1 : E \to E$ este un operator $\mathbb{K}$-liniar diagonalizabil iar $P_2 : E \to E$ este un operator $\mathbb{K}$-liniar nilpotent, astfel încât P_1 să comute cu P_2.

Demonstraţie. Existenţa unei asemenea descompuneri este dată de Teorema 2.2 şi de Lema 2.13.

Deoarece P_1 şi P_2 comută, au loc relaţiile

$$P_1 \circ T = P_1 \circ (P_1 + P_2) = P_1^2 + P_1 \circ P_2 = P_1^2 + P_2 \circ P_1 = (P_1 + P_2) \circ P_1 = T \circ P_1.$$

În mod analog, $P_2 \circ T = T \circ P_2$, respectiv $T \circ \mathscr{D} = \mathscr{D} \circ T$ şi $T \circ \mathscr{N} = \mathscr{N} \circ T$.

Lema 2.10 arată că *fiecare dintre $\mathbb{K}$-subspaţiile din descompunerea (2.33) este invariat de operatorii P_1, P_2, $\mathscr{D}$, $\mathscr{N}$.*

Introducem operatorii

$$P_1^i = P_1|_{V_i} : V_i \to V_i, \quad P_2^i = P_2|_{V_i} : V_i \to V_i$$

şi

$$\mathscr{D}_i = \mathscr{D}|_{V_i} = \lambda_i \cdot I : V_i \to V_i, \quad \mathscr{N}_i = \mathscr{N}|_{V_i} : V_i \to V_i, \tag{2.41}$$

unde $0 \le i \le s$. Evident, operatorii $\mathscr{D}_i$, $\mathscr{N}_i$ sunt reprezentaţi — în submulţimea din baza $\mathscr{S}_1$ a spaţiului E care este bază în V_i — de matricele $\lambda_i \cdot I_{m_i}$ şi M_i, cu $M_i^{m_i} = O_{m_i}$, conform (2.38).

Afirmăm că *operatorii P_2^i şi $\mathscr{N}_i$ comută*. Într-adevăr, conform (2.44),

$$\begin{aligned} P_2^i \circ \mathscr{N}_i &= P_2^i \circ (T|_{V_i} - \lambda_i \cdot I) = (P_2 \circ T)|_{V_i} - \lambda_i \cdot P_2^i \\ &= (T \circ P_2)|_{V_i} - \lambda_i \cdot P_2^i = (T|_{V_i} - \lambda_i \cdot I) \circ P_2^i \\ &= \mathscr{N}_i \circ P_2^i, \qquad i \in \overline{0,s}. \end{aligned}$$

Comutarea operatorilor P_2^i şi $\mathscr{N}_i$ implică, evident, comutarea matricelor lor de reprezentare, $(\mathbb{P}_2)_{V_i}$ şi M_i. Din ipoteză[24], există numerele $q_i \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $((\mathbb{P}_2)_{V_i})^{q_i} = O_{m_i}$ pentru orice i. Atunci, pentru $t = 2 \cdot \max\{q_i, m_i\}$, avem[25] — via binomul lui Newton —

[24] Vezi Lema 2.15, cazul operatorului P_2.

[25] Vezi pagina 106, nota de subsol, pentru notaţia $\binom{k}{t}$.

$$[(\mathbb{P}_2)_{V_i} - M_i]^t = \sum_{k=0}^{t} (-1)^{t-k} \binom{k}{t} \cdot [(\mathbb{P}_2)_{V_i}]^k \cdot M_i^{t-k}. \tag{2.42}$$

Inegalitatea

$$\max\{k, t-k\} \geq \frac{k+(t-k)}{2} = \frac{t}{2} \geq \max\{q_i, m_i\}$$

arată că fiecare din termenii sumei (2.42) are cel puţin unul dintre factorii $[(\mathbb{P}_2)_{V_i}]^k$, M_i^{t-k} egal cu O_{m_i}. În consecinţă,

$$[(\mathbb{P}_2)_{V_i} - M_i]^t = O_{m_i}, \tag{2.43}$$

adică *operatorii* $\{P_2^i - \mathscr{N}_i | 0 \leq i \leq s\}$ *sunt nilpotenţi.*

Plecând de la egalitatea dublă

$$T|_{V_i} = P_1^i + P_2^i = \mathscr{D}_i + \mathscr{N}_i, \tag{2.44}$$

deducem că *operatorii* $\left(P_1^i - \mathscr{D}_i\right)_{0 \leq i \leq s}$ *sunt nilpotenţi.*

Fixăm $i \in \overline{0,s}$. Operatorul P_1^i este diagonalizabil[26] iar operatorul $\mathscr{D}_i$ este operator-diagonal, deci matricea de reprezentare a operatorului $P_1^i - \mathscr{D}_i$ are forma — vezi (2.40) —

$$F_i = \begin{pmatrix} d_1^i - \lambda_i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^i - \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{m_i-1}^i - \lambda_i & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{m_i}^i - \lambda_i \end{pmatrix}, \qquad d_j^i \in \mathbb{K}.$$

Conform (2.43),

$$F_i^t = \begin{pmatrix} \left(d_1^i - \lambda_i\right)^t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \left(d_2^i - \lambda_i\right)^t & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \left(d_{m_i-1}^i - \lambda_i\right)^t & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \left(d_{m_i}^i - \lambda_i\right)^t \end{pmatrix} = O_{m_i},$$

de unde $d_j^i = \lambda_i$ pentru orice $1 \leq j \leq m_i$, adică $P_1^i = \mathscr{D}_i$.

Din (2.44) rezultă că $P_2^i = \mathscr{N}_i$, unde $i \in \overline{0,s}$. $\square$

[26] Vezi Lema 2.15, cazul operatorului P_1.

Capitolul 3
Forma canonică a matricelor pătrate cu elemente numerice

3.1 Cazul operatorilor nilpotenţi

Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ un spaţiu liniar m-dimensional peste corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Aici, ca şi până acum, $m \leq n$.

Fie $\overline{e} \in E \backslash \{0_E\}$ şi operatorul $\mathbb{K}$-liniar $T : E \to E$. Introducem mulţimea[1]

$$Z(\overline{e}, T) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \left\{ T^i(\overline{e}) | i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Elementele sale sunt combinaţii liniare cu *număr finit de termeni nenuli* ale vectorilor din familia $\{\overline{e}, T(\overline{e}), T^2(\overline{e}), \ldots\}$.

Observăm că

$$Z(\overline{e}, T) = \left\{ \sum_{i=0}^{h} \alpha_i \cdot T^i(\overline{e}) | \alpha_i \in \mathbb{K}, h \in \mathbb{N} \right\}.$$

Într-adevăr, fixând $\overline{x} \in Z(\overline{e}, T)$, cu

$$\overline{x} = \sum_{j=0}^{r} \alpha_{h_j} \cdot T^{h_j}(\overline{e}), \qquad r, h_j \in \mathbb{N},$$

introducem numerele $\alpha_i = \alpha_{h_j}$ pentru $i = h_j$, $j \in \overline{0, r}$, respectiv $\alpha_i = 0$ pentru $i \notin \{h_1, \ldots, h_r\}$ şi deducem că

$$\overline{x} = \sum_{i=0}^{h} \alpha_i \cdot T^i(\overline{e}), \qquad h = \max\{h_1, \ldots, h_r\}. \tag{3.1}$$

Presupunem că operatorul T este nilpotent. Astfel, există $k \in \mathbb{N}$ pentru care

$$T^k = O, \tag{3.2}$$

[1] Reamintesc că $T^0 = I$, operatorul-identitate din $L(E, E)$.

unde $O : E \to E$ desemnează *operatorul-nul*[2].

Lema 3.1. *Există numărul natural $h < k$* — vezi (3.2) — *astfel încât vectorii din setul $\{\overline{e}, T(\overline{e}), T^2(\overline{e}), \ldots, T^h(\overline{e})\}$ să fie liniar independenţi peste corpul $\mathbb{K}$.*

Demonstraţie. Cum $\overline{e} \neq 0_E$, fie h, unde $0 \leq h \leq k-1$, cel mai mare număr natural[3] pentru care *niciunul dintre vectorii din familia $\{\overline{e}, T(\overline{e}), T^2(\overline{e}), \ldots, T^h(\overline{e})\}$ să nu fie nul*. Evident, $T^{h+1}(\overline{e}) = 0_E$, de unde

$$T^q(\overline{e}) = T^{q-h-1}(T^{h+1}(\overline{e})) = T^{q-h-1}(0_E) = 0_E \tag{3.3}$$

pentru orice $q \geq h+1$.

De asemeni, *vectorii din setul $\{\overline{e}, T(\overline{e}), T^2(\overline{e}), \ldots, T^h(\overline{e})\}$ sunt diferiţi unul de celălalt*. Într-adevăr, dacă ar exista numerele $p \geq 0$, $q \geq 1$ astfel ca $p+q \leq h$ şi $T^p(\overline{e}) = T^{p+q}(\overline{e})$, atunci

$$\begin{aligned} T^{h+1-q}(\overline{e}) &= T^{h+1-p-q}\left(T^p(\overline{e})\right) = T^{h+1-p-q}\left(T^{p+q}(\overline{e})\right) \\ &= T^{h+1}(\overline{e}) = 0_E, \end{aligned} \tag{3.4}$$

ceea ce contrazice definiţia numărului h.

Afirmăm că *vectorii $\{\overline{e}, T(\overline{e}), T^2(\overline{e}), \ldots, T^h(\overline{e})\}$ sunt liniari independenţi peste corpul* $\mathbb{K}$. Într-adevăr, fiind dată relaţia

$$\sum_{i=0}^{h} \alpha_i \cdot T^i(\overline{e}) = 0_E, \quad \text{unde } \alpha_i \in \mathbb{K}, \sum_{i=0}^{h} \alpha_i^2 > 0,$$

să presupunem că $\alpha_r \in \mathbb{K}$ este coeficientul *nenul* cu cel mai mic index. Deci

$$\sum_{i=r}^{h} \alpha_i \cdot T^i(\overline{e}) = 0_E,$$

respectiv, via (3.3),

$$0_E = T^{h-r}\left(\sum_{i=r}^{h} \alpha_i \cdot T^i(\overline{e})\right) = \alpha_r \cdot T^h(\overline{e}).$$

Am ajuns la o contradicţie: $\alpha_r = 0$.

În plus, avem — conform (3.1) —

$$Z(\overline{e}, T) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\left\{\overline{e}, \ldots, T^h(\overline{e})\right\},$$

adică *setul*

$$\{\overline{e}, \ldots, T^h(\overline{e})\} \tag{3.5}$$

[2] Adică, $T^k(\overline{e}) = 0_E$ pentru orice $\overline{e} \in E$.

[3] Conform [10, pag. 334], cantitatea $h+1$ se notează cu *nil*: $\mathrm{nil}(\overline{e}, T)$.

este bază a subspaţiului $Z(\overline{e},T)$. □

Lema 3.2. *În contextul Lemei 3.1, au loc relaţiile*

$$T(Z(\overline{e},T)) = Z(T(\overline{e}),T) \subseteq Z(\overline{e},T) \tag{3.6}$$

şi

$$\mathrm{Ker}\,\left(T\big|_{Z(\overline{e},T)}\right) = \mathbb{K}T^{\mathrm{nil}(\overline{e},T)-1}(\overline{e}). \tag{3.7}$$

Demonstraţie. Fie $\overline{x} = \sum\limits_{i=0}^{h} \alpha_i \cdot T^i(\overline{e}) \in Z(\overline{e},T)$, unde $\alpha_i \in \mathbb{K}$ şi $0 \le i \le h \le k-1$. Atunci,

$$T(\overline{x}) = \sum_{i=0}^{h} \alpha_i \cdot T(T^i(\overline{e})) = \sum_{i=0}^{h} \alpha_i \cdot T^i(T(\overline{e})) \in Z(T(\overline{e}),T),$$

adică $T(Z(\overline{e},T)) \subseteq Z(T(\overline{e}),T)$.

Reciproc, fie $\overline{y} = \sum\limits_{i=0}^{h} \alpha_i \cdot T^i(T(\overline{e})) \in Z(T(\overline{e}),T)$. Observăm că

$$\overline{y} = \sum_{i=0}^{h} \alpha_i \cdot T(T^i(\overline{e})) = T(\overline{x}) \in T(Z(\overline{e},T)).$$

Fie $h = \mathrm{nil}(\overline{e},T) - 1$. Pentru a stabili formula (3.7), observăm că relaţiile — dacă $h \ge 1$ —

$$\begin{aligned} 0_E &= T(\overline{x}) = T\left(\sum_{i=0}^{h} \alpha_i \cdot T^i(\overline{e})\right) \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} \alpha_i \cdot T^{i+1}(\overline{e}) + \alpha_h \cdot T^{h+1}(\overline{e}) \\ &= \sum_{i=0}^{h-1} \alpha_i \cdot T^{i+1}(\overline{e}), \quad \alpha_i \in \mathbb{K}, \end{aligned}$$

implică $\alpha_i = 0$ pentru orice $0 \le i \le h-1$. □

Lema 3.3. *Fie* $\overline{x}, \overline{y} \in E$ *astfel încât* $\{0_E\} \subsetneq Z(\overline{x},T) \cap Z(\overline{y},T)$. *Atunci, există numerele* r, $s \ge 0$ *pentru care*

$$\{T^i(\overline{x}) | i \ge r\} \subset Z(\overline{y},T), \quad \{T^j(\overline{y}) | j \ge s\} \subset Z(\overline{x},T).$$

Demonstraţie. Introducem numerele $h_1 = \mathrm{nil}(\overline{x},T) - 1$ şi $h_2 = \mathrm{nil}(\overline{y},T) - 1$.

Fie $\overline{u} \in Z(\overline{x},T) \cap Z(\overline{y},T) \setminus \{0_E\}$, adică

$$\overline{u} = \sum_{i=0}^{h_1} \alpha_i \cdot T^i(\overline{x}) = \sum_{j=0}^{h_2} \beta_j \cdot T^j(\overline{y}),$$

unde $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}$. În plus,

$$\alpha_0 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0, \alpha_r \neq 0, \quad \beta_0 = \cdots = \beta_{s-1} = 0, \beta_s \neq 0.$$

Atunci,

$$\begin{aligned} T^{h_1-r}(\overline{u}) &= \alpha_r \cdot T^{h_1}(\overline{x}) + \alpha_{r+1} \cdot T^{h_1+1}(\overline{x}) + \cdots \\ &= \alpha_r \cdot T^{h_1}(\overline{x}) \\ &= \sum_{j=s}^{h_2} \beta_j \cdot T^{j+h_1-r}(\overline{y}), \end{aligned}$$

de unde rezultă că $T^{h_1}(\overline{x}) = \sum\limits_{j=s}^{h_2} \frac{\beta_j}{\alpha_r} \cdot T^{j+h_1-r}(\overline{y}) \in Z(\overline{y}, T)$.

Apoi — dacă $h_1 \geq r+1$ —,

$$\begin{aligned} T^{h_1-r-1}(\overline{u}) &= \alpha_r \cdot T^{h_1-1}(\overline{x}) + \alpha_{r+1} \cdot T^{h_1}(\overline{x}) + \alpha_{r+2} \cdot T^{h_1+1}(\overline{x}) + \cdots \\ &= \alpha_r \cdot T^{h_1-1}(\overline{x}) + \alpha_{r+1} \cdot T^{h_1}(\overline{x}) \\ &= \sum_{j=s}^{h_2} \beta_j \cdot T^{j+h_1-r-1}(\overline{y}), \end{aligned}$$

respectiv

$$T^{h_1-1}(\overline{x}) = \sum_{j=s}^{h_2} \frac{\beta_j}{\alpha_r} \cdot T^{j+h_1-r-1}(\overline{y}) - \frac{\alpha_{r+1}}{\alpha_r} \cdot T^{h_1}(\overline{x}) \in Z(\overline{y}, T).$$

Ajungem la

$$T^r(\overline{x}) = \sum_{j=s}^{h_2} \frac{\beta_j}{\alpha_r} \cdot T^j(\overline{y}) - \sum_{i=r+1}^{h_1} \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \cdot T^i(\overline{x}) \in Z(\overline{y}, T),$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exemplul 3.1. În contextul Lemei 3.3, observăm că $Z(\overline{x}, T) \cap Z(\overline{y}, T) \subseteq Z(\overline{y}, T)$ este un $\mathbb{K}$-subspaţiu liniar al spaţiului $Z(\overline{y}, T)$. Am stabilit că acest subspaţiu conţine cel puţin un element al bazei $\left\{\overline{y}, \ldots, T^{h_2}(\overline{y})\right\}$ a spaţiului ambient $Z(\overline{y}, T)$. Afirmăm că, *fiind date $\mathbb{K}$-spaţiul liniar E, o bază a sa $\mathscr{S}$ şi subspaţiul propriu $V \subset E$, unde $V \neq \{0_E\}$, este posibil ca $V \cap \mathscr{S} = \emptyset$.*

Într-adevăr, fie $E = \mathbb{R}^7$ — aici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ —, baza canonică $\mathscr{S} = \{\overline{i}_1, \ldots, \overline{i}_7\}$ şi

$$V = \mathbb{R}\left(\overline{i}_1 + \overline{i}_2\right) \oplus \mathbb{R}\left(\overline{i}_3 + \overline{i}_4\right).$$

Atunci,

$$V \cap \mathscr{S} = \emptyset.$$

Fie operatorul $\mathbb{K}$-liniar $P : E \to E$. Putem construi o bază a spaţiului în care acest operator acţionează, *dacă se cunosc baze din* $\operatorname{Ker} P$ *şi* $\operatorname{Im} P$, după cum urmează: fiind date baza $\mathscr{S}_3 = \{\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_t\}$ a spaţiului $\operatorname{Im} P$ şi baza $\mathscr{S}_4 = \{\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_s\}$ a spaţiului $\operatorname{Ker} P$, selectăm familia de vectori $\mathscr{S}_5 = \{\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_t\}$ pentru care $\overline{z}_i \in P^{-1}(\overline{y}_i)$, unde $i \in \overline{1,t}$. Atunci, *setul*

$$\mathscr{S}_6 = \{\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_t, \overline{x}_1, \dots, \overline{x}_s\} \tag{3.8}$$

este bază a spaţiului ambient E, vezi [10, pag. 327, Proposition 3].

Ca să ne convingem de acest fapt, arătăm că *vectorii din $\mathscr{S}_6$ sunt liniar independenţi.* Fie scalarii α_i, $\beta_j \in \mathbb{K}$, unde $i \in \overline{1,t}$, $j \in \overline{1,s}$, pentru care

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \cdot \overline{z}_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \cdot \overline{x}_j = 0_E. \tag{3.9}$$

Aplicând operatorul P relaţiei (3.9), ajungem la — $\mathscr{S}_4 \subset \operatorname{Ker} P$ şi $\mathscr{S}_3$ este liniar independent —

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \cdot P(\overline{z}_i) = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \cdot \overline{y}_i = 0_E,$$

de unde $\alpha_i = 0$ pentru orice $1 \le i \le t$. Relaţia (3.9) devine — $\mathscr{S}_4$ este liniar independent —

$$\sum_{j=1}^{s} \beta_j \cdot \overline{x}_j = 0_E,$$

de unde $\beta_j = 0$ pentru orice $1 \le j \le s$.

De asemeni, *vectorii din $\mathscr{S}_6$ alcătuiesc un sistem de generatori ai spaţiului ambient E*. Într-adevăr, fie $\overline{x} \in E$. Atunci, există scalarii $\alpha_i \in \mathbb{K}$, unde $i \in \overline{1,t}$, astfel încât

$$\begin{aligned} P(\overline{x}) &= \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \cdot \overline{y}_i \\ &= \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \cdot P(\overline{z}_i) = P\left(\sum_{i=1}^{t} \alpha_i \cdot \overline{z}_i\right). \end{aligned}$$

Observăm că $\overline{u} = \overline{x} - \sum\limits_{i=1}^{t} \alpha_i \cdot \overline{z}_i \in \operatorname{Ker} P$. Astfel, există scalarii $\beta_j \in \mathbb{K}$, unde $j \in \overline{1,s}$, cu proprietatea că

$$\overline{u} = \sum_{j=1}^{s} \beta_j \cdot \overline{x}_j,$$

respectiv

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{t} \alpha_i \cdot \bar{z}_i + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \cdot \bar{x}_j,$$

ceea ce încheie justificarea.

Dacă înlocuim baza $\mathscr{S}_3$ a spaţiului $\operatorname{Im} P$ cu *sistemul de vectori liniar independenţi* $\mathscr{S}_3 = \{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_t\}$, unde $t \leq \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im} P$, atunci *setul* $\mathscr{S}_6$ *din (3.8) este liniar independent*.

Teorema 3.1. ([10, pag. 335, Proposition]) *În contextul relaţiei (3.2), spaţiul liniar E admite descompunerea*

$$E = Z(\bar{e}_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(\bar{e}_q, T), \tag{3.10}$$

unde $q \geq 1$.

Demonstraţie. Utilizăm inducţia matematică. Astfel, vom verifica existenţa acestui tip de descompunere atunci când $\dim_{\mathbb{K}} E \in \{1, 2\}$, apoi, presupunând că descompunerea poate fi realizată pentru orice spaţiu liniar E cu $\dim_{\mathbb{K}} E \leq m-1$, vom construi o descompunere în cazul $\dim_{\mathbb{K}} E = m$.

Pasul întâi: cazul $\dim_{\mathbb{K}} E = 1$. Fie $\mathscr{S} = \{\bar{e}\}$ o bază a spaţiului E. Atunci, $E = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}\}$, de unde rezultă că $T(\bar{e}) = \lambda \cdot \bar{e} \in E$. Ipoteza (3.2) ne conduce la $\lambda = 0$, astfel că $\operatorname{nil}(\bar{e}, T) = 1$. Avem

$$Z(\bar{e}, T) = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}\{\bar{e}\}, \qquad E = \operatorname{Ker} T.$$

Deci $E = Z(\bar{e}, T)$.

Pasul al doilea: cazul $\dim_{\mathbb{K}} E = 2$. Conform (3.2), $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} T \geq 1$.

Dacă $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} T = 2$, adică $E = \operatorname{Ker} T$, atunci $T = O$ — aşadar, $k = 1$ — şi

$$E = \mathbb{K}\bar{e}_1 \oplus \mathbb{K}\bar{e}_2 = Z(\bar{e}_1, T) \oplus Z(\bar{e}_2, T),$$

unde $\mathscr{S} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ constituie o bază a spaţiului E.

Dacă $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} T = 1$, deci există $\bar{e}_1 \neq 0_E$ astfel încât $\operatorname{Ker} T = \mathbb{K}\bar{e}_1$, atunci există şi $\bar{e}_2 \neq 0_E$ cu $T(\bar{e}_2) \neq 0_E$. Sistemul vectorial $\mathscr{S} = \{\bar{e}_2, T(\bar{e}_2)\} \subset E$ este liniar independent peste corpul $\mathbb{K}$, deci alcătuieşte o bază a spaţiului E. Am obţinut că $E = Z(\bar{e}_2, T)$.

Pasul al treilea: cazul $2 \leq \dim_{\mathbb{K}} E \leq m-1$. Presupunem că se poate realiza descompunerea (3.10).

Pasul al patrulea: cazul $\dim_{\mathbb{K}} E = m$. Operatorul T fiind nilpotent, $\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} T \geq 1$. Cum — vezi (3.8) —

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker} T + \dim_{\mathbb{K}} T(E) = \dim_{\mathbb{K}} E,$$

rezultă că $\dim_{\mathbb{K}} T(E) \leq m-1$.

Conform ipotezei de inducţie, există vectorii $\{\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r\} \subset T(E)$ cu proprietatea că

$$T(E) = Z(\bar{y}_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(\bar{y}_r, T).$$

În particular, sistemul

$$\mathscr{S}_3 = \bigcup_{i=1}^{r} \mathscr{Z}_i, \qquad \mathscr{Z}_i = \left\{ \overline{y}_i, T(\overline{y}_i), \ldots, T^{h_i}(\overline{y}_i) \right\},$$

unde $h_i = \mathrm{nil}(\overline{y}_i, T) - 1$, este o bază a spaţiului liniar $T(E)$.

Pentru a construi sistemul $\mathscr{S}_6$ din (3.8), avem nevoie de un set $\mathscr{S}_5$. Cu acest scop, introducem vectorii $\overline{x}_i \in T^{-1}(\overline{y}_i)$, unde $1 \leq i \leq r$.

Observăm că $T^j(\overline{x}_i) \in T^{-1}(T^j(\overline{y}_i))$ pentru orice $0 \leq j \leq h_i$ şi

$$\mathscr{X}_i = \{\overline{x}_i, T(\overline{x}_i), \ldots, T^{h_i}(\overline{x}_i)\} \subseteq T^{-1}(\mathscr{Z}_i), \tag{3.11}$$

respectiv $\mathrm{nil}(\overline{x}_i, T) = \mathrm{nil}(\overline{y}_i, T) + 1 = h_i + 2$. De asemeni, avem $T^{h_i+1}(\overline{x}_i) = T^{h_i}(\overline{y}_i) \in \mathrm{Ker}\, T$.

Fie $\mathbb{K}$-spaţiile liniare

$$\begin{aligned} Z(\overline{x}_i, T) &= \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \{\overline{x}_i, T(\overline{x}_i), \ldots, T^{h_i}(\overline{x}_i), T^{h_i+1}(\overline{x}_i)\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{K}} \left(\mathscr{X}_i \cup \left\{ T^{h_i+1}(\overline{x}_i) \right\} \right). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Atunci,

$$\left(\mathscr{X}_i \cup \left\{ T^{h_i+1}(\overline{x}_i) \right\} \right) \cap \left(\mathscr{X}_j \cup \left\{ T^{h_j+1}(\overline{x}_j) \right\} \right) = \emptyset, \qquad i \neq j.$$

Într-adevăr, via (3.11) — $\mathscr{Z}_i \cap \mathscr{Z}_j = \emptyset$, $\mathscr{Z}_i \cap \{0_E\} = \emptyset$ —, avem $\mathscr{X}_i \cap \mathscr{X}_j = \emptyset$ pentru orice $i \neq j$. Apoi, cum $\{T^{h_i+1}(\overline{x}_i)\} \subseteq T^{-1}(\{0_E\})$, deducem că $\{T^{h_i+1}(\overline{x}_i)\} \cap \mathscr{X}_j = \emptyset$. Este evident că $\left\{T^{h_i+1}(\overline{x}_i)\right\} \cap \left\{T^{h_j+1}(\overline{x}_j)\right\} = \emptyset$. În caz contrar, am avea $T^{h_i+1}(\overline{x}_i) = T^{h_j+1}(\overline{x}_j)$, ceea ce e echivalent cu $T^{h_i}(\overline{y}_i) = T^{h_j}(\overline{y}_j) \in \mathscr{Z}_i \cap \mathscr{Z}_j$, o contradicţie.

Mai departe, afirmăm că *spaţiile* $(Z(\overline{x}_i, T))_{1 \leq i \leq r}$ *sunt liniar independente peste corpul* $\mathbb{K}$. Pentru a proba aceasta, fie expresia [10, pag. 335] — vezi şi Lema 2.4 —

$$\sum_{i=1}^{r} \overline{u}_i = 0_E, \qquad \overline{u}_i \in Z(\overline{x}_i, T).$$

Aplicând operatorul T, avem — via (3.6) —

$$\sum_{i=1}^{r} \overline{v}_i = 0_E, \qquad \overline{v}_i = T(\overline{u}_i) \in T\left(Z(\overline{x}_i, T)\right) = Z(\overline{y}_i, T).$$

Deoarece spaţiile $(Z(\overline{y}_i, T))_{1 \leq i \leq r}$ sunt liniar independente peste corpul $\mathbb{K}$, obţinem că $\overline{v}_i = 0_E$ pentru orice i. Aşadar, $\overline{u}_i \in \mathrm{Ker}\left(T\big|_{Z(\overline{x}_i, T)}\right)$ şi, pe baza expresiei (3.7),

$$\overline{u}_i \in \mathbb{K}T^{h_i+1}(\overline{x}_i) = \mathbb{K}T^{h_i}(\overline{y}_i) \subseteq Z(\overline{y}_i, T).$$

Am ajuns la $\overline{u}_i = 0_E$, ceea ce dovedeşte afirmaţia făcută anterior.

Putem preciza acum setul $\mathscr{S}_5$. Mai precis,

$$\mathscr{S}_5 = \bigcup_{i=1}^{r} \mathscr{X}_i.$$

Cum spaţiile $(Z(\bar{x}_i, T))_{1 \leq i \leq r}$ sunt liniar independente, *sistemul de vectori*

$$\left\{ T^{h_1+1}(\bar{x}_1), \ldots, T^{h_r+1}(\bar{x}_r) \right\} \subseteq \operatorname{Ker} T$$

este liniar independent peste corpul $\mathbb{K}$. Îl completăm până la o bază $\mathscr{S}_4$ a spaţiului $\operatorname{Ker} T$.

$$\mathscr{S}_4 = \left\{ T^{h_1+1}(\bar{x}_1), \ldots, T^{h_r+1}(\bar{x}_r), \bar{x}_{r+1}, \ldots, \bar{x}_s \right\}. \tag{3.13}$$

Am ajuns la — vezi (3.12) —

$$E = \operatorname{Span}_{\mathbb{K}}(\mathscr{S}_6) = \bigoplus_{\bar{e} \in \mathscr{S}_6} \mathbb{K}\bar{e} \tag{3.14}$$
$$= Z(\bar{x}_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(\bar{x}_r, T) \oplus \mathbb{K}\bar{x}_{r+1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}\bar{x}_s$$
$$= Z(\bar{x}_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(\bar{x}_r, T) \oplus Z(\bar{x}_{r+1}, T) \oplus \cdots \oplus Z(\bar{x}_s, T). \tag{3.15}$$

Demonstraţia s-a încheiat. □

Exemplul 3.2. Descompunerea (3.10) nu este, în general, unică.

Fie $E = \mathbb{R}^8$, unde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, şi baza canonică $\mathscr{S} = \{\bar{i}_1, \ldots, \bar{i}_8\}$. Introducem operatorul $\mathbb{R}$-liniar $T : E \to E$ prin formulele

$$T(\bar{i}_j) = \bar{i}_{j+1},\ j \in \{1,2,5,6\}, \qquad T(\bar{i}_s) = 0_E,\ s \in \{3,4,7,8\}.$$

Atunci, $T^3 = O$.

Deducem că

$$Z(\bar{i}_s, T) = \mathbb{R}\bar{i}_s, \qquad s \in \{3,4,7,8\},$$

şi

$$Z(\bar{i}_w, T) = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{\bar{i}_w, \bar{i}_{w+1}, \bar{i}_{w+2}\} \equiv \mathbb{R}^3,\ \operatorname{nil}(\bar{i}_w, T) = 3,$$

unde $w \in \{1,5\}$, respectiv

$$Z(\bar{i}_1 + \bar{i}_5, T) = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\{\bar{i}_1 + \bar{i}_5, \bar{i}_2 + \bar{i}_6, \bar{i}_3 + \bar{i}_7\} \equiv \mathbb{R}^3,\ \operatorname{nil}(\bar{i}_1 + \bar{i}_5, T) = 3.$$

Au loc egalităţile

$$E = Z(\bar{i}_1, T) \oplus Z(\bar{i}_5, T) \oplus Z(\bar{i}_4, T) \oplus Z(\bar{i}_8, T)$$

şi

$$E = Z(\bar{i}_1 + \bar{i}_5, T) \oplus Z(\bar{i}_5, T) \oplus Z(\bar{i}_3, T) \oplus Z(\bar{i}_8, T).$$

Observăm că

$$Z(\bar{i}_1+\bar{i}_5,T)\cap Z(\bar{i}_j,T)=\{0_E\}, \qquad Z(\bar{i}_j,T)\cap Z(\bar{i}_v,T)=\{0_E\},$$

unde $j\neq v\in\{1,3,4,5,8\}$.

Matricea de reprezentare a operatorului T, în ambele descompuneri, este

$$\mathbb{T}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & O_3 & O_{3,1} & O_{3,1}\\ O_3 & \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} & O_{3,1} & O_{3,1}\\ O_{1,3} & O_{1,3} & (0) & O_1\\ O_{1,3} & O_{1,3} & O_1 & (0)\end{pmatrix}.$$

Mai precis,

$$\left(T(\overline{d}_1)\ \cdots\ T(\overline{d}_8)\right)=\left(\overline{d}_1\ \cdots\ \overline{d}_8\right)\cdot\mathbb{T},$$

unde

$$(\overline{d}_1,\ldots,\overline{d}_8)=\left(\bar{i}_1,\bar{i}_2,\bar{i}_3,\bar{i}_5,\bar{i}_6,\bar{i}_7,\bar{i}_4,\bar{i}_8\right),$$

respectiv

$$\left(T(\overline{e}_1)\ \cdots\ T(\overline{e}_8)\right)=\left(\overline{e}_1\ \cdots\ \overline{e}_8\right)\cdot\mathbb{T},$$

unde

$$(\overline{e}_1,\ldots,\overline{e}_8)=\left(\bar{i}_1+\bar{i}_5,\bar{i}_2+\bar{i}_6,\bar{i}_3+\bar{i}_7,\bar{i}_5,\bar{i}_6,\bar{i}_7,\bar{i}_3,\bar{i}_8\right).$$

Următoarele matrice pătrate,

$$A_k=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\cdots&0\\1&0&0&0&\cdots&0\\0&1&0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\0&\cdots&0&1&0&0\\0&\cdots&0&0&1&0\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_k(\mathbb{K}),\quad A_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}, A_2=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, A_1=(0),$$

unde $k\in\mathbb{N}^*$, poartă numele de *matrice* (blocuri) *nilpotente elementare*[4].

Rămânând în cadrul Teoremei 3.1, să observăm că matricea de reprezentare a operatorului nilpotent $T:E\to E$ în raport cu baza $\mathscr{S}_6$ — (3.8) — este

---

[4] În limba engleză, *elementary nilpotent block* (sing.). Vezi [10, pag. 122].

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} \mathbb{T}\big|_{Z(\overline{e}_1,T)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbb{T}\big|_{Z(\overline{e}_2,T)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbb{T}\Big|_{Z(\overline{e}_{q-1},T)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \mathbb{T}\Big|_{Z(\overline{e}_q,T)} \end{pmatrix},$$

unde[5] $\mathbb{T}\big|_{Z(\overline{e}_k,T)} = A_{\mathrm{nil}(\overline{e}_k,T)}$ pentru orice $1 \leq k \leq q$ şi $q = s$. De asemeni, *matricele* 1*-dimensionale* A_1 *le corespund spaţiilor* $Z(\overline{e},T)$ *cu* $\overline{e} \in \mathrm{Ker}\, T$. În cazul nostru, aceste elemente $\overline{e}$ sunt — dacă $r+1 \leq s$ — elementele $\{\overline{x}_{r+1},\ldots,\overline{x}_s\}$ din setul $\mathscr{S}_4$ prezentat în (3.13).

Formula (3.15) arată că spaţiul liniar E poate fi scris ca suma directă a s subspaţii de tipul $Z(\overline{e},T)$ în timp ce din definiţia (3.13) a setului $\mathscr{S}_4$ rezultă că $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\, T = s$. Astfel, *numărul de blocuri nilpotente elementare ale matricei* $\mathbb{T}$ *este egal cu dimensiunea nucleului operatorului* T [10, pag. 123, Theorem 2].

Conform formulei (1.9), putem permuta coloane şi linii ale matricei $\mathbb{T}$ dacă permutăm vectorii din baza $\mathscr{S}_6$ a spaţiului E.

De exemplu, lucrând *pe blocuri*, egalitatea

$$(T(\mathscr{B}_1)\, T(\mathscr{B}_2)) = (\mathscr{B}_1\, \mathscr{B}_2) \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

se rescrie ca

$$(T(\mathscr{B}_2)\, T(\mathscr{B}_1)) = (\mathscr{B}_2\, \mathscr{B}_1) \begin{pmatrix} B & O \\ O & A \end{pmatrix}.$$

Cu alte cuvinte, *blocurile nilpotente elementare pot fi aşezate pe diagonala principală a matricei* $\mathbb{T}$ în ordinea descrescătoare *(nestrictă) a dimensiunilor lor* [10, pag. 123, Theorem 1]. Această permutare este echivalentă cu permutarea termenilor din partea dreaptă a descompunerii (3.15).

Este valabilă egalitatea

$$T = T\big|_{Z(\overline{x}_1,T)} \oplus \cdots \oplus T\big|_{Z(\overline{x}_s,T)},$$

de unde — via Lema 3.2 —

$$T^{\nu} = T^{\nu}\big|_{Z(\overline{x}_1,T)} \oplus \cdots \oplus T^{\nu}\big|_{Z(\overline{x}_s,T)}, \quad \nu \in \mathbb{N}^*.$$

La fel ca în cazul relaţiei (3.7), deducem că — pentru $1 \leq \nu \leq h_i + 2$ —

$$\mathrm{Ker}\left(T^{\nu}\big|_{Z(\overline{x}_i,T)}\right) = \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\left\{T^{h_i+2-\nu}(\overline{x}_i),\ldots,T^{h_i+1}(\overline{x}_i)\right\}, \qquad i \in \overline{1,r},$$

adică, via (3.4),

[5] Reamintesc observaţia de la (3.4)!

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}\left(T^{v}\big|_{Z(\overline{x}_i,T)}\right) = v.$$

Fie $v = 2$. Pe baza (3.14), realizăm descompunerea

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,T^2 = & \bigoplus_{\substack{\overline{e}\in\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_s\}\\ \mathrm{nil}(\overline{e},T)\geq 2}} \mathrm{Span}_{\mathbb{K}}\left\{T^{\mathrm{nil}(\overline{e},T)-2}(\overline{e}), T^{\mathrm{nil}(\overline{e},T)-1}(\overline{e})\right\}\\ & \oplus \bigoplus_{\substack{\overline{e}\in\{\overline{x}_1,\ldots,\overline{x}_s\}\\ \mathrm{nil}(\overline{e},T)= 1}} \mathbb{K}T^{\mathrm{nil}(\overline{e},T)-1}(\overline{e}). \qquad (=\mathbb{K}\overline{e})\end{aligned}$$

Deducem de aici că, *la calculul dimensiunii subspaţiului* $\mathrm{Ker}\,T^2 \subseteq E$*, toate subspaţiile* $Z(\overline{e},T)$ *de dimensiune cel puţin* 2 *contribuie* cu câte 2 *(dimensiuni) în timp ce subspaţiile* 1*-dimensionale contribuie cu câte (evident)* 1 *dimensiune* [10, pag. 124]. Primelor dintre subspaţii le corespund blocuri nilpotente elementare A_k, unde $k \geq 2$. Un raţionament analog se efectuează pentru fiecare $\mathrm{Ker}\,T^v \subseteq E$.

Fie $\nu_i \geq 0$ numărul blocurilor A_i de pe diagonala principală a matricei $\mathbb{T}$. Cum $\dim_{\mathbb{K}} E = m$, este evident că $\nu_i = 0$ pentru orice $i \geq m+1$. Fie $\delta_i = \dim_{\mathbb{K}}\left(\mathrm{Ker}\,T^i\right)$. Atunci, analiza anterioară ne conduce la — [10, ibid.] —

$$\begin{cases}\delta_1 = \nu_1 + \cdots + \nu_m,\\ \delta_2 = \nu_1 + 2\cdot(\nu_2+\cdots+\nu_m),\\ \quad\vdots\\ \delta_w = \sum\limits_{1\leq i\leq w-1} i\cdot\nu_i + w\cdot\sum\limits_{w\leq i\leq m}\nu_i, \qquad \text{unde } 2\leq w\leq m,\\ \quad\vdots\\ \delta_m = \nu_1 + 2\cdot\nu_2 + 3\cdot\nu_3+\cdots+m\cdot\nu_m.\end{cases} \tag{3.16}$$

Evident, în practică, vom avea $\nu_i = 0$ pentru mulţi[6] dintre indecşii i.

Scăzând două câte două — "ecuaţia (i) − ecuaţia $(i+1)$" — ecuaţiile consecutive ale sistemului algebric (3.16), ajungem la

---

[6] Conform [10, pag. 120, Problema 8], $\delta_m = m$, adică $\mathbb{T}^m = O_m$. Vezi şi estimările (2.38), bazată pe (2.11), respectiv (2.39). Pentru a o folosi pe aceasta din urmă, să remarcăm că, dacă un operator $\mathbb{R}$-liniar este nilpotent, atunci şi complexificatul său va fi nilpotent — vezi (1.16), (1.38) —. Aplicând Teorema 2.2, realizăm descompunerea (unică) $T_{\mathbb{C}} = \mathscr{D}+\mathscr{N} = O+\mathscr{N} = \mathscr{N}$, de unde $\mathbb{T} = \mathbb{N}$. Nu vom utiliza, în cele ce urmează, relaţia $\delta_m = m$.

$$\begin{cases} \delta_1 = \nu_1 + \cdots + \nu_m, \\ -\delta_1 + \delta_2 = \nu_2 + \nu_3 + \cdots + \nu_m, \\ \vdots \\ -\delta_{w-1} + \delta_w = \sum\limits_{w \le i \le m} \nu_i, \qquad \text{unde } 2 \le w \le m, \\ \vdots \\ -\delta_{m-1} + \delta_m = \nu_m. \end{cases}$$

În sfârşit, scăzând două câte două — "ecuaţia$\,(i)$ − ecuaţia$\,(i+1)$" — ecuaţiile consecutive ale sistemului algebric anterior, obţinem

$$\begin{cases} \nu_1 \ = 2 \cdot \delta_1 - \delta_2, \\ \quad \vdots \\ \nu_w = -\delta_{w-1} + 2 \cdot \delta_w - \delta_{w+1}, \qquad \text{unde } 2 \le w \le m-1, \\ \quad \vdots \\ \nu_m = -\delta_{m-1} + \delta_m. \end{cases} \tag{3.17}$$

Relaţiile (2.10) arată că există numărul $p \geq 1$ astfel încât $\delta_p = \delta_{p+1} = \cdots$, de unde $\nu_{p+1} = \nu_{p+2} = \cdots = 0$.

Setul de relaţii (3.17) arată că *numărul de blocuri nilpotente elementare de* o anumită dimensiune *depinde numai de operatorul* T, aşadar, *scrierea matricei* $\mathbb{T}$ *ca o matrice-diagonală care are pe diagonala principală blocuri nilpotente elementare aşezate în ordinea descrescătoare nestrictă a dimensiunilor lor este unică*, vezi [10, pag. 125, Theorem 4].

Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Fiind date $\overline{e} \in E \setminus \{0_E\}$, $k = \mathrm{nil}(\overline{e}, T)$ şi operatorul $\mathbb{K}$-liniar $U = T\big|_{Z(\overline{e},T)} : Z(\overline{e},T) \to Z(\overline{e},T)$, relaţia (1.9) ne conduce la

$$\big(U(\overline{e}_1) \ \cdots \ U(\overline{e}_k)\big) = \big(\overline{e}_1 \ \cdots \ \overline{e}_k\big) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

unde — reamintesc formulele bazei (3.5) —

$$\overline{e}_1 = \overline{e}, \overline{e}_2 = T(\overline{e}) = U(\overline{e}_1), \ldots, \overline{e}_k = T^{k-1}(\overline{e}) = U(\overline{e}_{k-1}).$$

Introducem altă bază a $\mathbb{K}$-spaţiului liniar $Z(\overline{e}, T)$ prin relaţiile — [10, pag. 148] —

$$\overline{f}_1 = \overline{e}_1, \overline{f}_2 = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \overline{e}_2, \ldots, \overline{f}_k = \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \cdot \overline{e}_k.$$

Matricea de schimbare de bază este

$$P = B_k(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon^{k-2}} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \end{pmatrix}.$$

Via identităţile[7]

$$A_2 \cdot B_2(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix} = B_2(\varepsilon) \cdot A_2(\varepsilon)$$

şi — aici, $k \geq 3$ —

$$A_k \cdot B_k(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{\varepsilon^{k-3}} & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon^{k-2}} & 0 \end{pmatrix} = B_k(\varepsilon) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$
$$= B_k(\varepsilon) \cdot A_k(\varepsilon),$$

deducem că

$$\begin{aligned} \left(U(\overline{f}_1) \cdots U(\overline{f}_k)\right) &= \left(U(\overline{e}_1) \cdots U(\overline{e}_k)\right) \cdot B_k(\varepsilon) = \left[\left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_k\right) \cdot A_k\right] \cdot B_k(\varepsilon) \\ &= \left[\left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_k\right) \cdot B_k(\varepsilon)\right] \cdot A_k(\varepsilon) \\ &= \left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_k\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Evident, $A_k = A_k(1)$.

3.2 Forma canonică Jordan a matricei de reprezentare $\mathbb{T}$

În contextul Teoremei 2.2, revenim la expresiile (2.33) – (2.37).

[7] Matricele $(A_k)_{k \geq 1}$ au fost introduse la pagina 51.

Fie $\lambda \in \mathbb{K}$. Pe baza discuţiei din secţiunea anterioară, introducem următoarele matrice pătrate

$$J_k^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K}) \tag{3.19}$$

şi

$$J_3^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_2^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_1^\lambda = (\lambda), \tag{3.20}$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$. Ele se numesc *matrice Jordan elementare*[8].

Deoarece *operatorul $\mathscr{D}_i$ din (2.41) este un operator diagonal*, putem modifica baza λ_i-eigenspaţiului generalizat V_i astfel încât matricea nilpotentă M_i să fie adusă la *forma sa canonică* [10, pag. 123], adică să fie organizată ca o matrice-diagonală de blocuri nilpotente elementare, aşezate în ordinea descrescătoare nestrictă a dimensiunilor lor. Atunci, *matricele A_i din (2.34) devin matrice-diagonale formate din matrice Jordan elementare, aşezate în ordinea descrescătoare nestrictă a dimensiunilor lor*. La rândul său, matricea de reprezentare $\mathbb{T}$ a operatorului liniar $T : E \to E$ — fiind o matrice-diagonală construită cu matricele A_i — devine o matrice-diagonală de matrice Jordan elementare. Această scriere a matricei $\mathbb{T}$ constituie *forma sa canonică Jordan* [10, pag. 127].

Calculul (3.18) arată că putem înlocui matricele Jordan elementare cu matricele

$$J_k^\lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \varepsilon & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \varepsilon & \lambda & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \varepsilon & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_k(\mathbb{K}) \tag{3.21}$$

şi

$$J_3^\lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ \varepsilon & \lambda & 0 \\ 0 & \varepsilon & \lambda \end{pmatrix}, \quad J_2^\lambda(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \varepsilon & \lambda \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

unde $k \in \mathbb{N}^*$ şi $\varepsilon > 0$. Evident, $J_k^\lambda = J_k^\lambda(1)$.

[8] În limba engleză, *elementary Jordan matrix* (sing.). Conform [10, pag. 127].

3.3 Cazul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Restricţia (2.28) a fost impusă pentru a putea descompune polinomul caracteristic $p_T(\lambda)$ într-un produs de puteri de *polinoame de gradul întâi* — vezi formula (2.30) —.

Fie $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un spaţiu liniar real de dimensiune $m \leq n$ şi $T : E \to E$ un operator $\mathbb{R}$-liniar. Complexificatul său, $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$, are aceeaşi matrice de reprezentare $\mathbb{T}$ şi acelaşi polinom caracteristic $p_T(\lambda)$ ca operatorul T.

Fie $\lambda_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ o eigenvaloare a operatorului $T_{\mathbb{C}}$ şi eigenvectorul generalizat

$$\overline{e} \in \text{Ker}\,(T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^k \backslash \{0_E\} \subset E_{\mathbb{C}}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Aici, $\overline{e} = \overline{x} + i \cdot \overline{y}$, unde $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$.

Relaţiile (1.35), (1.36) şi Lema 1.2 arată că

$$\overline{x}, \overline{y} \in E_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{R}^n = E_{\mathbb{C}\mathbb{R}} = E.$$

Via Lema 1.6, $\sigma \circ T_{\mathbb{C}} = T_{\mathbb{C}} \circ \sigma$. Au loc egalităţile

$$\begin{aligned}
0_E &= \sigma(0_E) = \sigma\left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^k(\overline{e})\right) \\
&= (\sigma \circ (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I))\left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1}(\overline{e})\right) \\
&= \left(\left(T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I\right) \circ \sigma\right)\left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1}(\overline{e})\right) \\
&= \left(T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I\right)\left((\sigma \circ (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I))\left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-2}(\overline{e})\right)\right) \\
&= \left(T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I\right)^2\left((\sigma \circ (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I))\left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-3}(\overline{e})\right)\right) \\
&\;\;\vdots \\
&= \left(T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I\right)^k(\sigma(\overline{e})),
\end{aligned}$$

de unde

$$\sigma(\overline{e}) \in \text{Ker}\left(T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I\right)^k \backslash \{0_E\}. \tag{3.23}$$

De aici, deducem că *fiecărei valori proprii nereale λ_0 a operatorului $T_{\mathbb{C}}$ îi corespunde valoarea proprie $\overline{\lambda_0}$* [10, pag. 66, Proposition]. *Cele două eigenvalori au multiplicităţi algebrice egale*.

Formula (2.30), valabilă în $\mathbb{C}$, se rescrie în $\mathbb{R}$ ca

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= p_{T_{\mathbb{C}}}(\lambda) \\ &= (-1)^m \cdot (\lambda - \lambda_0)^{m_0} \cdot (\lambda - \overline{\lambda_0})^{m_0} \\ &\times \text{(factori generaţi de restul eigenvalorilor)} \\ &= (-1)^m \cdot \left(\lambda^2 - 2 \cdot \operatorname{Re}\lambda_0 \cdot \lambda + |\lambda_0|^2\right)^{m_0} \cdot (\cdots). \end{aligned}$$

Descompunerea (2.33) a spaţiului liniar $E_{\mathbb{C}}$ ne permite să observăm că *vectorii* $\{\overline{e}, \sigma(\overline{e})\}$, găsindu-se în eigenspaţii generalizate diferite, *sunt liniar independenţi peste corpul* $\mathbb{C}$.

Lema 3.4. ([10, pag. 68]) *Vectorii* $\{\overline{e}, \sigma(\overline{e})\}$ *sunt liniar independenţi peste corpul* $\mathbb{C}$ *dacă şi numai dacă vectorii* $\{\overline{x}, \overline{y}\}$, *unde* $\overline{e} = \overline{x} + i \cdot \overline{y}$ *şi* $\overline{x}$, $\overline{y} \in E$, *sunt liniar independenţi peste corpul* $\mathbb{R}$.

În plus,

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{e}, \sigma(\overline{e})\} = \operatorname{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{x}, \overline{y}\}. \tag{3.24}$$

Demonstraţie. Observăm că $\overline{e} \neq \sigma(\overline{e})$ dacă şi numai dacă $\overline{y} \neq 0_E$.

Pentru $\alpha = a + b \cdot i \in \mathbb{C}$, unde a, $b \in \mathbb{R}$, cu proprietatea că $\sigma(\overline{e}) = \alpha \cdot \overline{e}$, deducem că

$$\begin{cases} a \cdot \overline{x} - b \cdot \overline{y} = \overline{x}, \\ b \cdot \overline{x} + a \cdot \overline{y} = -\overline{y}, \end{cases}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{cases} (a-1) \cdot \overline{x} = b \cdot \overline{y}, \\ -b \cdot \overline{x} = (a+1) \cdot \overline{y}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Dat fiind că cel puţin unul din vectorii $\overline{x}$, $\overline{y}$ este nenul, din relaţiile (3.25) rezultă că

$$a^2 + b^2 = 1, \tag{3.26}$$

ceea ce ne permite să scriem că $a = \cos u$ şi $b = \sin u$ pentru un anumit $u \in [0, 2\pi]$.

Ca să ajungem la (3.26), înmulţim prima ecuaţie din (3.25) cu $a+1$, pe cea de-a doua cu b şi apoi le scădem. Am obţinut că $(a^2 + b^2 - 1) \cdot \overline{x} = 0_E$. De asemeni, înmulţind prima ecuaţie cu b, pe a doua cu $a-1$ şi adunând rezultatele, rezultă $(a^2 + b^2 - 1) \cdot \overline{y} = 0_E$.

Introducând noile formule ale mărimilor a, b în relaţiile (3.25), ajungem la

$$\sin \frac{u}{2} \cdot \overline{x} + \cos \frac{u}{2} \cdot \overline{y} = 0_E,$$

adică la concluzia că *liniar dependenţa vectorilor* $\{\overline{e}, \sigma(\overline{e})\}$ *implică liniar dependenţa vectorilor* $\{\overline{x}, \overline{y}\}$.

Reciproc, dacă există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{x} = c \cdot \overline{y}$, atunci

$$\sigma(\overline{e}) = (c-i)\cdot\overline{y} = \frac{c-i}{c+i}\cdot[(c+i)\cdot\overline{y}] = \alpha\cdot\overline{e}, \quad \alpha = \frac{c-i}{c+i} \in \mathbb{C},$$

ceea ce încheie demonstraţia.

Pentru partea a doua, remarcăm că au loc relaţiile

$$\begin{aligned}(E_{\mathbb{C}} \ni) \quad \overline{u} &= \alpha\cdot\overline{e} + \beta\cdot\sigma(\overline{e}) \\ &= (\alpha+\beta)\cdot\overline{x} + i\cdot(\alpha-\beta)\cdot\overline{y} \\ &= \gamma\cdot\overline{x} + \varepsilon\cdot\overline{y},\end{aligned}$$

unde $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon \in \mathbb{C}$, respectiv

$$\begin{aligned}\overline{u} &= \gamma\cdot\overline{x} + \varepsilon\cdot\overline{y} \\ &= \frac{1}{2}\cdot(\gamma - i\cdot\varepsilon)\cdot\overline{e} + \frac{1}{2}\cdot(\gamma + i\cdot\varepsilon)\cdot\sigma(\overline{e}) \\ &= \alpha\cdot\overline{e} + \beta\cdot\sigma(\overline{e}).\end{aligned}$$

Am stabilit egalitatea (3.24). $\square$

Dacă subspaţiile V_0, V_1 din (2.33) sunt eigenspaţiile generalizate ale valorilor proprii λ_0, $\overline{\lambda_0}$, atunci ele admit bazele[9] — via (3.23) —

$$\mathscr{B}_0 = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_{m_0}\} \subset V_0, \qquad \mathscr{B}_1 = \{\sigma(\overline{e}_1), \ldots, \sigma(\overline{e}_{m_0})\} \subset V_1.$$

Au loc egalităţile — pe baza Lemei 3.4 —

$$\begin{aligned} V_0 \oplus V_1 &= \left(\bigoplus_{\overline{e}\in\mathscr{B}_0} \mathbb{C}\overline{e}\right) \oplus \left(\bigoplus_{\overline{f}\in\mathscr{B}_1} \mathbb{C}\overline{f}\right) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{m_0} (\mathbb{C}\overline{e}_j \oplus \mathbb{C}\sigma(\overline{e}_j)) = \bigoplus_{j=1}^{m_0} \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{e}_j, \sigma(\overline{e}_j)\} \\ &= \bigoplus_{j=1}^{m_0} \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{x}_j, \overline{y}_j\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{m_0}, \overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_{m_0}\}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

unde $\overline{e}_j = \overline{x}_j + i\cdot\overline{y}_j$ şi $\overline{x}_j, \overline{y}_j \in E$ pentru orice j.

Aşadar, dacă $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_v\}$ sunt eigenvalorile *reale* iar

$$\{\lambda_{v+1}, \overline{\lambda_{v+1}}, \ldots, \lambda_{v+w}, \overline{\lambda_{v+w}}\}$$

---

[9] Este suficient să arătăm că sistemul $\mathscr{B}_1$ este liniar independent peste $\mathbb{C}$. În particular, va rezulta că vectorii din $\mathscr{B}_1$ sunt *diferiţi*, adică *numărul lor este* m_0. Relaţia $\sum_{i=1}^{m_0} z_i\cdot\sigma(\overline{e}_i) = 0_E$ ne conduce la $0_E = \sigma(0_E) = \sum_{i=1}^{m_0} \overline{z_i}\cdot\overline{e}_i$, de unde $z_i = 0$ pentru orice i.

eigenvalorile *nereale* (complexe) ale operatorului $T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$, putem rescrie descompunerea (2.33) ca

$$E_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{j=0}^{v} V_j$$
$$\oplus \bigoplus_{j=v+1}^{v+w} \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\overline{x}_1^j, \ldots, \overline{x}_{m_j}^j, \overline{y}_1^j, \ldots, \overline{y}_{m_j}^j\},$$

unde setul

$$\mathscr{B}_j = \left\{\overline{e}_1^j, \ldots, \overline{e}_{m_j}^j\right\} \subset E_{\mathbb{C}},$$

cu $\overline{e}_k^j = \overline{x}_k^j + i \cdot \overline{y}_k^j$ şi $\overline{x}_k^j, \overline{y}_k^j \in E$, este bază a eigenspaţiului generalizat corespunzând eigenvalorii λ_j pentru orice $j \in \overline{v+1, v+w}$. De asemeni, există bazele[10] $\mathscr{B}_j \subset E$ pentru eigenspaţiile generalizate V_j ale valorilor proprii reale λ_j, $j \in \overline{0, v}$.

O bază $\mathscr{S} \subset E_{\mathbb{C}}$ poartă numele de *bază invariantă la* σ (σ*-bază*) dacă $\sigma(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{S}$. Cu alte cuvinte, *dacă* $\overline{e}$ *se găseşte într-o* σ*-bază, atunci fie* $\overline{e} \in E$*, fie* $\overline{e} \in E_{\mathbb{C}} \setminus E$ *şi* $\sigma(\overline{e}) \in \mathscr{S}$, adică *setul* $\{\overline{e}, \sigma(\overline{e})\}$ *este liniar independent peste corpul* $\mathbb{C}$.

Exemplul 3.3. Fie[11] $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$. Atunci, baza $\mathscr{B}_1 = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, cu vectorii

$$\overline{e}_1 = \overline{i}_1, \quad \overline{e}_2 = \overline{i}_2, \quad \overline{e}_3 = i \cdot \overline{i}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix},$$

nu este σ-bază deoarece $\sigma(\overline{e}_3) = -\overline{e}_3 \notin \mathscr{B}_1$.

În schimb, baza $\mathscr{B}_2 = \{\overline{e}_4, \overline{e}_5, \overline{e}_6\}$, cu vectorii

$$\overline{e}_4 = \overline{i}_1, \quad \overline{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \overline{e}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

este σ-bază pentru că $\overline{e}_4 \in \mathbb{R}^3$ şi $\sigma(\overline{e}_5) = \overline{e}_6$.

Teorema 3.2. ([10, pag. 116, Theorem 1]) *Există şi sunt unici operatorii* $\mathbb{R}$*-liniari* $\mathscr{D}, \mathscr{N} : E \to E$ *astfel încât*

$$T = \mathscr{D} + \mathscr{N}, \qquad \mathscr{D} \circ \mathscr{N} = \mathscr{N} \circ \mathscr{D},$$

operatorul $\mathscr{N}$ *să fie nilpotent, complexificatul operatorului* $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$*, să fie diagonalizabil iar baza în raport cu care operatorul* $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$ *admite o matrice-diagonală de reprezentare să fie o* σ*-bază.*

---

[10] Vezi (1.29).

[11] Reamintesc faptul că $(\mathbb{R}^3)_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^3$.

Demonstrație. Are loc descompunerea

$$T_{\mathbb{C}} = \mathscr{D}_{\mathbb{C}} + \mathscr{N}_{\mathbb{C}}, \qquad \mathscr{D}_{\mathbb{C}} \circ \mathscr{N}_{\mathbb{C}} = \mathscr{N}_{\mathbb{C}} \circ \mathscr{D}_{\mathbb{C}},$$

a complexificatului $T_{\mathbb{C}}$ pe baza Teoremei 2.2. Aici, operatorul $\mathbb{C}$-liniar $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$ este diagonalizabil iar operatorul $\mathbb{C}$-liniar $\mathscr{N}_{\mathbb{C}}$ este nilpotent.

Introducem operatorii $\mathbb{C}$-liniari[12]

$$\mathscr{D}_1 = \sigma \circ \mathscr{D}_{\mathbb{C}} \circ \sigma \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}), \quad \mathscr{N}_1 = \sigma \circ \mathscr{N}_{\mathbb{C}} \circ \sigma \in L(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}).$$

Fie $\mathscr{S} = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_m\} \subset E_{\mathbb{C}}$ o σ-bază în raport cu care matricea de reprezentare $\mathbb{D}$ a operatorului $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$ să fie

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & z_m \end{pmatrix}, \qquad z_j \in \mathbb{C}.$$

Baza $\mathscr{S}$ poate fi renumerotată astfel

$$\mathscr{S} = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_t\} \cup \{\overline{e}_{t+1}, \overline{e}_{t+2}\} \cup \cdots \cup \{\overline{e}_{t+2q+1}, \overline{e}_{t+2q+2}\}, \tag{3.28}$$

unde $\overline{e}_j \in E$ pentru orice $j \in \overline{1,t}$, $\overline{e}_j \in E_{\mathbb{C}} \backslash E$ pentru orice $j \in \overline{t+1, t+2q+2}$ şi $\sigma(\overline{e}_{t+2k+1}) = \overline{e}_{t+2k+2}$ pentru orice $0 \leq k \leq q$. Aici, $m = t + 2q + 2$, $q \in \mathbb{N}$.

Avem relaţiile

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1(\overline{e}_j) &= (\sigma \circ \mathscr{D}_{\mathbb{C}})(\sigma(\overline{e}_j)) = (\sigma \circ \mathscr{D}_{\mathbb{C}})(\overline{e}_j) \\ &= \sigma(z_j \cdot \overline{e}_j) = \overline{z_j} \cdot \overline{e}_j, \qquad j \in \overline{1,t}, \end{aligned} \tag{3.29}$$

şi

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1(\overline{e}_{t+2j+1}) &= (\sigma \circ \mathscr{D}_{\mathbb{C}})(\sigma(\overline{e}_{t+2j+1})) = (\sigma \circ \mathscr{D}_{\mathbb{C}})(\overline{e}_{t+2j+2}) \\ &= \sigma(z_{t+2j+2} \cdot \overline{e}_{t+2j+2}) = \overline{z_{t+2j+2}} \cdot \overline{e}_{t+2j+1}, \end{aligned} \tag{3.30}$$

respectiv

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1(\overline{e}_{t+2j+2}) &= (\sigma \circ \mathscr{D}_{\mathbb{C}})(\sigma(\overline{e}_{t+2j+2})) = (\sigma \circ \mathscr{D}_{\mathbb{C}})(\overline{e}_{t+2j+1}) \\ &= \sigma(z_{t+2j+1} \cdot \overline{e}_{t+2j+1}) = \overline{z_{t+2j+1}} \cdot \overline{e}_{t+2j+2}. \end{aligned} \tag{3.31}$$

Atunci, pentru orice $\overline{e} \in E_{\mathbb{C}}$,

[12] Acest fapt va fi probat în (3.32).

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}_1(\overline{e}) &= \mathscr{D}_1\left(\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\cdot\overline{e}_j\right) = (\sigma\circ\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\left(\sum_{j=1}^{m}\overline{\alpha_j}\cdot\sigma(\overline{e}_j)\right)\\
&= \sigma\left(\sum_{j=1}^{m}\overline{\alpha_j}\cdot(\mathscr{D}_{\mathbb{C}}\circ\sigma)(\overline{e}_j)\right) = \sum_{j=1}^{m}\overline{\overline{\alpha_j}}\cdot(\sigma\circ\mathscr{D}_{\mathbb{C}}\circ\sigma)(\overline{e}_j)\\
&= \sum_{j=1}^{m}\alpha_j\cdot\mathscr{D}_1(\overline{e}_j), \qquad \alpha_j\in\mathbb{C}, \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

deci *operatorul* $\mathscr{D}_1 : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ *este liniar peste corpul* $\mathbb{C}$ *şi,* via (3.29) – (3.31)*, este reprezentat în* σ*-baza* $\mathscr{S}$ *de o matrice-diagonală.*

Mai departe, avem

$$\begin{aligned}
\mathscr{N}_1^2 &= (\sigma\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}\circ\sigma)\circ(\sigma\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}\circ\sigma) = \sigma\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}\circ\sigma^2\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}\circ\sigma\\
&= \sigma\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}^2\circ\sigma,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\mathscr{N}_1^k = \sigma\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}^k\circ\sigma, \qquad k\in\mathbb{N}^*,$$

deci *operatorul* $\mathscr{N}_1 : E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ *este liniar peste corpul* $\mathbb{C}$ *şi nilpotent.*

În sfârşit, pentru orice $\overline{e}\in E_{\mathbb{C}}$, avem

$$\begin{aligned}
(\mathscr{D}_1\circ\mathscr{N}_1)(\overline{e}) &= (\sigma\circ\mathscr{D}_{\mathbb{C}}\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}\circ\sigma)(\overline{e}) = (\sigma\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}\circ\mathscr{D}_{\mathbb{C}}\circ\sigma)(\overline{e})\\
&= (\mathscr{N}_1\circ\mathscr{D}_1)(\overline{e}),
\end{aligned}$$

deci *operatorii liniari* $\mathscr{D}_1$*,* $\mathscr{N}_1$ *comută.*

Conform Lemei 1.6,

$$\begin{aligned}
T_{\mathbb{C}} &= \sigma\circ T_{\mathbb{C}}\circ\sigma = \sigma\circ(\mathscr{D}_{\mathbb{C}}+\mathscr{N}_{\mathbb{C}})\circ\sigma\\
&= \sigma\circ\mathscr{D}_{\mathbb{C}}\circ\sigma+\sigma\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}\circ\sigma\\
&= \mathscr{D}_1+\mathscr{N}_1.
\end{aligned}$$

Din Lema 2.16 rezultă că

$$\mathscr{D}_{\mathbb{C}} = \mathscr{D}_1 = \sigma\circ\mathscr{D}_{\mathbb{C}}\circ\sigma, \quad \mathscr{N}_{\mathbb{C}} = \mathscr{N}_1 = \sigma\circ\mathscr{N}_{\mathbb{C}}\circ\sigma,$$

adică *operatorii liniari complecşi* $\mathscr{D}_{\mathbb{C}}$*,* $\mathscr{N}_{\mathbb{C}}$ *sunt complexificaţii unor operatori liniari reali,* notaţi cu $\mathscr{D}$, $\mathscr{N}$.

Matricea de reprezentare a operatorului $\mathscr{N}_{\mathbb{C}}$ este nilpotentă şi coincide cu matricea de reprezentare — în baza din E care generează spaţiile E, $E_{\mathbb{C}}$ — a operatorului $\mathscr{N}$. Astfel, acesta este nilpotent.

Fie $\{\mathscr{D}_2,\mathscr{N}_2\}$ altă descompunere de acelaşi tip, adică

$$T = \mathscr{D}_2+\mathscr{N}_2, \qquad \mathscr{D}_2\circ\mathscr{N}_2 = \mathscr{N}_2\circ\mathscr{D}_2.$$

Atunci, dacă $\mathscr{B}=\{\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_m\}$ este o bază a spaţiului liniar real E iar $\mathbb{D}_2$, $\mathbb{N}_2$ sunt matricele de reprezentare în raport cu aceasta ale operatorilor $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{N}_2$, matricea de reprezentare $\mathbb{T}$ a operatorului T, în $\mathscr{B}$, are formula

$$\mathbb{T}=\mathbb{D}_2+\mathbb{N}_2.$$

Via (1.38), putem scrie că

$$T_{\mathbb{C}}=(\mathscr{D}_2)_{\mathbb{C}}+(\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}}.$$

De asemeni, conform Lemei 1.7,

$$(\mathscr{D}_2)_{\mathbb{C}}\circ(\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}}=(\mathscr{D}_2\circ\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}},\qquad(\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}}\circ(\mathscr{D}_2)_{\mathbb{C}}=(\mathscr{N}_2\circ\mathscr{D}_2)_{\mathbb{C}}.$$

Fie $\overline{z}=\sum\limits_{i=1}^{m}z_i\cdot\overline{f}_i\in E_{\mathbb{C}}$. Egalităţile — Lema 1.2 arată că $(E_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}=E$, deci $((\mathscr{D}_2\circ\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}})|_E=\mathscr{D}_2\circ\mathscr{N}_2$ —

$$\begin{aligned}((\mathscr{D}_2)_{\mathbb{C}}\circ(\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}})(\overline{z})&=(\mathscr{D}_2\circ\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}}\left(\sum_{i=1}^{m}z_i\cdot\overline{f}_i\right)\qquad(z_i\in\mathbb{C})\\&=\sum_{i=1}^{m}z_i\cdot((\mathscr{D}_2\circ\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}})|_E(\overline{f}_i)=\sum_{i=1}^{m}z_i\cdot(\mathscr{D}_2\circ\mathscr{N}_2)(\overline{f}_i)\\&=\sum_{i=1}^{m}z_i\cdot(\mathscr{N}_2\circ\mathscr{D}_2)(\overline{f}_i)=(\mathscr{N}_2\circ\mathscr{D}_2)_{\mathbb{C}}\left(\sum_{i=1}^{m}z_i\cdot\overline{f}_i\right)\\&=((\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}}\circ(\mathscr{D}_2)_{\mathbb{C}})(\overline{z})\end{aligned}$$

ne conduc la

$$\mathscr{D}_{\mathbb{C}}=(\mathscr{D}_2)_{\mathbb{C}},\quad\mathscr{N}_{\mathbb{C}}=(\mathscr{N}_2)_{\mathbb{C}}.$$

Obţinem că

$$\mathscr{D}=\mathscr{D}_2,\quad\mathscr{N}=\mathscr{N}_2,$$

via Lema 1.2. $\square$

Un operator $\mathbb{R}$-liniar al cărui complexificat este diagonalizabil se numeşte *semisimplu*[13].

Revenim la (3.27). Operatorul $(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}$ are matricea de reprezentare $\mathbb{D}_{V_0\oplus V_1}$ în raport cu baza $\mathscr{B}_0\cup\mathscr{B}_1$. Mai precis,

$$\begin{aligned}&\big(\mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\overline{e}_1)\cdots\mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\overline{e}_{m_0})\,\mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\sigma(\overline{e}_1))\cdots\mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\sigma(\overline{e}_{m_0}))\big)\\&=\big(\overline{e}_1\cdots\overline{e}_{m_0}\,\sigma(\overline{e}_1)\cdots\sigma(\overline{e}_{m_0})\big)\cdot\mathbb{D}_{V_0\oplus V_1}\end{aligned}$$

[13] În limba engleză, *semisimple* [10, pag. 65].

şi

$$\mathbb{D}_{V_0\oplus V_1}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \overline{\lambda_0} & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \overline{\lambda_0}\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{2m_0}(\mathbb{C}).$$

Introducem numerele reale a_0, b_0, unde $b_0\neq 0$, pentru care $\lambda_0=a_0+b_0\cdot i$. Ştim că

$$\overline{x}_1=\frac{1}{2}\cdot(\overline{e}_1+\sigma(\overline{e}_1)),\qquad \overline{y}_1=\frac{1}{2i}\cdot(\overline{e}_1-\sigma(\overline{e}_1)),$$

conform (1.35), (1.36).

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}(\overline{e}_1)&=\lambda_0\cdot\overline{e}_1\\&=(a_0\cdot\overline{x}_1-b_0\cdot\overline{y}_1)+i\cdot(b_0\cdot\overline{x}_1+a_0\cdot\overline{y}_1),\end{aligned}\tag{3.33}$$

respectiv

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}(\sigma(\overline{e}_1))&=\overline{\lambda_0}\cdot\sigma(\overline{e}_1)\\&=(a_0\cdot\overline{x}_1-b_0\cdot\overline{y}_1)-i\cdot(b_0\cdot\overline{x}_1+a_0\cdot\overline{y}_1),\end{aligned}\tag{3.34}$$

de unde

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}(\overline{x}_1)&=\frac{1}{2}\cdot\left[(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}(\overline{e}_1)+(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}(\sigma(\overline{e}_1))\right]\\&=a_0\cdot\overline{x}_1-b_0\cdot\overline{y}_1\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}(\overline{y}_1)&=\frac{1}{2i}\cdot\left[(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}(\overline{e}_1)-(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}(\sigma(\overline{e}_1))\right]\\&=b_0\cdot\overline{x}_1+a_0\cdot\overline{y}_1.\end{aligned}$$

Fie baza — înlocuim setul $\{\overline{e}_1,\sigma(\overline{e}_1)\}$ cu setul $\{\overline{x}_1,\overline{y}_1\}$ în $\mathscr{B}_0\cup\mathscr{B}_1$ —

$$\mathscr{B}=\{\overline{x}_1,\overline{y}_1\}\cup\{\overline{e}_2,\ldots,\overline{e}_{m_0},\sigma(\overline{e}_2),\ldots,\sigma(\overline{e}_{m_0})\}\subset V_0\oplus V_1.$$

Matricea de reprezentare $\mathbb{W}_1$ a operatorului $(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0\oplus V_1}$ în raport cu noua bază este

$$\mathbb{W}_1 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -b_0 & a_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \overline{\lambda_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \overline{\lambda_0} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2m_0}(\mathbb{C}).$$

Adică,

$$\begin{aligned} &\big(\mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\overline{x}_1)\, \mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\overline{y}_1)\, \mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\overline{e}_2) \cdots \mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\overline{e}_{m_0})\, \mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\sigma(\overline{e}_2)) \cdots \mathscr{D}_{\mathbb{C}}(\sigma(\overline{e}_{m_0}))\big) \\ &= \big(\overline{x}_1\, \overline{y}_1\, \overline{e}_2 \cdots \overline{e}_{m_0}\, \sigma(\overline{e}_2) \cdots \sigma(\overline{e}_{m_0})\big) \cdot \mathbb{W}_1. \end{aligned}$$

Repetând procedeul de încă $m_0 - 1$ ori, deducem că *există o bază $\mathscr{S} \subset E$ a spaţiului liniar complex $E_{\mathbb{C}}$ în raport cu care operatorul liniar $(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0 \oplus V_1}$ să aibă matricea de reprezentare*

$$\mathbb{W}_{m_0} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & \cdots & O_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & \cdots & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2m_0}(\mathbb{R}).$$

Aici,

$$\mathscr{S} = \{\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{x}_2, \overline{y}_2, \ldots, \overline{x}_{m_0}, \overline{y}_{m_0}\}$$

şi $V_0 \oplus V_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathscr{S})$.

Observăm că

$$V_0 \oplus V_1 = (V_{01})_{\mathbb{C}}, \quad \text{unde } V_{01} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathscr{S}).$$

Conform Lemei 1.6, *restricţia operatorului liniar complex $(\mathscr{D}_{\mathbb{C}})\big|_{V_0 \oplus V_1}$ la*[14] *V_{01} este un operator liniar real, notat cu $\mathscr{D}\big|_{V_{01}}$, a cărui matrice de reprezentare în raport cu $\mathscr{S}$ este $\mathbb{W}_{m_0}$*. Evident, acest operator liniar real este restricţia la V_{01} a operatorului $\mathscr{D}$ din Teorema 3.2.

Tot pe baza relaţiei (3.23)[15], deducem că, dacă vectorii $\{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_h\}$ — pentru $h \leq m_0$ — se scriu sub forma

$$\overline{e}_1 = \overline{e}, \overline{e}_2 = (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)(\overline{e}), \ldots, \overline{e}_h = (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{h-1}(\overline{e}),$$

---

[14] V_{01} este realificatul spaţiului complex $V_0 \oplus V_1$.

[15] În fapt, via egalitatea $(T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^k = \sigma \circ \left(T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I\right)^k \circ \sigma$, unde $k \geq 1$.

unde $h = \operatorname{nil}(\overline{e}, T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)$, ceea ce implică faptul că

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_h\} = Z(\overline{e}, T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I),$$

atunci

$$\operatorname{nil}(\overline{e}, T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I) = \operatorname{nil}\left(\sigma(\overline{e}), T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I\right)$$

şi

$$\operatorname{Span}_{\mathbb{C}} \{\sigma(\overline{e}_1), \ldots, \sigma(\overline{e}_h)\} = Z\left(\sigma(\overline{e}), T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I\right).$$

Mai precis chiar, din relaţiile

$$\begin{aligned}
\overline{e}_k &= (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1} (\overline{e}) \\
&= \left(\sigma \circ (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1} \circ \sigma\right) (\overline{e}) \\
&= \sigma \left((T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1} (\sigma(\overline{e}))\right)
\end{aligned}$$

rezultă că

$$\sigma(\overline{e}_k) = (T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I)^{k-1} (\sigma(\overline{e})), \quad 1 \leq k \leq h.$$

Restricţia la subspaţiul liniar complex

$$Z_0 \oplus Z_1 \subseteq V_0 \oplus V_1,$$

unde

$$Z_0 = Z(\overline{e}, T_{\mathbb{C}} - \lambda_0 \cdot I), \quad Z_1 = Z\left(\sigma(\overline{e}), T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda_0} \cdot I\right),$$

a operatorului $T_{\mathbb{C}}$ admite în baza $\mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3$, unde

$$\mathscr{B}_2 = \{\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_h\}, \quad \mathscr{B}_3 = \{\sigma(\overline{e}_1), \ldots, \sigma(\overline{e}_h)\},$$

matricea de reprezentare

$$\mathbb{T}_{Z_0 \oplus Z_1} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \overline{\lambda_0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \overline{\lambda_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \overline{\lambda_0} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \overline{\lambda_0} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2h}(\mathbb{C}).$$

Relaţiile (3.33), (3.34) se rescriu ca

$$(T_{\mathbb{C}})\big|_{Z_0 \oplus Z_1} (\overline{e}_1) = \lambda_0 \cdot \overline{e}_1 + \overline{e}_2,$$

respectiv

$$(T_{\mathbb{C}})\big|_{Z_0 \oplus Z_1} (\sigma(\overline{e}_1)) = \overline{\lambda_0} \cdot \sigma(\overline{e}_1) + \sigma(\overline{e}_2),$$

de unde

$$(T_{\mathbb{C}})\big|_{Z_0 \oplus Z_1} (\overline{x}_1) = a_0 \cdot \overline{x}_1 - b_0 \cdot \overline{y}_1 + \overline{x}_2$$

şi

$$(T_{\mathbb{C}})\big|_{Z_0 \oplus Z_1} (\overline{y}_1) = b_0 \cdot \overline{x}_1 + a_0 \cdot \overline{y}_1 + \overline{y}_2.$$

La felul ca în cazul matricei $\mathbb{W}_{m_0}$, matricea de reprezentare a operatorului

$$(T_{\mathbb{C}})\big|_{Z_0 \oplus Z_1}$$

în baza

$$\mathscr{C} = \{\overline{x}_1, \overline{y}_1, \overline{x}_2, \overline{y}_2, \ldots, \overline{x}_h, \overline{y}_h\} \qquad (Z_0 \oplus Z_1 = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(\mathscr{C}))$$

este

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 & O_2 & \cdots & O_2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 & \cdots & O_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ O_2 & \cdots & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 \\ O_2 & \cdots & O_2 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{\lambda_0} & O_2 & \cdots & O_2 \\ I_2 & E_{\lambda_0} & \cdots & O_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_2 & \cdots & I_2 & E_{\lambda_0} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2h}(\mathbb{R}), \tag{3.35}$$

unde

$$E_{\lambda_0} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Aşadar, *restricţia operatorului liniar complex* $(T_{\mathbb{C}})\big|_{Z_0 \oplus Z_1}$ *la realificatul* $Z_{01} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathscr{C})$ *al spaţiului liniar* $Z_0 \oplus Z_1$ *este operatorul liniar real* $T\big|_{Z_{01}}$ *cu matricea de reprezentare* $\mathbb{J}$ *în baza* $\mathscr{C}$.

În concluzie, pentru operatorii liniari reali, matricele Jordan elementare J_k^{λ} din (3.19), (3.20) sunt înlocuite cu matrice (3.35) atunci când $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ [10, pag. 129, Theorem 2].

Tehnica descrisă în (3.18), (3.21), (3.22) ne permite modificarea bazelor $\mathscr{B}_2 \cup \mathscr{B}_3$, respectiv $\mathscr{C}$ pentru a înlocui matricea $\mathbb{J}$ cu matricea

$$\mathbb{J}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 & O_2 & \cdots & O_2 \\ \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 & \cdots & O_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ O_2 & \cdots & \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} & O_2 \\ O_2 & \cdots & O_2 & \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ -b_0 & a_0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} E_{\lambda_0} & O_2 & \cdots & O_2 \\ \varepsilon I_2 & E_{\lambda_0} & \cdots & O_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O_2 & \cdots & \varepsilon I_2 & E_{\lambda_0} \end{pmatrix}, \tag{3.36}$$

unde $\varepsilon > 0$. Evident, $\mathbb{J} = \mathbb{J}(1)$.

Capitolul 4
Aplicaţii

4.1 Sumare prin părţi. Produsul Cauchy a două serii. Teorema lui F. Mertens

Fie $E \subseteq \mathbb{C}^n$ un spaţiu liniar m-dimensional peste corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, unde $m \leq n$, cu baza $\mathscr{S}_1$ — introdusă la pagina 1 —.

Fie $\overline{x} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \overline{e}_i \in E$. Cantitatea

$$\|\overline{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |\lambda_i|^2} \tag{4.1}$$

constituie *norma euclidiană*[1] *de index* 2 a spaţiului liniar E [10, pag. 77]. Dubletul $\mathscr{E} = (E, \|\star\|_2)$ este un spaţiu Banach [13, pag. 129].

Lema 4.1. ([9, pag. 109, Theorem 5.1.10]) *Fiind dat şirul $(\overline{a}_p)_{p \geq 0} \subset E$, convergent*[2] *la elementul $\overline{a} \in E$, este valabilă relaţia*

$$\lim_{p \to +\infty} \overline{\mathscr{A}}_p = \overline{a},$$

unde $\overline{\mathscr{A}}_p = \frac{1}{p+1} \cdot \sum\limits_{i=0}^{p} \overline{a}_i$.

Demonstraţie. Cum orice şir convergent este mărginit, introducem numărul $B > 0$ cu proprietatea că

$$\|\overline{a}_p\|_2 \leq B, \qquad p \in \mathbb{N}. \tag{4.2}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există numărul natural $N = N(\varepsilon) \geq 1$ astfel încât

[1] Sau l_2-*norma* [1, pag. 48].

[2] Orice două norme în E sunt echivalente [10, pag. 78, Proposition 1], deci putem studia convergenţa şirurilor în raport cu o normă *convenabilă*.

$$\|\overline{a}_p - \overline{a}\|_2 < \varepsilon, \qquad p \geq N. \tag{4.3}$$

Realizăm estimările

$$\begin{aligned}
\left\|\overline{\mathscr{A}}_p - \overline{a}\right\|_2 &= \left\| \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{i=0}^{p} (\overline{a}_i - \overline{a}) \right\|_2 \\
&\leq \frac{1}{p+1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{N-1} \|\overline{a}_i - \overline{a}\|_2 + \sum_{i=N}^{p} \|\overline{a}_i - \overline{a}\|_2 \right) \\
\text{(vezi (4.3))} \quad &\leq \frac{1}{p+1} \cdot \left[\sum_{i=0}^{N-1} (\|\overline{a}_i\|_2 + \|\overline{a}\|_2) + \sum_{i=N}^{p} \varepsilon \right] \\
\text{(vezi (4.2))} \quad &\leq \frac{1}{p+1} \cdot \left[\sum_{i=0}^{N-1} (2 \cdot B) + \sum_{i=N}^{p} \varepsilon \right] \\
&= \frac{1}{p+1} \cdot [2NB + (p - N + 1)\varepsilon], \qquad p > N,
\end{aligned}$$

de unde

$$\limsup_{p \to +\infty} \left\|\overline{\mathscr{A}}_p - \overline{a}\right\|_2 \leq \varepsilon.$$

Trecem la limită, în ambii membri ai ultimei inegalităţi, $\varepsilon \searrow 0$. $\square$

Exemplul 4.1. Reciproca Lemei 4.1 nu este valabilă. Astfel, în $E = \mathbb{R}$, şirul[3] $(\overline{a}_p)_{p \geq 0}$, unde $\overline{a}_p = (-1)^p$, nu este convergent dar şirul $(\overline{\mathscr{A}}_p)_{p \geq 0}$ converge la 0.

În contextul Lemei 4.1, să considerăm seria $\sum\limits_{p \geq 0} \overline{a}_p$ cu sumele parţiale

$$\overline{A}_{-1} = 0_E, \quad \overline{A}_p = \sum_{i=0}^{p} \overline{a}_i, \, p \in \mathbb{N}.$$

Evident, $\overline{a}_p = \overline{A}_p - \overline{A}_{p-1}$ pentru orice[4] p [9, pag. 102].

Acestei serii îi asociem *mediile Cesàro* de *ordinul* 1,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathscr{A}}^1_p = \frac{\overline{A}^1_p}{p+1} &= \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{i=0}^{p} \overline{A}_i \\
&= \frac{1}{p+1} \cdot \sum_{i=0}^{p} [(p - i + 1) \cdot \overline{a}_i], \quad p \geq 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

---

[3] Păstrăm "bara" de la notaţia vectorilor pentru uniformitate. În Exemplul 4.3 vom identifica, din acelaşi motiv, numerele complexe cu elementele setului $\mathscr{M}_1(\mathbb{C})$.

[4] În particular, convergenţa seriei — adică, convergenţa şirului $(\overline{A}_p)_{p \geq -1}$ — implică faptul că $\lim\limits_{p \to +\infty} \overline{a}_p = 0_E$.

Seria $\sum_{p\geq 0} \overline{a}_p$ se numeşte *sumabilă Cesàro* şi are *suma (Cesàro)* $\overline{S}$ dacă — [9, pag. 109] —

$$\lim_{p\to+\infty} \overline{\mathscr{A}}^1_p = \overline{S} \in E.$$

Cu alte cuvinte, *mediile aritmetice ale sumelor parţiale consecutive ale seriei în discuţie converg la* $\overline{S}$ *în norma* $\|\star\|_2$.

Lema 4.1 ne arată că *orice serie convergentă de elemente din E este şi sumabilă Cesàro iar suma seriei coincide cu suma sa Cesàro.*

Exemplul 4.2. În cazul şirului $(\overline{a}_p)_{p\geq 0}$ din Exemplul 4.1, seria $\sum_{p\geq 0} \overline{a}_p$ are sumele parţiale $(\overline{A}_p)_{p\geq 0}$, unde $\overline{A}_{2p} = 1$, $\overline{A}_{2p+1} = 0$ pentru orice p, deci nu este convergentă. Însă, suma sa Cesàro este $\overline{S} = \frac{1}{2}$ [9, ibid.].

În mulţimea $\mathbb{R}^2$, construim *pătratul OABC*,

$$[OABC] = \{(p,k)|0 \leq p,\, k \leq M\} \cap \mathbb{N}^2,$$

de vârfuri $O = (0,0)$, $A = (M,0)$, $B = (M,M)$ şi $C = (0,M)$. Aici, $M \in \mathbb{N}$. Plecând de la suprafeţele plane $[OAB]$, $[OAC] \subset \mathbb{R}^2$ mărginite de liniile poligonale $[OA] \cup [AB] \cup [BO]$ şi $[OA] \cup [AC] \cup [CO]$ — dreapta OA este *orizontală* iar dreapta OC *verticală* —, introducem mulţimile

$$\Delta = [OAB] \cap \mathbb{N}^2, \qquad \Theta = [OAC] \cap \mathbb{N}^2.$$

Evident, Δ şi Θ reprezintă *jumătăţi* din pătratul $[OABC]$.

Mulţimile Δ, Θ sunt partiţionate în două feluri,

$$\Delta = \bigcup_{p=0}^{M} \Delta_p = \bigcup_{k=0}^{M} \Delta^k,$$

unde

$$\Delta_p = \{(p,k) \in \mathbb{N}^2 | 0 \leq k \leq p\}, \qquad \Delta^k = \{(p,k) \in \mathbb{N}^2 | k \leq p \leq M\},$$

şi

$$\Theta = \bigcup_{p=0}^{M} \Theta_p = \bigcup_{k=0}^{M} \Theta^k,$$

unde

$$\Theta_p = \{(p,k) \in \mathbb{N}^2 | 0 \leq k \leq M-p\}, \qquad \Theta^k = \{(p,k) \in \mathbb{N}^2 | 0 \leq p \leq M-k\}.$$

Afirm că *altă partiţionare a triunghiului* Θ *se face prin linii paralele cu dreapta CA,*

$$\Theta = \bigcup_{v=0}^{M} \Psi_v, \qquad \Psi_v = \{(p,k) | p+k=v\} \cap \mathbb{N}^2.$$

Într-adevăr, pentru orice $(p_0,k_0) \in \Theta$ există *exact* un element $v_0 \in \overline{0,M}$ astfel încât $(p_0,k_0) \in \Psi_{v_0}$. Mai precis,

$$(p_0,k_0) \in \Psi_{p_0+k_0}.$$

Lema 4.2. *Fiind dat şirul* $(\overline{a}_{pk})_{(p,k)\in[OABC]} \subset E$*, au loc identităţile*

$$\sum_{p=0}^{M} \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_{pk} = \sum_{k=0}^{M} \sum_{p=k}^{M} \overline{a}_{pk}, \tag{4.5}$$

respectiv

$$\sum_{p=0}^{M} \sum_{k=0}^{M-p} \overline{a}_{pk} = \sum_{k=0}^{M} \sum_{p=0}^{M-k} \overline{a}_{pk} \tag{4.6}$$

şi

$$\sum_{p=0}^{M} \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_{k(p-k)} = \sum_{p=0}^{M} \sum_{k=0}^{M-p} \overline{a}_{pk}. \tag{4.7}$$

Demonstraţie. Se observă că

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{M} \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_{pk} &= \sum_{p=0}^{M} \sum_{(p,k)\in\Delta_p} \overline{a}_{pk} = \sum_{(p,k)\in\Delta} \overline{a}_{pk} \\ &= \sum_{k=0}^{M} \sum_{(p,k)\in\Delta^k} \overline{a}_{pk} = \sum_{k=0}^{M} \sum_{p=k}^{M} \overline{a}_{pk}.\end{aligned}$$

Apoi,

$$\begin{aligned}\sum_{p=0}^{M} \sum_{k=0}^{M-p} \overline{a}_{pk} &= \sum_{p=0}^{M} \sum_{(p,k)\in\Theta_p} \overline{a}_{pk} = \sum_{(p,k)\in\Theta} \overline{a}_{pk} \\ &= \sum_{k=0}^{M} \sum_{(p,k)\in\Theta^k} \overline{a}_{pk} = \sum_{k=0}^{M} \sum_{p=0}^{M-k} \overline{a}_{pk}.\end{aligned}$$

În sfârşit,

$$\sum_{p=0}^{M}\sum_{k=0}^{p}\overline{a}_{k(p-k)} = \sum_{p=0}^{M}\sum_{(v,w)\in\Psi_p}\overline{a}_{vw} = \sum_{(v,w)\in\Theta}\overline{a}_{vw}$$
$$= \sum_{p=0}^{M}\sum_{(p,k)\in\Theta_p}\overline{a}_{pk} = \sum_{p=0}^{M}\sum_{k=0}^{M-p}\overline{a}_{pk}.$$

Demonstraţia acestor tehnici de *sumare prin părţi* [9, pag. 106] s-a încheiat. □

Fie aplicaţia (operaţia) $\star : E^2 \to E$ pentru care *(i)* există numărul $A \geq 1$ astfel încât

$$\|\overline{e}\star\overline{f}\|_2 \leq A\cdot\|\overline{e}\|_2\cdot\|\overline{f}\|_2,$$

(ii) avem *bi-omogenitate*, adică

$$\lambda\cdot(\overline{e}\star\overline{f}) = (\lambda\cdot\overline{e})\star\overline{f} = \overline{e}\star(\lambda\cdot\overline{f}),$$

şi *(iii) distributivitate* la adunare, adică

$$\overline{e}\star(\overline{f}+\overline{g}) = (\overline{e}\star\overline{f})+(\overline{e}\star\overline{g}),\quad (\overline{e}+\overline{f})\star\overline{g} = (\overline{e}\star\overline{g})+(\overline{f}\star\overline{g}),$$

pentru orice $\overline{e}, \overline{f}, \overline{g}\in E$ şi $\lambda\in\mathbb{K}$.

Exemplul 4.3. Pentru $E=\mathbb{C}$, făcând identificarea $\overline{e}=(z)\equiv z\in\mathbb{C}$, avem

$$\overline{e}\star\overline{f} = (z_1)\star(z_2) = (z_1\cdot z_2)\equiv z_1\cdot z_2,\qquad z_j\in\mathbb{C},\ j\in\{1,2\}.$$

Pentru $E=\mathbb{C}^{q^2}$, unde $q\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, putem realiza identificarea — via (1.11) —

$$\overline{e} = \sum_{j=1}^{q^2} e_j\cdot\overline{i}_j \equiv \begin{pmatrix} e_q & e_{2q} & \cdots & e_{q^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1 & e_{q+1} & \cdots & e_{(q-1)q+1}\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_q(\mathbb{C}).$$

Atunci,

$$\begin{aligned}\overline{e}\star\overline{f} &= \begin{pmatrix} e_q & e_{2q} & \cdots & e_{q^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_1 & e_{q+1} & \cdots & e_{(q-1)q+1}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_q & f_{2q} & \cdots & f_{q^2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1 & f_{q+1} & \cdots & f_{(q-1)q+1}\end{pmatrix}\\ &= (a_{rp})_{1\leq r,\,p\leq q},\end{aligned}$$

unde

$$a_{rp}\equiv(a_{rp}) = \begin{pmatrix} e_r & e_{r+q} & \cdots & e_{r+(q-1)q}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} f_{pq} \\ f_{pq-1} \\ \vdots \\ f_{(p-1)q+1}\end{pmatrix}.$$

Se observă că

$$\begin{aligned}\|\overline{e}\star\overline{f}\|_2 &= \sqrt{\sum_{r,p=1}^{q}|a_{rp}|^2}\\ &\le \sqrt{\sum_{r,p=1}^{q}\left(|e_r|^2+\cdots+|e_{r+(q-1)q}|^2\right)\cdot\left(|f_{pq}|^2+\cdots+|f_{(p-1)q+1}|^2\right)}\\ &= \|\overline{e}\|_2\cdot\|\overline{f}\|_2,\end{aligned}$$

deci $A=1$.

Fie seriile $\sum\limits_{p\ge 0}\overline{a}_p$ şi $\sum\limits_{p\ge 0}\overline{b}_p$ de elemente din spaţiul liniar E. Prin *produsul* lor *Cauchy* înţelegem seria $\sum\limits_{p\ge 0}\overline{c}_p$, unde

$$\overline{c}_p=\sum_{i=0}^{p}\overline{a}_i\star\overline{b}_{p-i},\qquad p\in\mathbb{N},$$

vezi [9, pag. 111].

Lema 4.3. ([9, pag. 112, Theorem 5.2.1]) *Produsul Cauchy a două serii convergente, de sume $\overline{S}_1$ şi $\overline{S}_2$, este sumabil Cesàro şi are suma Cesàro*

$$\overline{S}=\overline{S}_1\star\overline{S}_2. \tag{4.8}$$

Demonstraţie. Introducem numărul $B>0$ cu proprietatea că

$$\|\overline{A}_p-\overline{S}_1\|_2\le B,\qquad \|\overline{B}_p-\overline{S}_2\|_2\le B,\ p\in\mathbb{N}, \tag{4.9}$$

unde $\overline{A}_p=\sum\limits_{i=0}^{p}\overline{a}_i$ şi $\overline{B}_p=\sum\limits_{i=0}^{p}\overline{b}_i$.

Fie $\varepsilon>0$. Există numărul natural $N=N(\varepsilon)\ge 1$ astfel încât

$$\|\overline{A}_p-\overline{S}_1\|_2<\varepsilon,\qquad \|\overline{B}_p-\overline{S}_2\|_2<\varepsilon,\ p\ge N. \tag{4.10}$$

Au loc egalităţile — vezi (4.4) —

$$
\begin{aligned}
(p+1)\cdot\overline{\mathscr{C}}_p^1 &= \overline{C}_p^1 = \sum_{i=0}^{p}\overline{C}_i = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{i}\overline{c}_j = \sum_{i=0}^{p}(p-i+1)\cdot\overline{c}_i\\
&= \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{i}(p-i+1)\cdot(\overline{a}_k\star\overline{b}_{i-k}) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{i}\overline{\zeta}_{ik}\\
\text{(vezi (4.5))}\quad &= \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=k}^{p}\overline{\zeta}_{ik} = \sum_{k=0}^{p}\overline{a}_k\star\sum_{i=k}^{p}(p-i+1)\cdot\overline{b}_{i-k}\\
(r=i-k)\quad &= \sum_{k=0}^{p}\overline{a}_k\star\sum_{r=0}^{p-k}(p-k-r+1)\cdot\overline{b}_r\\
&= \sum_{k=0}^{p}\overline{a}_k\star\sum_{r=0}^{p-k}\overline{B}_r = \sum_{k=0}^{p}\sum_{r=0}^{p-k}\overline{a}_k\star\overline{B}_r = \sum_{k=0}^{p}\sum_{r=0}^{p-k}\overline{\eta}_{kr}\\
\text{(vezi (4.6))}\quad &= \sum_{r=0}^{p}\sum_{k=0}^{p-r}\overline{\eta}_{kr} = \sum_{r=0}^{p}\sum_{k=0}^{p-r}\overline{a}_k\star\overline{B}_r\\
&= \sum_{r=0}^{p}\left(\sum_{k=0}^{p-r}\overline{a}_k\right)\star\overline{B}_r = \sum_{r=0}^{p}\overline{A}_{p-r}\star\overline{B}_r.
\end{aligned}
$$

Pe baza (4.9), (4.10), introducem elementele $\overline{u}_p,\,\overline{v}_p\in E$ prin formulele

$$
\overline{A}_p=\overline{S}_1+\overline{u}_p,\qquad \overline{B}_p=\overline{S}_2+\overline{v}_p,\ p\in\mathbb{N}.
$$

Deducem că

$$
\begin{aligned}
\overline{C}_p^1 &= (p+1)\cdot(\overline{S}_1\star\overline{S}_2)+\overline{S}_1\star\left(\sum_{r=0}^{p}\overline{v}_r\right)+\left(\sum_{r=0}^{p}\overline{u}_{p-r}\right)\star\overline{S}_2+\sum_{r=0}^{p}\overline{u}_{p-r}\star\overline{v}_r\\
&= (p+1)\cdot(\overline{S}_1\star\overline{S}_2)\\
&+ \left[(p+1)\cdot\overline{S}_1\right]\star\left(\frac{1}{p+1}\cdot\sum_{r=0}^{p}\overline{v}_r\right)+\left(\frac{1}{p+1}\cdot\sum_{r=0}^{p}\overline{u}_{p-r}\right)\star\left[(p+1)\cdot\overline{S}_2\right]\\
&+ \sum_{r=0}^{p}\overline{u}_{p-r}\star\overline{v}_r\\
&= (p+1)\cdot(\overline{S}_1\star\overline{S}_2)\\
&+ \left[(p+1)\cdot\overline{S}_1\right]\star\left(\frac{1}{p+1}\cdot\sum_{r=0}^{p}\overline{v}_r\right)+\left(\frac{1}{p+1}\cdot\sum_{r=0}^{p}\overline{u}_r\right)\star\left[(p+1)\cdot\overline{S}_2\right]\\
&+ \sum_{r=0}^{p}\overline{u}_{p-r}\star\overline{v}_r\\
&= (p+1)\cdot(\overline{S}_1\star\overline{S}_2)+\left[(p+1)\cdot\overline{S}_1\right]\star\overline{\mathscr{V}}_p+\overline{\mathscr{U}}_p\star\left[(p+1)\cdot\overline{S}_2\right]\\
&+ \sum_{r=0}^{p}\overline{u}_{p-r}\star\overline{v}_r.
\end{aligned}
$$

Deoarece $\lim_{p\to+\infty} \overline{u}_p = \lim_{p\to+\infty} \overline{v}_p = 0_E$ şi

$$\|\overline{S}_1 \star \overline{\mathscr{V}}_p\|_2 \leq A \cdot \|\overline{S}_1\|_2 \cdot \|\overline{\mathscr{V}}_p\|_2, \qquad \|\overline{\mathscr{U}}_p \star \overline{S}_2\|_2 \leq A \cdot \|\overline{S}_2\|_2 \cdot \|\overline{\mathscr{U}}_p\|_2,$$

Lema 4.1 ne conduce la

$$\lim_{p\to+\infty} \overline{S}_1 \star \overline{\mathscr{V}}_p = \lim_{p\to+\infty} \overline{\mathscr{U}}_p \star \overline{S}_2 = 0_E.$$

Mai departe, pentru $p \geq 2 \cdot N$ — [9, pag. 113] —, facem estimările

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{r=0}^{p} \overline{u}_{p-r} \star \overline{v}_r \right\|_2 &\leq A \cdot \sum_{r=0}^{p} \|\overline{u}_{p-r}\|_2 \cdot \|\overline{v}_r\|_2 \\
&= A \cdot \left(\sum_{r=0}^{N-1} + \sum_{r=N}^{p-N} + \sum_{r=p-N+1}^{p} \right) \|\overline{u}_{p-r}\|_2 \cdot \|\overline{v}_r\|_2 \\
&\leq A \cdot \left(\sum_{r=0}^{N-1} \varepsilon \cdot B + \sum_{r=N}^{p-N} \varepsilon^2 + \sum_{r=p-N+1}^{p} B \cdot \varepsilon \right) \\
&= A \cdot \left(2NB \cdot \varepsilon + (p - 2N + 1) \cdot \varepsilon^2 \right),
\end{aligned}$$

de unde

$$\limsup_{p\to+\infty} \frac{1}{p+1} \cdot \left\| \sum_{r=0}^{p} \overline{u}_{p-r} \star \overline{v}_r \right\|_2 \leq A \cdot \varepsilon^2.$$

Am ajuns la

$$\limsup_{p\to+\infty} \|\overline{\mathscr{C}}_p^1 - \overline{S}_1 \star \overline{S}_2\|_2 \leq A \cdot \varepsilon^2.$$

Trecem la limită, în ambii membri ai ultimei inegalităţi, $\varepsilon \searrow 0$. $\square$

Exemplul 4.4. Fie seria $\sum_{p\geq 0} \overline{a}_p$, unde $\overline{a}_p = \frac{(-1)^p}{\sqrt{p+1}}$, conform [9, pag. 112]. Atunci, termenul general al produsului Cauchy al seriilor $\sum_{p\geq 0} \overline{a}_p$ şi $\sum_{p\geq 0} \overline{b}_p$, unde $\overline{a}_p = \overline{b}_p$ pentru orice $p \in \mathbb{N}$, are forma

$$\overline{c}_p = \sum_{i=0}^{p} \overline{a}_i \cdot \overline{a}_{p-i} = (-1)^p \cdot \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{(i+1)\cdot(p-i+1)}}.$$

Via inegalitatea mediilor, obţinem că

$$
\begin{aligned}
|\overline{c}_p| &= \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{\sqrt{(i+1)\cdot(p-i+1)}} \geq \sum_{i=0}^{p} \frac{2}{p+2} = \frac{2(p+1)}{p+2} \\
&= 2\cdot\left(1-\frac{1}{p+2}\right), \quad p \in \mathbb{N},
\end{aligned}
$$

respectiv

$$\liminf_{p\to+\infty} |\overline{c}_p| \geq 2,$$

adică *produsul Cauchy* $\sum\limits_{p\geq 0} \overline{c}_p$ *nu convergent în* $E = \mathbb{R}$.

Conform [9, pag. 106, Theorem 5.1.5], seria alternantă $\sum\limits_{p\geq 0} \overline{a}_p$ este convergentă.

Cu alte cuvinte, *nu orice produs Cauchy de serii convergente este convergent*.

Lema 4.4. ([9, pag. 113, Corollary]) *Dacă produsul Cauchy a două serii convergente, de sume* $\overline{S}_1$ *şi* $\overline{S}_2$*, este convergent, atunci suma sa are formula (4.8).*

Demonstraţie. Deoarece produsul Cauchy este convergent, el este sumabil Cesàro iar suma sa $\overline{S}$ coincide cu suma Cesàro, vezi Lema 4.1. Pe de altă parte, suma Cesàro are — via Lema 4.3 — valoarea dată în (4.8). □

Teorema 4.1. ([9, pag. 113, Theorem 5.2.2]) *Produsul Cauchy a două serii absolut convergente este absolut convergent.*

Demonstraţie. Dacă seriile $\sum\limits_{p\geq 0} \overline{a}_p$ şi $\sum\limits_{p\geq 0} \overline{b}_p$ sunt absolut convergente, atunci seriile $\sum\limits_{p\geq 0} u_p$, $\sum\limits_{p\geq 0} v_p$, unde

$$u_p = \|\overline{a}_p\|_2, \qquad v_p = \|\overline{b}_p\|_2,\ p \in \mathbb{N},$$

şi

$$\|\overline{c}_p\|_2 = \left\| \sum_{i=0}^{p} \overline{a}_i \star \overline{b}_{p-i} \right\|_2 \leq A \cdot \sum_{i=0}^{p} u_i v_{p-i},$$

sunt convergente. Le notăm sumele cu U, respectiv V.

Se observă că

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{p} \|\overline{c}_i\|_2 &\leq A \cdot \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{i} u_j v_{i-j} \\
\text{(vezi (4.7))} \quad &= A \cdot \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{p-i} u_i v_j = A \cdot \left(\sum_{i=0}^{p} u_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{p-i} v_j\right) \\
&\leq A \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} u_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{+\infty} v_j\right) = A \cdot UV, \quad p \geq 0,
\end{aligned}
$$

de unde $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} \|c_i\|_2 \leq AUV < +\infty$. $\square$

Teorema 4.2. (F. Mertens, [9, pag. 114, Exercise 6]) *Dacă cel puţin una dintre seriile convergente* $\sum\limits_{p\geq 0} \overline{a}_p$, $\sum\limits_{p\geq 0} \overline{b}_p$, *de sume* $\overline{S}_1$ *şi* $\overline{S}_2$, *este absolut convergentă, atunci produsul lor Cauchy este convergent şi are suma* $\overline{S}_1 \star \overline{S}_2$.

Demonstraţie. Să presupunem că seria $\sum\limits_{p\geq 0} \overline{a}_p$ este absolut convergentă.

La fel ca la Lema 4.3, introducem numărul $B > 0$ cu proprietatea că

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|\overline{a}_i\|_2 < B, \quad \|\overline{B}_p - \overline{S}_2\|_2 = \|\overline{v}_p\|_2 < B,\ p \in \mathbb{N}.$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există numărul natural $N = N(\varepsilon) \geq 1$ astfel încât

$$\sum_{j=N}^{+\infty} \|\overline{a}_j\|_2 < \varepsilon, \qquad \|\overline{v}_p\|_2 < \varepsilon,\ p \geq N.$$

Atunci, sunt valabile identităţile

$$\begin{aligned}
\overline{C}_p &= \sum_{i=0}^{p} \overline{c}_i = \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{i} \overline{a}_k \star \overline{b}_{i-k} = \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{i} \overline{\zeta}_{ik} = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=k}^{p} \overline{\zeta}_{ik} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=k}^{p} \overline{a}_k \star \overline{b}_{i-k} = \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k \star \left(\sum_{i=k}^{p} \overline{b}_{i-k}\right) = \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k \star \left(\sum_{r=0}^{p-k} \overline{b}_r\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k \star \overline{B}_{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k \star \left(\overline{S}_2 + \overline{v}_{p-k}\right) = \left(\sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k\right) \star \overline{S}_2 + \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k \star \overline{v}_{p-k} \\
&= \overline{A}_p \star \overline{S}_2 + \sum_{k=0}^{p} \overline{a}_k \star \overline{v}_{p-k}.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Mai departe, deducem că

$$\begin{aligned}
\|\overline{A}_p \star \overline{S}_2 - \overline{S}_1 \star \overline{S}_2\|_2 &= \left\|\left(\overline{A}_p - \overline{S}_1\right) \star \overline{S}_2\right\|_2 \\
&\leq A \cdot \|\overline{S}_2\|_2 \cdot \|\overline{A}_p - \overline{S}_1\|_2 \\
&= A \cdot \|\overline{S}_2\|_2 \cdot \|\overline{u}_p\|_2 \\
&\to 0 \quad \text{când } p \to +\infty,
\end{aligned}$$

respectiv — pentru $p \geq 2 \cdot N$ —

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{k=0}^{p}\overline{a}_k\star\overline{v}_{p-k}\right\|_2 &\leq A\cdot\sum_{k=0}^{p}\|\overline{a}_k\|_2\cdot\|\overline{v}_{p-k}\|_2 = A\cdot\left(\sum_{k=0}^{p-N}+\sum_{k=p-N+1}^{p}\right)\|\overline{a}_k\|_2\cdot\|\overline{v}_{p-k}\|_2\\
&\leq A\cdot\left[\sum_{k=0}^{p-N}(\|\overline{a}_k\|_2\cdot\varepsilon)+\left(\sum_{k=p-N+1}^{p}\|\overline{a}_k\|_2\right)\cdot B\right]\\
&\leq A\cdot\left[\left(\sum_{i=0}^{+\infty}\|\overline{a}_i\|_2\right)\cdot\varepsilon+\left(\sum_{j=N}^{+\infty}\|\overline{a}_j\|_2\right)\cdot B\right] < A\cdot(B\cdot\varepsilon+\varepsilon\cdot B)\\
&= 2AB\cdot\varepsilon.
\end{aligned}$$

În concluzie,

$$\left\|\overline{C}_p-\overline{S}_1\star\overline{S}_2\right\|_2 \leq \|\overline{A}_p\star\overline{S}_2-\overline{S}_1\star\overline{S}_2\|_2+\left\|\sum_{k=0}^{p}\overline{a}_k\star\overline{v}_{p-k}\right\|_2,$$

de unde

$$\limsup_{p\to+\infty}\left\|\overline{C}_p-\overline{S}_1\star\overline{S}_2\right\|_2 \leq 2AB\cdot\varepsilon.$$

Trecem la limită, în ambii membri ai ultimei inegalităţi, $\varepsilon\searrow 0$. Am ajuns la

$$\lim_{p\to+\infty}\overline{C}_p=\overline{S}_1\star\overline{S}_2.$$

Dat fiind că *operaţia "$\star$" nu este neapărat comutativă*, trebuie să arătăm că *seria $\sum\limits_{p\geq 0}\overline{a}_p$ nu joacă niciun rol privilegiat în formula (4.11)*.

Plecând de la observaţia că

$$\overline{a}_k\star\overline{b}_{i-k}=\overline{a}_{i-(i-k)}\star\overline{b}_{(i-k)},$$

refacem estimările anterioare. Astfel,

$$\begin{aligned}
\overline{C}_p &= \sum_{i=0}^{p}\overline{c}_i=\sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{i}\overline{a}_k\star\overline{b}_{i-k}=\sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{i}\overline{a}_{i-k}\star\overline{b}_k\\
&= \sum_{i=0}^{p}\sum_{k=0}^{i}\overline{\zeta}_{ik}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{i=k}^{p}\overline{\zeta}_{ik}=\sum_{k=0}^{p}\sum_{i=k}^{p}\overline{a}_{i-k}\star\overline{b}_k\\
&= \sum_{k=0}^{p}\left(\sum_{i=k}^{p}\overline{a}_{i-k}\right)\star\overline{b}_k=\sum_{k=0}^{p}\left(\sum_{r=0}^{p-k}\overline{a}_r\right)\star\overline{b}_k\\
&= \sum_{k=0}^{p}\overline{A}_{p-k}\star\overline{b}_k=\sum_{k=0}^{p}\left(\overline{S}_1+\overline{u}_{p-k}\right)\star\overline{b}_k=\overline{S}_1\star\left(\sum_{k=0}^{p}\overline{b}_k\right)+\sum_{k=0}^{p}\overline{u}_{p-k}\star\overline{b}_k\\
&= \overline{S}_1\star\overline{B}_p+\sum_{k=0}^{p}\overline{u}_{p-k}\star\overline{b}_k,
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Lema 4.5. ([10, pag. 84, Lemma 2]) *Fiind date şirurile* $(A_p)_{p\geq 0}, (B_p)_{p\geq 0} \subset \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$ *astfel încât seriile*

$$\sum_{p\geq 0} A_p, \qquad \sum_{p\geq 0} B_p \tag{4.12}$$

să fie absolut convergente în raport cu l_2*-norma spaţiului* $\mathscr{M}_m(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^{m^2}$*, seria* $\sum\limits_{p\geq 0} C_p$*, unde*

$$C_p = \sum_{k=0}^{p} A_k \cdot B_{p-k}, \qquad p \in \mathbb{N},$$

este absolut convergentă. În plus, suma sa C *este produsul sumelor seriilor din (4.12), adică*

$$C = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} A_i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{+\infty} B_j\right).$$

Demonstraţie. În contextul Exemplului 4.3, introducem operaţia

$$\left(\mathbb{C}^{m^2} \ni\right) \qquad \overline{e} \star \overline{f} = \begin{pmatrix} \mathrm{col}_{(1)}A \\ \vdots \\ \mathrm{col}_{(m)}A \end{pmatrix} \star \begin{pmatrix} \mathrm{col}_{(1)}B \\ \vdots \\ \mathrm{col}_{(m)}B \end{pmatrix}$$
$$\equiv A \star B = A \cdot B, \qquad A, B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C}).$$

Concluzia rezultă din Teorema 4.1. □

4.2 Exponenţiala unei matrice pătrate cu elemente numerice

Fie $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, unde $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Elementul — $A^0 = I_m$ —

$$\mathrm{e}^A = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \cdot A^p = \lim_{p\to+\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{i!} \cdot A^i = \lim_{p\to+\infty} \overline{A}_p$$
$$\in \mathscr{M}_m(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^{m^2}$$

se numeşte *exponenţiala*[5] matricei A. Aici, $\overline{A}_p = \sum\limits_{i=0}^{p} \overline{a}_i$ şi $\overline{a}_p = \frac{1}{p!} \cdot A^p$ pentru orice p.

[5] În limba engleză, *exponential of A*, [15, pag. 12].

În contextul Lemei 4.5, au loc relaţiile

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{v,w=1}^{m} |a_{vw}|^2}, \qquad A = (a_{vw})_{1\le v,w\le m},$$

respectiv

$$\|A^2\|_2 = \|A \star A\|_2 \le (\|A\|_2)^2.$$

Prin inducţie matematică, probăm că

$$\|A^p\|_2 \le (\|A\|_2)^p, \qquad p \in \mathbb{N}\setminus\{0\},$$

iar de aici, dat fiind că seria numerică $\sum\limits_{p\ge 0} \frac{1}{p!}\cdot(\|A\|_2)^p$ este convergentă — are suma e^s, unde $s = \|A\|_2$ —, deducem că *seria* $\sum\limits_{p\ge 0} \overline{a}_p$ *este absolut convergentă în spaţiul liniar* $E = \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$.

Teorema 4.3. ([15, pag. 13]) *Fie* $A, B \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$. *Au loc relaţiile următoare:*
(i) *dacă* $A\cdot B = B\cdot A$, *atunci*

$$e^{A+B} = e^A\cdot e^B, \qquad e^A\cdot e^B = e^B\cdot e^A;$$

(ii)

$$e^{O_m} = I_m, \qquad \left(e^A\right)^{-1} = e^{-A};$$

(iii) *dacă*[6] $A \sim B$, *atunci* $e^A \sim e^B$;
(iv) ([10, pag. 89, Problem 12]) *dacă* $A\cdot B = B\cdot A$, *atunci*

$$A\cdot e^B = e^B\cdot A.$$

Demonstraţie. Partea (i). Sunt valabile egalităţile — folosim binomul lui Newton! —

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{p!}\cdot(A+B)^p = \lim_{p\to+\infty}\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}\cdot(A+B)^i\\
&= \lim_{p\to+\infty}\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{i}\binom{j}{i}\cdot A^j\cdot B^{i-j} = \lim_{p\to+\infty}\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{1}{j!}\cdot A^j\right)\cdot\left[\frac{1}{(i-j)!}\cdot B^{i-j}\right]\\
&= \lim_{p\to+\infty}\sum_{i=0}^{p} C_i, \quad C_i = \sum_{j=0}^{i} A_j \star B_{i-j},
\end{aligned}$$

unde $U_p = \frac{1}{p!}\cdot U^p$ pentru orice $U \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$.

[6] Relaţia de echivalenţă "$\sim$" a fost definită la pagina 6.

Aplicăm Lema 4.5. Astfel,

$$\mathrm{e}^{A+B} = \left(\sum_{j=0}^{+\infty} A_j\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} B_q\right) = \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B.$$

Cea de-a doua identitate rezultă din egalitatea $\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{B+A} = \mathrm{e}^B \cdot \mathrm{e}^A$.

Partea (ii). Concluzia rezultă din relaţiile

$$\begin{aligned} I_m &= I_m + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} \cdot (O_m)^p = \mathrm{e}^{O_m} = \mathrm{e}^{A+(-A)} = \mathrm{e}^{(-A)+A} \\ &= \mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^{-A} = \mathrm{e}^{-A} \cdot \mathrm{e}^A. \end{aligned}$$

Partea (iii). Vom întrebuinţa identitatea (1.18). Într-adevăr, deoarece

$$\begin{aligned} &\left\| P^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \cdot B^i\right) \cdot P - P^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \cdot B^i\right) \cdot P \right\|_2 \\ &\le \left\|P^{-1}\right\|_2 \cdot \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!} \cdot B^i - \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \cdot B^i \right\|_2 \cdot \|P\|_2 \\ &\le \left\|P^{-1}\right\|_2 \cdot \|P\|_2 \cdot \left[\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{j!} \cdot (\|B\|_2)^j\right], \qquad k \ge 0, \end{aligned}$$

deducem că

$$\lim_{k \to +\infty} P^{-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \cdot B^i\right) \cdot P = P^{-1} \cdot \mathrm{e}^B \cdot P.$$

Conform (1.18), avem

$$\begin{aligned} P^{-1} \cdot \mathrm{e}^B \cdot P &= \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \cdot \left(P^{-1} \cdot B^i \cdot P\right) = \lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \cdot A^i \\ &= \mathrm{e}^A. \end{aligned}$$

Partea (iv). Observăm că

$$\begin{aligned} A \cdot B^2 &= (A \cdot B) \cdot B = (B \cdot A) \cdot B = B \cdot (A \cdot B) = B \cdot (B \cdot A) \\ &= B^2 \cdot A. \end{aligned}$$

Mai departe, prin inducţie matematică, stabilim egalitatea

$$A \cdot B^p = B^p \cdot A, \qquad p \in \mathbb{N}.$$

Pentru a trage concluzia, la fel ca anterior, utilizăm distributivitatea înmulţirii matricelor faţă de adunarea acestora. $\square$

4.3 Calculul exponenţialei unei matrice pătrate cu elemente complexe

Fie $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, unde $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Atunci, matricea A poate fi considerată drept *matricea de reprezentare* în baza canonică $\mathscr{S}_1 = \mathscr{BC} = \{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_m\}$ a unui element T din spaţiul liniar complex $L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m)$, şi anume — $A = \mathbb{T}$ —

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \longmapsto A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^m.$$

Conform Teoremei 2.2, există baza $\mathscr{S}_2$ a spaţiului liniar $\mathbb{C}^m$ în raport cu care operatorul T să fie reprezentat de matricea $\mathbb{T}_1$ cu formula

$$\mathbb{T}_1 = \mathbb{D} + \mathbb{N}, \qquad \mathbb{D} \cdot \mathbb{N} = \mathbb{N} \cdot \mathbb{D}.$$

Aici,

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}, \text{ unde } d_i \in \mathbb{C},\, i \in \overline{1,m}, \qquad \mathbb{N}^m = O_m.$$

Deducem că

$$\mathrm{e}^{\mathbb{D}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{d_m} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{\mathbb{N}} = \sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{q!} \cdot \mathbb{N}^q.$$

Teorema 4.3 ne conduce la

$$\mathrm{e}^{\mathbb{T}_1} = \mathrm{e}^{\mathbb{D}} \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{N}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{d_m} \end{pmatrix} \cdot \left(\sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{q!} \cdot \mathbb{N}^q \right).$$

Relaţiile (1.15) arată că există matricea nesingulară $P \in \mathscr{M}_m(\mathbb{C})$ astfel încât

$$A = P \cdot \mathbb{T}_1 \cdot P^{-1}.$$

Plecând de la concluzia (iii) a Teoremei 4.3, stabilim că

$$\mathrm{e}^{A} = P \cdot \mathrm{e}^{\mathbb{T}_1} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{d_m} \end{pmatrix} \cdot \left(\sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{q!} \cdot \mathbb{N}^q \right) \cdot P^{-1}.$$

În plus, formula (1.2) — de trecere de la $\mathscr{BC}$ la $\mathscr{S}_2$ — arată că *vectorii bazei* $\mathscr{S}_2$ *sunt chiar coloanele matricei* P [10, pag. 113]. Vezi (4.14).

Ştim că numerele $(d_i)_{i\in\overline{1,m}}$ de pe diagonala principală a matricei $\mathbb{D}$ sunt eigenvalori — numărate cu multiplicităţile lor algebrice — ale matricei A iar baza $\mathscr{S}_2$ se compune din eigenvectori generalizaţi ai aceleiaşi matrice. Însă este dificil să construim *acea* bază $\mathscr{S}_2$ faţă de care matricea de reprezentare nilpotentă $\mathbb{N}$ să se afle în *forma canonică*. Deoarece matricea

$$\mathbb{N}_0 = P\cdot\mathbb{N}\cdot P^{-1} = P\cdot(\mathbb{T}_1-\mathbb{D})\cdot P^{-1} = A - P\cdot\mathbb{D}\cdot P^{-1}$$

îl reprezintă pe[7] $\mathscr{N}$ în baza canonică $\mathscr{BC}$, avem

$$(\mathbb{N}_0)^m = O_m.$$

În concluzie, ne bazăm în practică pe formula[8]

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^A &= \mathrm{e}^{P\cdot\mathbb{D}\cdot P^{-1}+\mathbb{N}_0} = \mathrm{e}^{P\cdot\mathbb{D}\cdot P^{-1}}\cdot\mathrm{e}^{\mathbb{N}_0} = P\cdot\mathrm{e}^{\mathbb{D}}\cdot P^{-1}\cdot\mathrm{e}^{\mathbb{N}_0}\\
&= P\cdot\mathrm{e}^{\mathbb{D}}\cdot P^{-1}\cdot\mathrm{e}^{A-P\cdot\mathbb{D}\cdot P^{-1}}\\
&= P\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{d_1} & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \mathrm{e}^{d_m}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}\cdot\left[\sum_{q=0}^{m-1}\frac{1}{q!}\left(A-P\cdot\mathbb{D}\cdot P^{-1}\right)^q\right],
\end{aligned}\tag{4.13}$$

vezi [15, pag. 33, Corollary 1].

4.4 Estimarea produsului scalar

Fie $E=\mathbb{R}^m$, unde $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$, şi operatorul $\mathbb{R}$-liniar $T:E\to E$. Fiind date bazele $\mathscr{S}_1=\mathscr{BC}=\{\bar{i}_1,\ldots,\bar{i}_m\}$ — baza canonică — şi $\mathscr{S}=\{\overline{f}_1,\ldots,\overline{f}_m\}$, notăm cu P matricea de schimbare de bază,

$$\begin{aligned}
\left(\overline{f}_1\ \cdots\ \overline{f}_m\right) &= \left(\bar{i}_1\ \cdots\ \bar{i}_m\right)\cdot P = I_m\cdot P = P\\
&= \left(\mathrm{col}_{(1)}P\ \cdots\ \mathrm{col}_{(m)}P\right).
\end{aligned}\tag{4.14}$$

Fie $\overline{u},\overline{v}\in E$ cu expresiile

---

[7] $T=\mathscr{D}+\mathscr{N}$.

[8] Fiind date $B,C\in\mathscr{M}_m(\mathbb{C})$, dacă $B\cdot C=C\cdot B$, atunci şi

$$\begin{aligned}
\left(P\cdot B\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(P\cdot C\cdot P^{-1}\right) &= P\cdot BC\cdot P^{-1} = P\cdot CB\cdot P^{-1}\\
&= \left(P\cdot C\cdot P^{-1}\right)\cdot\left(P\cdot B\cdot P^{-1}\right).
\end{aligned}$$

$$\overline{u} = \sum_{k=1}^{m} u_k^{\mathscr{S}_1} \cdot \overline{i}_k = \sum_{k=1}^{m} u_k^{\mathscr{S}} \cdot \overline{f}_k, \qquad u_k^{\mathscr{S}_1}, u_k^{\mathscr{S}} \in \mathbb{R},$$

respectiv

$$\overline{v} = \sum_{k=1}^{m} v_k^{\mathscr{S}_1} \cdot \overline{i}_k = \sum_{k=1}^{m} v_k^{\mathscr{S}} \cdot \overline{f}_k, \qquad v_k^{\mathscr{S}_1}, v_k^{\mathscr{S}} \in \mathbb{R}.$$

Conform (1.5),

$$\begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}} \\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}.$$

Renumerotăm baza $\mathscr{S}$ ca în (3.28), adică

$$\mathscr{S} = \left\{ \overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_t, \overline{x}_{t+1}, \overline{y}_{t+1}, \overline{x}_{t+3}, \overline{y}_{t+3} \ldots, \overline{x}_{t+2q+1}, \overline{y}_{t+2q+1} \right\},$$

unde vectorii $\overline{e}_k = \overline{f}_k$ sunt eigenvectori generalizaţi corespunzând valorilor proprii reale — numărate împreună cu multiplicităţile lor algebrice — λ_k ale operatorului $T_{\mathbb{C}}$ pentru $1 \le k \le t$ iar vectorii $\overline{e}_{t+2k+1} = \overline{x}_{t+2k+1} + i \cdot \overline{y}_{t+2k+1}$ sunt eigenvectori generalizaţi corespunzând valorilor proprii $\lambda_{t+2k+1} \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ ale operatorului $T_{\mathbb{C}}$ pentru $0 \le k \le q$. De asemeni, $\lambda_{t+2k+2} = \overline{\lambda_{t+2k+1}}$, $k \in \overline{0,q}$.

Introducem numerele

$$vp_{\min} = \min \left\{ \lambda_k, \operatorname{Re} \lambda_{t+2j+1} | k \in \overline{1,t},\ j \in \overline{0,q} \right\} \tag{4.15}$$

şi

$$vp_{\max} = \max \left\{ \lambda_k, \operatorname{Re} \lambda_{t+2j+1} | k \in \overline{1,t},\ j \in \overline{0,q} \right\}. \tag{4.16}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Ţinând seama de procedeul (3.18), matricele Jordan elementare utilizate la construcţia formei canonice Jordan reale a matricei $\mathbb{T}$ de reprezentare a operatorului T în baza $\mathscr{S}$ se înlocuiesc cu matricele din (3.21), (3.22), (3.36). În particular, $\mathscr{S} = \mathscr{S}(\varepsilon)$.

Introducem *produsul scalar* (forma biliniară) $B_{\mathscr{S}} : E \times E \to \mathbb{R}$ via formula

$$B_{\mathscr{S}}(\overline{u}, \overline{v}) = \sum_{k=1}^{m} u_k^{\mathscr{S}} \cdot v_k^{\mathscr{S}} = \left(u_1^{\mathscr{S}} \ \ldots \ u_m^{\mathscr{S}} \right) \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}} \\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}} \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

Au loc relaţiile[9]

[9] Aici, H^t desemnează *transpusa* matricei $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
B_{\mathscr{S}}(\overline{u},\overline{v}) &= \left[\begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} & \dots & u_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\cdot \left(P^{-1}\right)^t\right]\cdot\left[P^{-1}\begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\right]\\
&= \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} & \dots & u_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\cdot\left[\left(P^{-1}\right)^t\cdot P^{-1}\right]\cdot\begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} & \dots & u_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix} G \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}, \qquad G\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}). \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Pentru $\lambda \in (\lambda_k)_{k\in\overline{1,t}}$ eigenvaloare reală a operatorului T, considerăm $\mathbb{R}$-subspaţiul liniar

$$V = \bigcup_{s\geq 0} \mathrm{Ker}\ (T-\lambda\cdot I)^s = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_h\right\} \qquad (4.19)$$

şi operatorul $\mathbb{R}$-liniar $U = T|_V\ : V\to V$. Atunci, dacă $\overline{u} = \sum_{p=1}^{h} u_p\cdot\overline{f}_p \in V$, unde $u_p\in\mathbb{R}$, $p\in\overline{1,h}$, avem[10]

$$\begin{aligned}
U(\overline{u}) &= \sum_{p=1}^{h} u_p\cdot U(\overline{f}_p)\\
&= u_1(\lambda\overline{f}_1+\varepsilon\overline{f}_2)+u_2(\lambda\overline{e}_2+\varepsilon\overline{f}_3)+\cdots+u_h(\lambda\overline{f}_h)\\
&= (\lambda u_1)\overline{f}_1+(\varepsilon u_1+\lambda u_2)\overline{f}_2+\cdots+(\varepsilon u_{h-1}+\lambda u_h)\overline{f}_h,
\end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned}
B_{\mathscr{S}}(U(\overline{u}),\overline{u}) &= (\lambda u_1)\cdot u_1+(\varepsilon u_1+\lambda u_2)\cdot u_2+\cdots+(\varepsilon u_{h-1}+\lambda u_h)\cdot u_h\\
&= \lambda\left(\sum_{p=1}^{h} u_p^2\right)+\varepsilon(u_1u_2+u_2u_3+\cdots+u_{h-1}u_h).
\end{aligned}$$

Estimarea

$$\begin{aligned}
|u_1u_2+u_2u_3+\cdots+u_{h-1}u_h| &\leq |u_1u_2|+|u_2u_3|+\cdots+|u_{h-1}u_h|\\
&\leq \frac{u_1^2+u_2^2}{2}+\frac{u_2^2+u_3^2}{2}+\cdots+\frac{u_{h-1}^2+u_h^2}{2}\\
&\leq \sum_{p=1}^{h} u_p^2 = B_{\mathscr{S}}(\overline{u},\overline{u})
\end{aligned}$$

[10] Pentru simplitate, ne restrângem la un subspaţiu $Z(\overline{e},T)$, vezi pagina 54.

ne conduce la dubla inegalitate

$$(\lambda-\varepsilon)\cdot B_{\mathscr{S}}(\overline{u},\overline{u})\le B_{\mathscr{S}}(U(\overline{u}),\overline{u})\le(\lambda+\varepsilon)\cdot B_{\mathscr{S}}(\overline{u},\overline{u}),\qquad \overline{u}\in V.\quad (4.20)$$

Pentru $\lambda=a+bi\in(\lambda_{t+2k+1})_{k\in\overline{0,q}}$, $a,b\in\mathbb{R}$, eigenvaloare complexă nereală a operatorului T, considerăm $\mathbb{R}$-subspaţiul liniar

$$\begin{aligned} V &= \left\{\left[\bigcup_{s\ge 0}\text{Ker }(T_{\mathbb{C}}-\lambda\cdot I)^s\right]\oplus\left[\bigcup_{s\ge 0}\text{Ker }\left(T_{\mathbb{C}}-\overline{\lambda}\cdot I\right)^s\right]\right\}\cap\mathbb{R}^m\\ &= \text{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\overline{x}_1,\overline{y}_1,\dots,\overline{x}_h,\overline{y}_h\right\}, \end{aligned}\qquad (4.21)$$

unde[11] $\overline{e}_p=\overline{x}_p+i\cdot\overline{y}_p$, şi operatorul $\mathbb{R}$-liniar $U=T|_V:V\to V$. Atunci, dacă $\overline{u}=\sum\limits_{p=1}^{h}\left(u_p^x\cdot\overline{x}_p+u_p^y\cdot\overline{y}_p\right)\in V$, unde u_p^x, $u_p^y\in\mathbb{R}$, $p\in\overline{1,h}$, avem[12]

$$\begin{aligned} U(\overline{u}) &= \sum_{p=1}^{h}u_p^x\cdot U(\overline{x}_p)+u_p^y\cdot U(\overline{y}_p)\\ &= u_1^x(a\overline{x}_1-b\overline{y}_1+\varepsilon\overline{x}_2)+u_1^y(b\overline{x}_1+a\overline{y}_1+\varepsilon\overline{y}_2)\\ &+ u_2^x(a\overline{x}_2-b\overline{y}_2+\varepsilon\overline{x}_3)+u_2^y(b\overline{x}_2+a\overline{y}_2+\varepsilon\overline{y}_3)\\ &+ \cdots+u_h^x(a\overline{x}_h-b\overline{y}_h)+u_h^y(b\overline{x}_h+a\overline{y}_h)\\ &= (u_1^xa+u_1^yb)\overline{x}_1+(-u_1^xb+u_1^ya)\overline{y}_1\\ &+ (u_2^xa+u_2^yb+\varepsilon u_1^x)\overline{x}_2+(-u_2^xb+u_2^ya+\varepsilon u_1^y)\overline{y}_2\\ &+ \cdots+(u_h^xa+u_h^yb+\varepsilon u_{h-1}^x)\overline{x}_h+(-u_h^xb+u_h^ya+\varepsilon u_{h-1}^y)\overline{y}_h, \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} B_{\mathscr{S}}(U(\overline{u}),\overline{u}) &= [(u_1^xa+u_1^yb)\cdot u_1^x+(-u_1^xb+u_1^ya)\cdot u_1^y]\\ &+ [(u_2^xa+u_2^yb+\varepsilon u_1^x)\cdot u_2^x+(-u_2^xb+u_2^ya+\varepsilon u_1^y)\cdot u_2^y]\\ &+ \cdots+[(u_h^xa+u_h^yb+\varepsilon u_{h-1}^x)\cdot u_h^x+(-u_h^xb+u_h^ya+\varepsilon u_{h-1}^y)\cdot u_h^y]\\ &= a\cdot\left[\left(u_1^x\right)^2+\left(u_1^y\right)^2\right]\\ &+ a\cdot\left[\left(u_2^x\right)^2+\left(u_2^y\right)^2\right]+\varepsilon\cdot(u_1^xu_2^x+u_1^yu_2^y)\\ &+ \cdots+a\cdot\left[\left(u_h^x\right)^2+\left(u_h^y\right)^2\right]+\varepsilon\cdot(u_{h-1}^xu_h^x+u_{h-1}^yu_h^y)\\ &= a\cdot\sum_{p=1}^{h}\left[\left(u_p^x\right)^2+\left(u_p^y\right)^2\right]\\ &+ \varepsilon\cdot\left[(u_1^xu_2^x+u_1^yu_2^y)+\cdots+(u_{h-1}^xu_h^x+u_{h-1}^yu_h^y)\right]. \end{aligned}$$

---

[11] Atenţie, pentru a simplifica scrierea, am renotat vectorii. Mai precis, $\overline{x}_p=\overline{x}_{t+2(p-1)+1}$ şi $\overline{y}_p=\overline{y}_{t+2(p-1)+1}$, unde $p\ge 1$.

[12] Restrângem discuţia la subspaţiul Z_{01}, vezi pagina 68.

La fel ca în cazul anterior,

$$\left|(u_1^x u_2^x + u_1^y u_2^y) + \cdots + (u_{h-1}^x u_h^x + u_{h-1}^y u_h^y)\right| \leq \sum_{p=1}^{h} \left[\left(u_p^x\right)^2 + \left(u_p^y\right)^2\right] = B_{\mathscr{S}}(\overline{u},\overline{u}),$$

ceea ce ne conduce la dubla inegalitate

$$(a-\varepsilon)\cdot B_{\mathscr{S}}(\overline{u},\overline{u}) \leq B_{\mathscr{S}}(U(\overline{u}),\overline{u}) \leq (a+\varepsilon)\cdot B_{\mathscr{S}}(\overline{u},\overline{u}), \qquad \overline{u}\in V. \tag{4.22}$$

Există $\mathbb{R}$-subspaţiile liniare $V_0,\ldots,V_s \subseteq E$ date de formulele (4.19), (4.21) şi operatorii $\mathbb{R}$-liniari $U_k : V_k \to V_k$, unde $k \in \overline{0,s}$, corespunzători astfel încât

$$E = \bigoplus_{k=0}^{s} V_k, \qquad T = \bigoplus_{k=0}^{s} U_k.$$

Fie $\overline{u} = \sum_{k=0}^{s} \overline{u}_k \in E$, $\overline{u}_k \in V_k$, $0 \leq k \leq s$. Atunci, pe baza inegalităţilor (4.15), (4.16), (4.20), (4.22), obţinem dubla estimare — vezi [10, pag. 145, Lemma] —

$$\begin{aligned}(vp_{\min}-\varepsilon)\cdot B_{\mathscr{S}}(\overline{u},\overline{u}) &= (vp_{\min}-\varepsilon)\cdot \sum_{k=0}^{s} B_{\mathscr{S}}(\overline{u}_k,\overline{u}_k)\\ &\leq \sum_{k=0}^{s} B_{\mathscr{S}}(U_k(\overline{u}_k),\overline{u}_k)\\ &= B_{\mathscr{S}}(T(\overline{u}),\overline{u})\\ &\leq (vp_{\max}+\varepsilon)\cdot B_{\mathscr{S}}(\overline{u},\overline{u}).\end{aligned}$$

4.5 Exerciţii rezolvate

Detaliile care urmează presupun cunoştinţe de bază despre *teoria sistemelor diferenţiale liniare* [1, 2].

Exerciţiul 4.1. Find dat numărul pozitiv ω, să se rezolve ecuaţia diferenţială ordinară

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \qquad t \geq 0. \tag{4.23}$$

Soluţia exerciţiului 4.1. Transformăm ecuaţia (4.23) în sistemul diferenţial de ordinul întâi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = A\cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad ' = \frac{d}{dt},$$

unde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluţia sistemului are formula

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{At} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad c_k \in \mathbb{R},\, k \in \{1,2\}.$$

Introducem operatorul liniar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, dat de matricea $\mathbb{T} = A$, şi anume

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Lui îi este asociat operatorul complexificat $T_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, cu formula

$$T_{\mathbb{C}}\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right) = A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Pentru a determina valorile proprii ale matricei A, rezolvăm ecuaţia algebrică

$$p_{T_{\mathbb{C}}}(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_2) = \lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

Găsim soluţiile (simple) $\lambda_1 = \lambda = \omega \cdot i$ şi $\lambda_2 = \overline{\lambda} = -\omega \cdot i.$

În $\mathbb{C}^2$, considerăm bazele

$$\mathscr{S}_1 = \mathscr{B}\mathscr{C} = \{\bar{i}_1, \bar{i}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

şi

$$\mathscr{S}_2 = \{\overline{f}, \sigma(\overline{f})\}, \qquad \overline{f} = \overline{x} + i \cdot \overline{y} \in \mathbb{C}^2, \qquad \overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^2,$$

unde $\overline{f}$ este vectorul propriu corespunzător valorii proprii λ a matricei A. Ele sunt folosite pentru aducerea matricei A la forma canonică Jordan (reală şi complexă). Astfel, plecând de la descompunerea

$$\mathbb{C}^2 = \mathrm{Ker}\,(T_{\mathbb{C}} - \lambda \cdot I) \oplus \mathrm{Ker}\,(T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda} \cdot I),$$

avem relaţiile

$$\left(T_{\mathbb{C}}(\bar{i}_1)\, T_{\mathbb{C}}(\bar{i}_2)\right) = \left(\bar{i}_1\, \bar{i}_2\right) \cdot A$$

şi

$$\begin{aligned} \left(T_{\mathbb{C}}(\overline{f})\, T_{\mathbb{C}}(\sigma(\overline{f}))\right) &= \left(\overline{f}\, \sigma(\overline{f})\right) \cdot W_1 \\ &= \left(\overline{f}\, \sigma(\overline{f})\right) \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

respectiv — aici, $\lambda = \alpha + \beta \cdot i$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ —

$$\begin{aligned}(T_{\mathbb{C}}(\overline{x})\, T_{\mathbb{C}}(\overline{y})) &= (T(\overline{x})\, T(\overline{y})) \\ &= (\overline{x}\, \overline{y}) \cdot W_2 \\ &= (\overline{x}\, \overline{y}) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \\ &= (\overline{x}\, \overline{y}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Introducem matricele

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ r_3 & r_4 \end{pmatrix}$$

de schimbare a bazelor în $\mathbb{C}^2$, $\mathbb{R}^2$, adică

$$\left(\overline{f}\ \sigma(\overline{f})\right) = \left(\bar{i}_1\, \bar{i}_2\right) \cdot P_1 = I_2 \cdot P_1 = P_1 \tag{4.24}$$

şi

$$(\overline{x}\, \overline{y}) = \left(\bar{i}_1\, \bar{i}_2\right) \cdot P_2 = P_2, \tag{4.25}$$

de unde

$$A = P_1 \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} \cdot P_1^{-1} = P_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot P_2^{-1}. \tag{4.26}$$

Reorganizăm egalităţile (4.26) sub forma

$$P_1 \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix} = A \cdot P_1, \qquad P_2 \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = A \cdot P_2$$

şi obţinem două sisteme algebrice liniare în necunoscutele p_k, r_k, unde $k \in \overline{1,4}$,

$$\begin{cases} i\omega \cdot p_1 = p_3 \\ -i\omega \cdot p_2 = p_4 \\ i\omega \cdot p_3 = -\omega^2 \cdot p_1 \\ -i\omega \cdot p_4 = -\omega^2 \cdot p_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\omega \cdot r_2 = r_3 \\ \omega \cdot r_1 = r_4 \\ -\omega \cdot r_4 = -\omega^2 \cdot r_1 \\ \omega \cdot r_3 = -\omega^2 \cdot r_2. \end{cases} \tag{4.27}$$

Observăm că, la fiecare din sistemele precedente, ultimele două ecuaţii sunt echivalente cu primele două ecuaţii. Atunci, sistemelor — cu câte o infinitate de soluţii fiecare —

$$\begin{cases} i\omega \cdot p_1 = p_3 \\ -i\omega \cdot p_2 = p_4, \end{cases} \qquad \begin{cases} -\omega \cdot r_2 = r_3 \\ \omega \cdot r_1 = r_4 \end{cases}$$

le alegem soluţiile netriviale

$$p_1 = p_2 = 1,\, p_3 = -p_4 = i\omega, \qquad r_1 = r_2 = 1,\, r_3 = -r_4 = -\omega.$$

Am ajuns la

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & -i\omega \end{pmatrix}, \qquad P_1^{-1} = \frac{1}{2\omega i} \cdot \begin{pmatrix} i\omega & 1 \\ i\omega & -1 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

şi

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\omega & \omega \end{pmatrix}, \qquad P_2^{-1} = \frac{1}{2\omega} \cdot \begin{pmatrix} \omega & -1 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.29}$$

Testarea vectorilor proprii. Conform (4.24), vectorul $\overline{f}$ este dat de prima coloană a matricei P_1,

$$\begin{aligned} \overline{f} &= \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} = \overline{x} + i \cdot \overline{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} \\ &= z_1 \cdot \overline{i}_1 + z_2 \cdot \overline{i}_2, \qquad z_1 = 1,\, z_2 = i\omega. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Deducem că

$$\begin{aligned} (T_{\mathbb{C}} - \lambda \cdot I)\,(\overline{f}) &= \left(\overline{i}_1\, \overline{i}_2\right) \cdot (\mathbb{T} - \lambda \cdot I_2) \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \\ &= I_2 \cdot \begin{pmatrix} -i\omega & 1 \\ -\omega^2 & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i\omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{C}^2}. \end{aligned}$$

Relaţiile (4.25) arată că vectorii $\overline{x}$, $\overline{y}$ din (4.30) alcătuiesc coloanele matricei P_2, ceea ce, la prima vedere, nu pare adevărat. În fapt, cum sistemele algebrice (4.27) au o infinitate de soluţii, vectorii în discuţie alătuiesc coloanele *uneia* dintre matricele P_2 posibile! Introducând matricea

$$P_2^{\text{nou}} = (\overline{x}\,\overline{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix},$$

stabilim că

$$\begin{aligned} A \cdot P_2^{\text{nou}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \\ &= P_2^{\text{nou}} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De asemeni, plecând de la matricea P_2, observăm că vectorul

$$\begin{aligned}\overline{u} &= \mathrm{col}_{(1)}P_2 + i\cdot\mathrm{col}_{(2)}P_2 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -\omega+i\omega\end{pmatrix}\\ &= z_3\cdot\bar{i}_1 + z_4\cdot\bar{i}_2, \qquad z_3 = 1+i,\, z_4 = -\omega+i\omega,\end{aligned}$$

statisface egalităţile

$$\begin{aligned}(T_{\mathbb{C}} - \lambda\cdot I)(\overline{u}) = \begin{pmatrix}\bar{i}_1 & \bar{i}_2\end{pmatrix}\cdot(\mathbb{T}-\lambda\cdot I_2)\cdot\begin{pmatrix} z_3\\ z_4\end{pmatrix}\\ &= I_2\cdot\begin{pmatrix} -i\omega & 1\\ -\omega^2 & -i\omega\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1+i\\ -\omega+i\omega\end{pmatrix}\\ &= 0_{\mathbb{C}^2},\end{aligned}$$

adică este eigenvector al operatorului $T_{\mathbb{C}}$.

Calculul exponenţialei matricei A. Sunt valabile relaţiile

$$\mathrm{e}^{t\cdot A} = P_1\cdot\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\lambda t} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\bar{\lambda} t}\end{pmatrix}\cdot P_1^{-1} \tag{4.31}$$

şi — vezi Exerciţiul 4.2 —

$$\mathrm{e}^{t\cdot A} = P_2\cdot\mathrm{e}^{\alpha t}\begin{pmatrix}\cos(\beta t) & \sin(\beta t)\\ -\sin(\beta t) & (\cos\beta t)\end{pmatrix}\cdot P_2^{-1}. \tag{4.32}$$

Via (4.28), (4.31), avem egalităţile

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{tA}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ i\omega & -i\omega\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\omega t)+i\sin(\omega t) & 0\\ 0 & \cos(\omega t)-i\sin(\omega t)\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2\omega i}\begin{pmatrix} i\omega & 1\\ i\omega & -1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2\omega i}\begin{pmatrix}2i\omega\cos(\omega t) & 2i\sin(\omega t)\\ -2i\omega^2\sin(\omega t) & 2i\omega\cos(\omega t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

La fel, folosind (4.29), (4.32), deducem că

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{tA}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -\omega & \omega\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2\omega}\begin{pmatrix}\omega & -1\\ \omega & 1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2\omega}\begin{pmatrix}2\omega\cos(\omega t) & 2\sin(\omega t)\\ -2\omega^2\sin(\omega t) & 2\omega\cos(\omega t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\omega t) & \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\\ -\omega\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Soluţia ecuaţiei diferenţiale. Am ajuns la

$$\begin{aligned} x(t) = x_1(t) &= c_1 \cdot \cos(\omega t) + \frac{c_2}{\omega} \cdot \sin(\omega t) \\ &= C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t), \qquad C_k \in \mathbb{R}, \qquad k \in \{1,2\}, \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} x'(t) = x_2(t) &= -c_1 \omega \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t) \\ &= -C_1 \omega \cdot \sin(\omega t) + C_2 \omega \cdot \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Calculul s-a încheiat. $\square$

Exerciţiul 4.2. Fiind date matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ -c_2 & c_1 \end{pmatrix},$$

să se arate că sunt valabile formulele

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{a_1 t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{a_2 t} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{bt} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{e}^{tC} = \mathrm{e}^{c_1 t} \cdot \begin{pmatrix} \cos(c_2 t) & \sin(c_2 t) \\ -\sin(c_2 t) & \cos(c_2 t) \end{pmatrix},$$

unde $a_k, b \in \mathbb{C}$, respectiv $c_k, t \in \mathbb{R}$, $k \in \{1,2\}$.

Soluţia exerciţiului 4.2. Vezi [15, pag. 15]. $\square$

Exerciţiul 4.3. Să se rezolve sistemul diferenţial liniar

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 - 3x_2 \\ x_2' = 2x_2. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 4.3. Începem cu *calculul valorilor proprii ale matricei* A a sistemului liniar, unde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru le a determina, rezolvăm ecuaţia algebrică

$$\det(A - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

Găsim soluţiile (simple, reale) $\lambda_1 = -1$ şi $\lambda_2 = 2$.

Ne aflăm în situaţia *primei părţi* a proprietăţii $(\mathscr{H}\mathscr{S})$ — vezi Lema 2.12 —, deci

$$\mathbb{R}^2 = \mathrm{Ker}(T - \lambda_1 \cdot I) \oplus \mathrm{Ker}(T - \lambda_2 \cdot I),$$

unde $\mathbb{T} = A$.

La fel ca în rezolvarea Exerciţiului 4.1, introducem matricea

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

astfel încât

$$\begin{aligned}
P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -p_1 & 2p_2 \\ -p_3 & 2p_4 \end{pmatrix} \qquad (4.33) \\
&= A \cdot P \\
&= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & p_4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -p_1 - 3p_3 & -p_2 - 3p_4 \\ 2p_3 & 2p_4 \end{pmatrix}. \qquad (4.34)
\end{aligned}$$

Egalând prima linie a matricelor din (4.33), (4.34) — element cu element —, ajungem la sistemul algebric liniar

$$\begin{cases} -p_1 = -p_1 - 3p_3 \\ 2p_2 = -p_2 - 3p_4, \end{cases}$$

de unde rezultă că $p_3 = 0$ şi $p_2 = -p_4$. Cea de-a doua linie a matricelor din (4.33), (4.34) nu ne conduce la nimic nou,

$$\begin{cases} -p_3 = 2p_3 \\ 2p_4 = 2p_4. \end{cases}$$

Pentru $p_1 = p_2 = 1$, obţinem

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1}.$$

Testarea vectorilor proprii. Au loc egalităţile

$$(A - \lambda_1 \cdot I_2) \cdot \mathrm{col}_{(1)} P = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

respectiv

$$(A - \lambda_2 \cdot I_2) \cdot \mathrm{col}_{(2)} P = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De asemeni,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\mathrm{col}_{(1)} P \oplus \mathbb{R}\mathrm{col}_{(2)} P = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{ \mathrm{col}_{(1)} P, \mathrm{col}_{(2)} P \right\}.$$

Calculul exponenţialei matricei A. Sunt valabile relaţiile — vezi Exerciţiul 4.2 —

$$e^{t\cdot A} = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

de unde

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluţia sistemului diferenţial. Am ajuns la

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad c_k \in \mathbb{R}, \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 \left(e^{-t} - e^{2t}\right) \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1 + c_2) e^{-t} - c_2 e^{2t} \\ c_2 e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d_1 e^{-t} - d_2 e^{2t} \\ d_2 e^{2t} \end{pmatrix}, \qquad d_k \in \mathbb{R},\, k \in \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Calculul s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.4. *([15, pag. 34, Example 1])* Să se rezolve sistemul diferenţial liniar

$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 \\ x_2' = -x_1 + x_2. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 4.4. Începem cu *calculul valorilor proprii ale matricei A* a sistemului liniar, unde

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pentru le a determina, rezolvăm ecuaţia algebrică

$$\det\left(A - \lambda \cdot I_2\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0.$$

Găsim soluţia (de multiplicitate algebrică $m = 2$, reală) $\lambda = 2$.

Conform (4.13), există matricea nesingulară $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ şi matricea nilpotentă $\mathbb{N}_0 \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$A = P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1} + \mathbb{N}_0, \qquad \mathbb{N}_0^2 = O_2.$$

Aici,

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \cdot I_2, \qquad e^{t\mathbb{D}} = e^{\lambda t} \cdot I_2$$

iar coloanele matricei P sunt eigenvectori generalizaţi, liniar independenţi peste $\mathbb{R}$, ai valorii proprii λ a operatorului liniar T, unde $\mathbb{T} = A$.

Forma specială a matricei $\mathbb{D}$ — operatorul $\mathscr{D}$, reprezentat de ea, este un operator diagonal — ne conduce la următoarea descompunere a matricei A,

$$A = \mathbb{D} + \mathbb{N}_0 = \lambda \cdot I_2 + \mathbb{N}_0,$$

de unde

$$\mathbb{N}_0 = A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculul exponenţialei matricei A. Sunt valabile relaţiile

$$\begin{aligned} e^{t\cdot A} &= P \cdot e^{t\mathbb{D}} \cdot P^{-1} \cdot (I_2 + t \cdot \mathbb{N}_0) = e^{t\mathbb{D}} \cdot (I_2 + t \cdot \mathbb{N}_0) \\ &= e^{2t} I_2 \cdot \left(I_2 + t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Soluţia sistemului diferenţial. Am ajuns la

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= e^{tA} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \qquad c_k \in \mathbb{R}, k \in \{1,2\}, \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} c_1(1+t) + c_2 t \\ -c_1 t + c_2(1-t) \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 + (c_1 + c_2)t \\ c_2 - (c_1 + c_2)t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculul s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.5. *([15, pag. 35, Example 3])* Să se rezolve sistemul diferenţial liniar

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 \\ x_3' = x_1 + x_2 + 2x_3. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 4.5. Începem cu *calculul valorilor proprii ale matricei A* a sistemului liniar, unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pentru le a determina, rezolvăm ecuaţia algebrică

$$\det(A - \lambda \cdot I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0.$$

Găsim soluţiile $\lambda_1 = 1$ (simplă, reală) şi $\lambda_2 = 2$ (de multiplicitate algebrică $m = 2$, reală).

Matricea de reprezentare a operatorului diagonalizabil $\mathscr{D}$, în baza $\mathscr{S}_1 = \mathscr{BC} = \{\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3\}$ a spaţiului liniar $\mathbb{R}^3$, este

$$\mathbb{D}_0 = P \cdot \mathbb{D} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot P^{-1},$$

unde $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Construcţia matricei P. Coordonatele vectorului propriu $\overline{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, corespunzând valorii proprii λ_1 a matricei A, verifică sistemul algebric liniar

$$(A - \lambda_1 \cdot I_3) \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\begin{cases} -u^1 + u^2 = 0 \\ u^1 + u^2 + u^3 = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $u^2 = u^1$ şi $u^3 = -2u^1$. Pentru $u^1 = 1$, obţinem

$$\overline{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Coordonatele vectorului propriu $\overline{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, corespunzând valorii proprii λ_2 a matricei A, verifică sistemul algebric liniar

$$(A-\lambda_2\cdot I_3)\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v^1\\v^2\\v^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

de unde $v^1=v^2=0$, adică λ_2-*eigenspaţiul operatorului* T, unde $\mathbb{T}=A$, *este unidimensional*. Alegem vectorul propriu

$$\overline{v}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Pentru a putea stabili baza $\mathscr{S}_2$ — vectorii săi sunt coloanele matricei P —, trebuie determinat un vector propriu generalizat $\overline{w}=\begin{pmatrix}w^1\\w^2\\w^3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, corespunzând valorii proprii λ_2 a matricei A, care *să fie liniar independent* peste $\mathbb{R}$ *faţă de setul* $\{\overline{u},\overline{v}\}$. Astfel, sistemul algebric liniar

$$(A-\lambda_2\cdot I_3)^2\begin{pmatrix}w^1\\w^2\\w^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\-2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w^1\\w^2\\w^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w^1\\w^1\\-2w^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

ne conduce la $w^1=0$. Optăm pentru eigenvectorul generalizat

$$\overline{w}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Am ajuns la

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix},$$

de unde

$$\mathbb{D}_0=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&2&0\\2&0&2\end{pmatrix}$$

şi

$$\mathbb{N}_0=A-\mathbb{D}_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix},\qquad \mathbb{N}_0^2=O_3.$$

Calculul exponenţialei matricei A. Sunt valabile relaţiile

$$\begin{aligned}
e^{t\cdot A} &= e^{t\cdot \mathbb{D}_0}\cdot(I_3+t\cdot\mathbb{N}_0) = P\cdot e^{t\cdot\mathbb{D}}\cdot P^{-1}\cdot(I_3+t\cdot\mathbb{N}_0)\\
&= \begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^t&0&0\\0&e^{2t}&0\\0&0&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-t&t&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}e^t&0&0\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&0\\-2e^t+(2-t)e^{2t}&te^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Soluţia sistemului diferenţial. Am ajuns la

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix} &= e^{tA}\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}, \qquad c_k\in\mathbb{R},\ k\in\overline{1,3},\\
&= \begin{pmatrix}e^t&0&0\\e^t-e^{2t}&e^{2t}&0\\-2e^t+(2-t)e^{2t}&te^{2t}&e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}c_1e^t\\c_1e^t+(c_2-c_1)e^{2t}\\-2c_1e^t+[2c_1+c_3+(c_2-c_1)t]e^{2t}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Calculul s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.6. *([15, pag. 36, Example 4])* Să se rezolve sistemul diferenţial liniar

$$\begin{cases}x_1' = -x_2\\x_2' = x_1\\x_3' = -x_4\\x_4' = 2x_1+x_3.\end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 4.6. Începem cu *calculul valorilor proprii ale matricei* A a sistemului liniar, unde

$$A = \begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\2&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Pentru le a determina, rezolvăm ecuaţia algebrică

$$\det(A-\lambda\cdot I_4) = \begin{vmatrix}-\lambda&-1&0&0\\1&-\lambda&0&0\\0&0&-\lambda&-1\\2&0&1&-\lambda\end{vmatrix} = (1+\lambda^2)^2 = 0.$$

Găsim soluţiile $\lambda_1=\lambda=i$ (de multiplicitate algebrică $m_1=2$, complexă) şi $\lambda_2=\overline{\lambda}=-i$ (de multiplicitate algebrică $m_2=2$, complexă).

Are loc descompunerea

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}^4 &= \left[\bigcup_{k\geq 0} \mathrm{Ker}\,(T_{\mathbb{C}} - \lambda\cdot I)^k\right] \oplus \left[\bigcup_{k\geq 0} \mathrm{Ker}\left(T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda}\cdot I\right)^k\right] \\
&= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\overline{u}, \overline{U}\right\} \oplus \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\sigma(\overline{u}), \sigma(\overline{U})\right\} \\
&= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\overline{u}, \sigma(\overline{u})\right\} \oplus \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\overline{U}, \sigma(\overline{U})\right\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\overline{x}, \overline{y}\right\} \oplus \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\overline{X}, \overline{Y}\right\} \\
&= \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{\overline{x}, \overline{y}, \overline{X}, \overline{Y}\right\}, \qquad \overline{x}, \overline{y}, \overline{X}, \overline{Y} \in \mathbb{R}^4,
\end{aligned}$$

unde $\overline{u} = \overline{x} + i\cdot\overline{y}$, $\overline{U} = \overline{X} + i\cdot\overline{Y}$ şi $\sigma(\overline{u})$, $\sigma(\overline{U})$ sunt eigenvectori generalizaţi, corespunzând valorilor proprii $\lambda_{1,2}$, ai complexificatului $T_{\mathbb{C}}$. Aici, operatorul $\mathbb{R}$-liniar T este reprezentat în baza $\mathscr{S}_1 = \mathscr{BC} = \{\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3, \bar{i}_4\}$ a spaţiului vectorial $\mathbb{R}^4$ de matricea $\mathbb{T} = A$.

Matricea de reprezentare a operatorului semisimplu $\mathscr{D}$ — din $T = \mathscr{D} + \mathscr{N}$ —, în baza $\mathscr{S}_1$ a spaţiului liniar $\mathbb{R}^4$, este

$$\mathbb{D}_0 = P\cdot\mathbb{D}\cdot P^{-1} = P\cdot\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}\cdot P^{-1},$$

unde $\lambda = \alpha + \beta\cdot i$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, respectiv $P \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ şi

$$P = \left(\mathrm{col}_{(1)}P\ \mathrm{col}_{(2)}P\ \mathrm{col}_{(3)}P\ \mathrm{col}_{(4)}P\right) = \left(\overline{x}\ \overline{y}\ \overline{X}\ \overline{Y}\right).$$

Construcţia matricei P. Coordonatele vectorului propriu $\overline{u} = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$, corespunzând valorii proprii λ_1 a matricei A, verifică sistemul algebric liniar

$$(A - \lambda_1\cdot I_4)\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de unde

$$\begin{cases} -iu^1 - u^2 = 0 \\ u^1 - iu^2 = 0 \\ -iu^3 - u^4 = 0 \\ 2u^1 + u^3 - iu^4 = 0. \end{cases}$$

Din primele două ecuaţii rezultă că $u^2 = -iu^1$. Ultimele două ecuaţii ne conduc la $u^4 = -iu^3$ şi — inserând formula lui u^4 în ultima ecuaţie — $u^1 = 0$. Aşadar, $u^1 = u^2 = 0$. Ţinând seama de cea de-a treia ecuaţie a sistemului algebric, deducem că

$$\operatorname{Ker}(T_{\mathbb{C}} - \lambda \cdot I) = \mathbb{C}\overline{u}, \qquad \overline{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \overline{x} + i \cdot \overline{y},$$

de unde, obligatoriu,

$$\operatorname{Ker}\left(T_{\mathbb{C}} - \overline{\lambda} \cdot I\right) = \mathbb{C}\sigma(\overline{u}) = \mathbb{C}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$$

iar sistemul de vectori $\{\overline{u}, \sigma(\overline{u})\}$ este liniar independent peste $\mathbb{C}$.

Mai departe, trebuie determinat un vector propriu generalizat $\overline{U} = \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$, corespunzând valorii proprii λ_1 a matricei A, astfel încât *vectorii* $\overline{u}$, $\overline{U}$ *să fie liniar independenţi peste* $\mathbb{C}$. În particular,

$$\overline{U} \in \operatorname{Ker}(T_{\mathbb{C}} - \lambda_1 \cdot I)^2 \setminus \operatorname{Ker}(T_{\mathbb{C}} - \lambda_1 \cdot I).$$

Sistemul algebric liniar

$$(A - \lambda_1 \cdot I_4)^2 \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2i & 0 & 0 \\ -2i & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 2i \\ -4i & -2 & -2i & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U^1 \\ U^2 \\ U^3 \\ U^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ne conduce la

$$\begin{cases} -2U^1 + 2iU^2 = 0 \\ -2iU^1 - 2U^2 = 0 \\ -2U^1 - 2U^3 + 2iU^4 = 0 \\ -4iU^1 - 2U^2 - 2iU^3 - 2U^4 = 0. \end{cases}$$

Primele două ecuaţii sunt echivalente cu $U^1 = iU^2$. Inserând această expresie a necunoscutei U^1 în ultima ecuaţie, deducem că ultimele două ecuaţii ale sistemului algebric sunt echivalente cu $U^1 + U^3 - iU^4 = 0$. Aşadar,

$$\begin{cases} U^1 = iU^2 \\ U^1 + U^3 - iU^4 = 0. \end{cases}$$

Optăm pentru eigenvectorul generalizat

$$\overline{U}=\begin{pmatrix}U^1\\U^2\\U^3\\U^4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}i\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}+i\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\overline{X}+i\cdot\overline{Y}.$$

Am ajuns la

$$P=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix},\qquad P^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},$$

de unde

$$\mathbb{D}_0=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&-1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$$

şi

$$\mathbb{N}_0=A-\mathbb{D}_0=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&-1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \mathbb{N}_0^2=O_4.$$

Calculul exponenţialei matricei A. Sunt valabile relaţiile

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{t\cdot A}&=\mathrm{e}^{t\cdot\mathbb{D}_0}\cdot(I_4+t\cdot\mathbb{N}_0)=P\cdot\mathrm{e}^{t\cdot\mathbb{D}}\cdot P^{-1}\cdot(I_4+t\cdot\mathbb{N}_0)\\
&=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\\0&-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t&\sin t&0&0\\-\sin t&\cos t&0&0\\0&0&\cos t&\sin t\\0&0&-\sin t&\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-t&1&0\\t&0&0&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t&0&0\\\sin t&\cos t&0&0\\0&\sin t&\cos t&-\sin t\\\sin t&0&\sin t&\cos t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&-t&1&0\\t&0&0&1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\cos t&-\sin t&0&0\\\sin t&\cos t&0&0\\-t\sin t&\sin t-t\cos t&\cos t&-\sin t\\\sin t+t\cos t&-t\sin t&\sin t&\cos t\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Soluţia sistemului diferenţial. Obţinem că

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{tA} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}, \qquad c_k \in \mathbb{R},\, k \in \overline{1,4},$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \cos t - c_2 \sin t \\ c_1 \sin t + c_2 \cos t \\ (c_2 - c_4 - c_1 t)\sin t + (c_3 - c_2 t)\cos t \\ (c_1 + c_3 - c_2 t)\sin t + (c_4 + c_1 t)\cos t \end{pmatrix}.$$

Calculul s-a încheiat. □

4.6 Soluţii fundamentale ale ecuaţiilor diferenţiale liniare şi omogene

Se consideră ecuaţia diferenţială ordinară

$$x^{(p)} + a_1 x^{(p-1)} + \cdots + a_{p-1} x' + a_p x = 0, \quad t \geq 0, \tag{4.35}$$

unde $a_i \in \mathbb{R}$, $i \in \overline{1,p}$, şi $p \geq 2$. Aici, $x = x(t)$, $x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}$ pentru orice $k \in \overline{1,p}$.

Ecuaţia (4.35) se organizează ca sistem diferenţial liniar de ordinul I,

$$\overline{x}' = A\overline{x}, \tag{4.36}$$

unde[13]

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ x'' \\ \vdots \\ x^{(p-2)} \\ x^{(p-1)} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{4.37}$$

Exerciţiul 4.7. Fie numerele λ, $b_i \in \mathbb{C}$, $i \in \overline{1,p}$, unde $p \geq 3$, şi determinanţii

$$R(b_1, b_2, \cdots, b_p, \lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{p-1} & b_p \end{vmatrix},$$

---

[13] $E = \mathbb{C}^p$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\mathbb{T} = A$. Vezi şi definiţia (4.48).

respectiv

$$P(b_1,b_2,\cdots,b_p,\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{p-1} & b_p \end{vmatrix}.$$

Au loc relaţiile

$$P(b_1,b_2,\cdots,b_p,\lambda)=b_1.$$

şi

$$R(b_1,b_2,\cdots,b_p,\lambda)=\lambda R(b_2,b_3,\cdots,b_p,\lambda)+P(b_1,b_3,\cdots,b_p,\lambda),$$

respectiv

$$R(b_1,b_2,\cdots,b_p,\lambda)=b_p\lambda^{p-1}+b_{p-1}\lambda^{p-2}+\cdots+b_2\lambda+b_1. \tag{4.38}$$

Soluţia exerciţiului 4.7. Se dezvoltă determinanţii după prima linie. □

Exerciţiul 4.8. Fie matricea A de forma (4.37). Să se arate că

$$\det(\lambda I_p-A)=\lambda^p+a_1\lambda^{p-1}+a_2\lambda^{p-2}+\cdots+a_{p-1}\lambda+a_p,\quad \lambda\in\mathbb{C}.$$

Soluţia exerciţiului 4.8. Observăm că

$$\det(\lambda I_p-A)=R(a_p,a_{p-1},\cdots,a_2,a_1+\lambda,\lambda)$$

şi aplicăm formula (4.38). □

Exerciţiul 4.9. Fie $\lambda\in\mathbb{C}$ valoare proprie, de multiplicitate algebrică $r\geq 1$, a matricei $A\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, unde $p\geq 1$. Dacă $\overline{u}\in\mathbb{C}^p$ este eigenvector generalizat al matricei A corespunzând valorii proprii λ, adică există $k\in\overline{1,r}$ cu proprietatea că

$$(A-\lambda I_p)^k\,\overline{u}=0,$$

atunci funcţia

$$\overline{x}(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}\cdot\left(\overline{C}_1+t\overline{C}_2+\cdots+t^{k-1}\overline{C}_k\right),\quad t\in\mathbb{R},$$

este soluţie a sistemului diferenţial (4.36). Aici,

$$\overline{C}_1=\overline{u},\quad \overline{C}_i=\frac{1}{i-1}\,(A-\lambda I_p)\,\overline{C}_{i-1}=\frac{1}{(i-1)!}\,(A-\lambda I_p)^{i-1}\,\overline{u}, \tag{4.39}$$

unde $i \in \overline{2,k}$.

Soluţia exerciţiului 4.9. Remarcăm că

$$(A-\lambda I_p)\overline{C}_k = \frac{1}{(k-1)!}(A-\lambda I_p)^k \overline{u} = 0,$$

deci $\overline{C}_k$ este eigenvector al matricei A corespunzând valorii proprii λ.

Au loc relaţiile

$$\begin{aligned}
\overline{x}'(t) &= \lambda e^{\lambda t} \cdot \left(\overline{C}_1 + t\overline{C}_2 + \cdots + t^{k-1}\overline{C}_k\right) \\
&+ e^{\lambda t} \cdot \left(\overline{C}_2 + 2t\overline{C}_3 + \cdots + (k-1)t^{k-2}\overline{C}_k\right) \\
&= e^{\lambda t} \cdot \left\{\left(\lambda\overline{C}_1 + \overline{C}_2\right) + t\left(\lambda\overline{C}_2 + 2\overline{C}_3\right) + \cdots \right. \\
&+ \left. t^{k-2}\left[\lambda\overline{C}_{k-1} + (k-1)\overline{C}_k\right] + t^{k-1}\lambda\overline{C}_k\right\} \\
&= e^{\lambda t} \cdot \left[\left(A\overline{C}_1\right) + t\left(A\overline{C}_2\right) + \cdots + t^{k-2}\left(A\overline{C}_{k-1}\right) + t^{k-1}\left(A\overline{C}_k\right)\right] \\
&= A \cdot \overline{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Justificarea s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.10. În contextul exerciţiului 4.9, să se demonstreze că

$$(A-\lambda I_p)^{k+1-i}\overline{C}_i = 0, \quad i \in \overline{1,k}.$$

Soluţia exerciţiului 4.10. Ţinem seama de ultima parte a formulelor (4.39). □

Exerciţiul 4.11. Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ şi şirurile $\left(c_{q+1}^{(r)}\right)_{q\geq 0, r\geq 1}$ date de formulele

$$\begin{cases} c_{q+1}^{(0)} = \lambda^q, \\ c_{q+1}^{(r)} = q(q-1)\cdot \ldots \cdot (q-r+1)\lambda^{q-r} \cdot \operatorname{sign}\left(\max\{q-r+1, 0\}\right). \end{cases}$$

Să se arate că

$$c_{q+1}^{(r+1)} = \frac{d}{d\lambda}\left[c_{q+1}^{(r)}\right],$$

respectiv

$$\frac{d}{d\lambda}\left[c_{q+2}^{(r)}\right] = (r+1)c_{q+1}^{(r)} + \lambda\frac{d}{d\lambda}\left[c_{q+1}^{(r)}\right]. \tag{4.40}$$

pentru orice $q \geq 0$, $r \geq 1$.

Soluţia exerciţiului 4.11. Folosim inducţia matematică. □

Exerciţiul 4.12. Fie matricea A de forma (4.37) şi $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie, de multiplicitate algebrică $r \geq 1$, a acesteia. Atunci, să se arate că vectorii[14]

$$\overline{C}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-2} \\ \lambda^{p-1} \end{pmatrix}, \quad \overline{C}_{k-i} = \binom{i}{k-1} \cdot \frac{d^i}{d\lambda^i}\left(\overline{C}_k\right), \tag{4.41}$$

unde $i \in \overline{1, k-1}$, pot fi utilizaţi în contextul exerciţiului 4.9.

Soluţia exerciţiului 4.12. Introducem numerele $\left(c_j^{(i)}\right)_{i\in\overline{0,k-1},\, j\in\overline{1,p}}$ astfel încât

$$\overline{C}_k = \begin{pmatrix} c_1^{(0)} \\ \vdots \\ c_p^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \overline{C}_{k-i} = \frac{(k-i)(k-i+1)\cdot \ldots \cdot (k-1)}{i!} \cdot \begin{pmatrix} c_1^{(i)} \\ \vdots \\ c_p^{(i)} \end{pmatrix}.$$

Trebuie verificate relaţiile — vezi (4.39) şi exerciţiul 4.10 —

$$(A - \lambda I_p)\overline{C}_k = 0, \quad (A - \lambda I_p)\overline{C}_{k-i-1} = (k-i-1)\overline{C}_{k-i}. \tag{4.42}$$

Au loc egalităţile — conform exerciţiului 4.8 —

$$(A - \lambda I_p)\overline{C}_k = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \cdots & -a_2 & -(a_1+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{p-2} \\ \lambda^{p-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -a_p - a_{p-1}\lambda - \cdots - a_2\lambda^{p-2} - (a_1+\lambda)\lambda^{p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\det(\lambda I_p - A) \end{pmatrix} = 0,$$

respectiv

$$\overline{C}_{k-i-1} = \frac{(k-i-1)(k-i)\cdot \ldots \cdot (k-1)}{(i+1)!} \cdot \frac{d^{i+1}}{d\lambda^{i+1}}\left(\overline{C}_k\right) = \frac{k-i-1}{i+1} \cdot \frac{d}{d\lambda}\left(\overline{C}_{k-i}\right),$$

[14] Folosim notaţiile $\binom{v}{w} = \frac{(w-v+1)\cdot(w-v+2)\cdot\ldots\cdot w}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot v}$, $\binom{0}{w} = 1$, unde $w \geq v \geq 1$.

de unde

$$c_j^{(i+1)} = \frac{k-i-1}{i+1} \cdot \frac{d}{d\lambda}\left[c_j^{(i)}\right]. \tag{4.43}$$

Mai departe, cea de-a doua relaţie (4.42) ne conduce la — via (4.43) —

$$(k-i-1)\begin{pmatrix} c_1^{(i)} \\ \vdots \\ c_p^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \cdots & -a_2 & -(a_1+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(i+1)} \\ \vdots \\ c_p^{(i+1)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{k-i-1}{i+1} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda & 1 \\ -a_p & -a_{p-1} & -a_{p-2} & \cdots & -a_2 & -(a_1+\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{d\lambda}\left[c_1^{(i)}\right] \\ \vdots \\ \frac{d}{d\lambda}\left[c_p^{(i)}\right] \end{pmatrix}.$$

Primele $p-1$ linii ale egalităţilor matriceale anterioare se reorganizează sub forma expresiilor

$$\frac{d}{d\lambda}\left[c_{j+1}^{(i)}\right] = (i+1)c_j^i + \lambda \frac{d}{d\lambda}\left[c_j^{(i)}\right], \quad j \in \overline{1, p-1},$$

care sunt echivalente cu (4.40).

Ultima linie devine

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\lambda}\left[a_p c_1^{(i)} + a_{p-1}c_2^{(i)} + \ldots + a_2 c_{p-1}^{(i)} + a_1 c_p^{(i)}\right] + \left\{(i+1)c_p^{(i)} + \lambda \frac{d}{d\lambda}\left[c_p^{(i)}\right]\right\} \\ &= \frac{d}{d\lambda}\left[a_p c_1^{(i)} + a_{p-1}c_2^{(i)} + \ldots + a_2 c_{p-1}^{(i)} + a_1 c_p^{(i)}\right] + \frac{d}{d\lambda}\left[c_{p+1}^{(i)}\right], \end{aligned} \tag{4.44}$$

unde $c_{p+1}^{(0)} = \lambda^p$. Egalitatea (4.44) rezultă din relaţia

$$0 = \frac{d^{i+1}}{d\lambda^{i+1}}\left[\det(\lambda I_p - A)\right] = \frac{d^{i+1}}{d\lambda^{i+1}}\left(a_p + a_{p-1}\lambda + \ldots + a_2\lambda^{p-2} + a_1\lambda^{p-1} + \lambda^p\right).$$

Calculul s-a încheiat. □

Exerciţiul 4.13. *(Soluţii fundamentale)* Dacă $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ este o soluţie de multiplicitate $r \geq 1$ a ecuaţiei algebrice

$$\lambda^p + a_1\lambda^{p-1} + a_2\lambda^{p-2} + \cdots + a_{p-1}\lambda + a_p = 0,$$

atunci funcţiile $z_i : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$, unde $i \in \overline{1, r}$, cu formulele

$$z_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t}, z_2(t) = t\mathrm{e}^{\lambda_0 t}, \cdots, z_r(t) = t^{r-1}\mathrm{e}^{\lambda_0 t}$$

sunt soluţii ale ecuaţiei diferenţiale (4.35).

Soluţia exerciţiului 4.13. Fie $k \in \overline{1,r}$ fixat. Conform exerciţiului 4.9, ecuaţia (4.35), reorganizată ca sistem diferenţial cu p ecuaţii de ordinul I, admite soluţia

$$\overline{z}(t) = \begin{pmatrix} z \\ z' \\ z'' \\ \vdots \\ z^{(p-2)} \\ z^{(p-1)} \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\lambda_0 t} \cdot \left(\overline{C}_1 + t\overline{C}_2 + \cdots + t^{k-1}\overline{C}_k\right),$$

unde vectorii $\left(\overline{C}_i\right)_{i\in\overline{1,k}}$ au formulele (4.41).

Observăm că primul element al coloanei $\overline{C}_k \in \mathbb{C}^p$ este 1 în timp ce coloanele $\overline{C}_i$, unde $i \leq k-1$, au primul element 0. De aici rezultă că $z(t) = \mathrm{e}^{\lambda_0 t} \cdot t^{k-1}$. $\square$

4.7 Matrice strict pozitiv-definite. Reprezentarea covectorilor folosind produsul scalar. Produsul vectorial a $m-1$ vectori. Produsul tensorial a doi vectori. Reciproca unei baze. Rezoluţia identităţii

Fie corpul $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, bazele $\mathscr{S}_1$, $\mathscr{S}_2$ introduse la pagina 1 şi matricea nesingulară P dată de (1.2).

Fie $\overline{u}, \overline{v} \in E$ cu expresiile

$$\overline{u} = \sum_{k=1}^{m} u_k^{\mathscr{S}_1} \cdot \overline{e}_k = \sum_{k=1}^{m} u_k^{\mathscr{S}_2} \cdot \overline{f}_k, \qquad u_k^{\mathscr{S}_1}, u_k^{\mathscr{S}_2} \in \mathbb{K},$$

respectiv

$$\overline{v} = \sum_{k=1}^{m} v_k^{\mathscr{S}_1} \cdot \overline{e}_k = \sum_{k=1}^{m} v_k^{\mathscr{S}_2} \cdot \overline{f}_k, \qquad v_k^{\mathscr{S}_1}, v_k^{\mathscr{S}_2} \in \mathbb{K}.$$

Conform (1.5),

$$\begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_2} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

În particular, dacă $\overline{v} = \overline{f}_k$ atunci

$$\begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} = \mathrm{col}_{(k)}P, \qquad k \in \overline{1,m}. \tag{4.46}$$

Folosim scrierea tipică pentru *produsul scalar* definit de *baza canonică* $\mathscr{S}_1$ — vezi relaţiile[15] (4.17) pentru cazul $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ —, şi anume

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = B_{\mathscr{S}_1}(\overline{u}, \overline{v}) = \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} & \cdots & u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v_1^{\mathscr{S}_1}} \\ \vdots \\ \overline{v_m^{\mathscr{S}_1}} \end{pmatrix}. \tag{4.47}$$

Evident, produsul scalar poate fi reorganizat astfel[16]:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = (\overline{u} \cdot \overline{v})^t = \begin{pmatrix} \overline{v_1^{\mathscr{S}_1}} & \cdots & \overline{v_m^{\mathscr{S}_1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}.$$

Fie $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$. Atunci, introducem *produsul matrice-vector* — în raport cu baza $\mathscr{S}_1$ — via formula[17]

$$A\overline{u} = A \star_{\mathscr{S}_1} \overline{u} = \overline{v}, \qquad \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}. \tag{4.48}$$

Exerciţiul 4.14. *(Vectorul $\overline{v} = A\overline{u}$ în baza $\mathscr{S}_2$)* Este valabilă expresia — analoagă formulelor (1.15) —

$$\begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_2} \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_2} \end{pmatrix}.$$

Soluţia exerciţiului 4.14. Avem următoarele estimări

---

15 Aici, aplicaţia $B_{\mathscr{S}_1} : E \times E \to \mathbb{K}$ este liniară în primul argument şi antiliniară [13, pag. 11] în cel de-al doilea argument [16, pag. 73]. Referitor la $B_{\mathscr{S}_1}$, se folosesc şi denumirile *formă biliniară hermitică* [12, pag. 316], respectiv formă *hermitic simetrică, conjugat biliniară* şi *pozitiv definită* [8, pag. 122].

16 Formulă utilizată în fizică.

17 Conform relaţiilor (1.9), (1.10), există operatorul $T \in L(E,E)$ astfel încât $\mathbb{T} = A$, de unde $A\overline{u} = \mathbb{T} \star_{\mathscr{S}_1} \overline{u} = T(\overline{u})$ pentru orice $\overline{u} \in E$.

$$\overline{v} = \left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right) \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ v_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} = \left[\left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right) P^{-1}\right] \left[A \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}\right]$$
$$= \left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right) \left[P^{-1}AP \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_2} \end{pmatrix}\right],$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Matricea A este considerată *strict pozitiv-definită* — în raport cu produsul scalar — dacă

$$\overline{u} \cdot A\overline{u} > 0 \tag{4.49}$$

pentru orice vector nenul $\overline{u} \in E$.

Exerciţiul 4.15. Fie $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ o matrice simetrică şi strict pozitiv-definită. Atunci, matricea A este
i) inversabilă,
ii) are doar valori proprii pozitive (implicit, reale).
iii) ([12, pag. 337, Lema 4.4]) Eigenvectorii corespunzând valorilor proprii distincte sunt ortogonali doi câte doi.
iv) Orice eigenvector generalizat este eigenvector.
v) ([12, pag. 339, Teorema 4.6]) Există o bază a spaţiului E formată doar din eigenvectori ai matricei A.

Soluţia exerciţiului 4.15. Partea i). Dacă matricea A nu ar fi nesingulară, atunci ar exista numerele $(u_i)_{i\in\overline{1,m}} \subset \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mai departe, vectorul $\overline{u} \in E$, unde

$$\begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

ne-ar conduce la încălcarea restricţiei (4.49), căci $\overline{u} \cdot A\overline{u} = \overline{u} \cdot 0_E = 0$.

Partea ii). Au loc identităţile

$$
\begin{aligned}
\overline{u} \cdot A\overline{v} &= \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} & \cdots & u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} \left[A \begin{pmatrix} \overline{v_1^{\mathscr{S}_1}} \\ \vdots \\ \overline{v_m^{\mathscr{S}_1}} \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} & \cdots & u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} \left(A^t\right)^t \right] \begin{pmatrix} \overline{v_1^{\mathscr{S}_1}} \\ \vdots \\ \overline{v_m^{\mathscr{S}_1}} \end{pmatrix} \\
&= \left[A^t \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} \overline{v_1^{\mathscr{S}_1}} \\ \vdots \\ \overline{v_m^{\mathscr{S}_1}} \end{pmatrix} = \left(A^t \overline{u}\right) \cdot \overline{v} = (A\overline{u}) \cdot \overline{v}, \qquad \overline{u}, \overline{v} \in E. \qquad (4.50)
\end{aligned}
$$

Dacă vectorul nenul $\overline{u}$ este eigenvector al matricei A corespunzând valorii proprii $\lambda \in \mathbb{K}$, atunci — via (1.26) — $A\overline{u} = \lambda \overline{u}$, respectiv

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{u} \cdot A\overline{u} - (A\overline{u}) \cdot \overline{u} = \overline{u} \cdot (\lambda \overline{u}) - (\lambda \overline{u}) \cdot \overline{u} \\
\text{(conform (4.1))} \ &= \left(\overline{\lambda} - \lambda\right) \|u\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Aşadar, eigenvalorile matricei A sunt reale, deci *sistemele liniare şi omogene (1.26), (1.29) admit soluţii reale nenule*. Astfel, eigenvectorii şi eigenvectorii generalizaţi ai matricei A se găsesc în $\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(\mathscr{S}_1)$.

Pozitivitatea valorilor proprii rezultă din estimările

$$
\lambda \cdot \|u\|_2^2 = \overline{u} \cdot (\lambda \overline{u}) = \overline{u} \cdot A\overline{u} > 0.
$$

Partea iii). Fiind date valorile proprii $\lambda \neq \mu$ şi vectorii proprii corespunzători $\overline{u}, \overline{v}$, deducem că

$$
\begin{aligned}
0 &= \overline{u} \cdot A\overline{v} - (A\overline{u}) \cdot \overline{v} = \overline{u} \cdot (\mu \overline{v}) - (\lambda \overline{u}) \cdot \overline{v} \\
&= (\mu - \lambda)(\overline{u} \cdot \overline{v}).
\end{aligned}
$$

Partea iv). Să presupunem că există eigenvectorul generalizat $\overline{v} \in E$ astfel încât

$$
(A - \lambda \cdot I_m)^k \overline{v} = 0_E, \qquad (A - \lambda \cdot I_m)^{k-1} \overline{v} \neq 0_E
$$

pentru un anumit $2 \leq k \leq m$.

Sunt valabile egalităţile

$$
\begin{aligned}
A \cdot (A - \lambda \cdot I_m)^p &= [A \cdot (A - \lambda \cdot I_m)] \cdot (A - \lambda \cdot I_m)^{p-1} \\
&= [(A - \lambda \cdot I_m) \cdot A] \cdot (A - \lambda \cdot I_m)^{p-1} = \ldots \\
&= (A - \lambda \cdot I_m)^p \cdot A, \qquad 1 \leq p \leq k.
\end{aligned}
$$

Introducând expresia $\overline{u} = (A - \lambda \cdot I_m)^{k-1} \overline{v}$ în restricţia (4.49), ajungem la o contradicţie, — observăm că matricea $(A - \lambda \cdot I_m)^{k-1}$ este simetrică —

$$\begin{aligned}0 &< \overline{u}\cdot A\overline{u}\\ &= \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1} & \cdots & v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\left[(A-\lambda\cdot I_m)^{k-1}\right]^t A\,(A-\lambda\cdot I_m)^{k-1}\begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots\\ v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1} & \cdots & v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix} A\,(A-\lambda\cdot I_m)^{2k-2}\begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots\\ v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\\ &= \left[\begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1} & \cdots & v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix} A\,(A-\lambda\cdot I_m)^{k-2}\right]\cdot\left[(A-\lambda\cdot I_m)^{k}\begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots\\ v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\right]\\ &= \left[A\,(A-\lambda\cdot I_m)^{k-2}\,\overline{v}\right]\cdot\left[(A-\lambda\cdot I_m)^{k}\,\overline{v}\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Partea v). Folosim *partea iv)* şi descompunerea (2.33). □

Presupunem că, până la sfârşitul secţiunii de faţă, avem

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

Exerciţiul 4.16. *(Produsul scalar în baza $\mathscr{S}_2$)* Au loc identităţile

$$\overline{u}\cdot\overline{v} = \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_2} & \cdots & u_m^{\mathscr{S}_2}\end{pmatrix} G \begin{pmatrix} v_1^{\mathscr{S}_2}\\ \vdots\\ v_m^{\mathscr{S}_2}\end{pmatrix},$$

unde $G = P^t\cdot P$, respectiv

$$G = (g_{ij})_{1\le i,\,j\le m} = \left(\overline{f}_i\cdot\overline{f}_j\right)_{1\le i,\,j\le m}.$$

Soluţia exerciţiului 4.16. Prima egalitate rezultă din (4.18).

Pentru cea de-a doua, avem estimările — vezi (4.46) —

$$\overline{f}_i\cdot\overline{f}_j = \left(\mathrm{col}_{(i)}P\right)^t\cdot\mathrm{col}_{(j)}P = g_{ij}$$

oricare ar fi $1\le i,\, j\le m$. □

Fie[18] $f\in E^*$. Plecând de la identităţile

[18] Reamintesc notaţia de la pagina 3, $E^* = L(E,\mathbb{K})$.

$$f(\overline{u}) = \big(f(\overline{e}_1)\ \cdots\ f(\overline{e}_m)\big) \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} = \left(a_1^{\mathscr{S}_1}\ \cdots\ a_m^{\mathscr{S}_1}\right) \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}, \qquad (4.51)$$

obţinem *reprezentarea*[19] covectorului f drept *produs scalar*[20] în raport cu baza $\mathscr{S}_1$ [8, pag. 130, Theorem], adică[21]

$$f(\overline{u}) = \overline{a} \cdot \overline{u}, \qquad \overline{u} \in E,$$

unde $\overline{a} = \sum_{k=1}^{m} a_k^{\mathscr{S}_1} \cdot \overline{e}_k \in E$. În particular, ţinând seama de (4.46), avem

$$f(\overline{f}_k) = \left(a_1^{\mathscr{S}_1}\ \cdots\ a_m^{\mathscr{S}_1}\right) \cdot \mathrm{col}_{(k)} P = \left[\mathrm{col}_{(k)} P\right]^t \begin{pmatrix} a_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ a_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}, \qquad k \in \overline{1,m},$$

respectiv

$$\begin{pmatrix} f(\overline{f}_1) \\ \vdots \\ f(\overline{f}_m) \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} a_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ a_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}. \qquad (4.52)$$

Exerciţiul 4.17. *(Vectorul $\overline{a}$ în baza $\mathscr{S}_2$)* Este valabilă formula

$$\begin{pmatrix} a_1^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots \\ a_m^{\mathscr{S}_2} \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} f(\overline{f}_1) \\ \vdots \\ f(\overline{f}_m) \end{pmatrix}.$$

Soluţia exerciţiului 4.17. Avem următoarele estimări

---

[19] *Unicitatea* reprezentării se probează adaptând afirmaţia discutată la soluţia exerciţiului 4.24.

[20] Acest rezultat este numit frecvent *teorema F. Riesz–M. Fréchet* [12, pag. 331, Teorema 3.1].

[21] Dacă $f \neq 0_{E^*}$, atunci — via (4.1) — $f(\overline{a}) = \|\overline{a}\|_2^2 > 0$ şi $\overline{a} \in (\mathrm{Ker}\ f)^{\perp}$ — spaţiul *ortogonal* al subspaţiului Ker f [8, pag. 123], [16, pag. 76] —. Conform [8, pag. 130], $\overline{a} = f\left(\frac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|_2}\right) \cdot \frac{\overline{a}}{\|\overline{a}\|_2}$ şi are loc descompunerea $\overline{u} = \left(\overline{u} - \frac{f(\overline{u})}{f(\overline{a})} \cdot \overline{a}\right) + \frac{f(\overline{u})}{f(\overline{a})} \cdot \overline{a} \in (\mathrm{Ker}\ f) \oplus (\mathrm{Ker}\ f)^{\perp} = E$. Vezi, de asemeni, nota de subsol de la pagina 126.

$$\begin{aligned}
\overline{a} = \left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right) \begin{pmatrix} a_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ a_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} &= \left[\left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right) P^{-1}\right] \begin{pmatrix} a_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ a_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} \\
\text{(conform (4.52))} \qquad &= \left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right) P^{-1} \left[\left(P^t\right)^{-1} \begin{pmatrix} f(\overline{f}_1) \\ \vdots \\ f(\overline{f}_m) \end{pmatrix}\right] \\
&= \left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right) G^{-1} \begin{pmatrix} f(\overline{f}_1) \\ \vdots \\ f(\overline{f}_m) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Cu ajutorul formulelor (1.6), definim covectorii $F_k \in E^*$ astfel încât

$$F_k(\overline{f}_i) = \delta_{ki}, \quad 1 \le i, k \le m.$$

Aici, δ_{ki} desemnează simbolul lui Kronecker. De asemeni, via (4.51), introducem vectorii $\overline{a}_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ki}^{\mathscr{S}_1} \cdot \overline{e}_i \in E$ cu proprietatea că

$$F_k(\overline{u}) = \overline{a}_k \cdot \overline{u} = \left(a_{k1}^{\mathscr{S}_1} \cdots a_{km}^{\mathscr{S}_1}\right) \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}, \qquad \overline{u} \in E, \quad k \in \overline{1,m}. \tag{4.53}$$

Exerciţiul 4.18. *(Vectorul $\overline{a}_k$ în baza $\mathscr{S}_2$)* Este valabilă formula

$$\begin{pmatrix} a_{k1}^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots \\ a_{km}^{\mathscr{S}_2} \end{pmatrix} = \mathrm{col}_{(k)}\left(G^{-1}\right).$$

Soluţia exerciţiului 4.18. Utilizăm exerciţiul 4.17. Astfel,

$$\begin{pmatrix} a_{k1}^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots \\ a_{km}^{\mathscr{S}_2} \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} F_k(\overline{f}_1) \\ \vdots \\ F_k(\overline{f}_m) \end{pmatrix} = G^{-1} \begin{pmatrix} \delta_{k1} \\ \vdots \\ \delta_{km} \end{pmatrix},$$

unde $k \in \overline{1,m}$. □

Exerciţiul 4.19. Fie $f \in E^*$. Atunci,

$$f = \sum_{k=1}^{m} f(\overline{f}_k) \cdot F_k, \qquad \overline{a} = \left(\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_m\right) \begin{pmatrix} f(\overline{f}_1) \\ \vdots \\ f(\overline{f}_m) \end{pmatrix}.$$

Soluţia exerciţiului 4.19. Prima parte rezultă din egalităţile

$$f(\overline{f}_i) = \sum_{k=1}^{m} f(\overline{f}_k)\delta_{ki} = \left(\sum_{k=1}^{m} f(\overline{f}_k)\cdot F_k\right)(\overline{f}_i), \qquad i \in \overline{1,m}.$$

La partea a doua, folosim exerciţiile 4.17, 4.18. Astfel,

$$\overline{a} = \left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right)\begin{pmatrix} a_1^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots \\ a_m^{\mathscr{S}_2}\end{pmatrix} = \left[\left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right)G^{-1}\right]\begin{pmatrix} f(\overline{f}_1) \\ \vdots \\ f(\overline{f}_m)\end{pmatrix},$$

de unde rezultă concluzia. □

Observăm că au loc relaţiile[22] — aici, $G = P^t \cdot P$ —

$$\begin{aligned}\left(\overline{a}_1 \cdots \overline{a}_m\right) &= \left(\overline{f}_1 \cdots \overline{f}_m\right)G^{-1} = \left[\left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right)P\right]G^{-1}\\ &= \left(\overline{e}_1 \cdots \overline{e}_m\right)\left(P^{-1}\right)^t,\end{aligned} \tag{4.54}$$

respectiv este valabilă *restricţia de biortogonalitate*

$$\overline{a}_k \cdot \overline{f}_i = F_k(\overline{f}_i) = \delta_{ki}, \qquad 1 \le i, k \le m. \tag{4.55}$$

Astfel, setul de vectori

$$\mathscr{S}_3 = \{\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m\}$$

desemnează *baza reciprocă* în E a bazei $\mathscr{S}_2$. Vezi [11, pag. 37].

Fie vectorii $(\overline{b}_k)_{k\in\overline{1,m-1}} \subset E$, cu expresiile

$$\overline{b}_k = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}^{\mathscr{S}_1}\cdot\overline{e}_i, \qquad 1 \le k \le m-1, \qquad m \ge 3.$$

Introducem covectorul $F \in E^*$ dat de relaţia

$$F(\overline{u}) = F_{\mathscr{S}_1}(\overline{u}) = \begin{vmatrix} b_{11}^{\mathscr{S}_1} & b_{12}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & b_{1m}^{\mathscr{S}_1} \\ b_{21}^{\mathscr{S}_1} & b_{22}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & b_{2m}^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{(m-1)1}^{\mathscr{S}_1} & b_{(m-1)2}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & b_{(m-1)m}^{\mathscr{S}_1} \\ u_1^{\mathscr{S}_1} & u_2^{\mathscr{S}_1} & \cdots & u_m^{\mathscr{S}_1}\end{vmatrix}, \qquad \overline{u} \in E. \tag{4.56}$$

[22] Cum P reprezintă matricea de schimbare de bază a vectorilor — se trece de la $\mathscr{S}_1$ la $\mathscr{S}_2$ —, $\left(P^{-1}\right)^t$ desemnează matricea de schimbare de bază a covectorilor — când se trece de la duala $\mathscr{C}_1$ a bazei $\mathscr{S}_1$ la duala $\mathscr{C}_2$ a bazei $\mathscr{S}_2$ — [13, pag. 13].

Numărul real $F(\overline{u})$, notat cu $\left(\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{m-1}, \overline{u}\right)$, constituie *produsul mixt* [23] (forma determinant[24]) al vectorilor $(\overline{b}_k)_{k\in\overline{1,m-1}}$, $\overline{u}$. Vezi [11, pag. 31].

Vectorul folosit la reprezentarea[25] în formă de produs scalar a covectorului F, notat cu $\prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k$, desemnează *produsul vectorial* al vectorilor $(\overline{b}_k)_{k\in\overline{1,m-1}}$. Au loc egalităţile

$$F(\overline{u}) = \left(\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{m-1}, \overline{u}\right) = \left(\prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k\right) \cdot \overline{u}, \qquad \overline{u} \in E.$$

Exerciţiul 4.20. *(Produsul vectorial ca determinant)* Avem formula

$$\prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k = \begin{vmatrix} b_{11}^{\mathscr{S}_1} & b_{12}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & b_{1m}^{\mathscr{S}_1} \\ b_{21}^{\mathscr{S}_1} & b_{22}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & b_{2m}^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{(m-1)1}^{\mathscr{S}_1} & b_{(m-1)2}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & b_{(m-1)m}^{\mathscr{S}_1} \\ \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \cdots & \overline{e}_m \end{vmatrix}, \tag{4.57}$$

cu convenţia ca *determinantul să fie dezvoltat după ultima linie*.

Soluţia exerciţiului 4.20. Dezvoltăm după ultima linie determinantul din (4.56). Astfel, observăm că — aici, $D_i^{\mathscr{S}_1}$ desemnează cofactorul[26] elementului $u_i^{\mathscr{S}_1}$ [14, pag. 9] —

$$\begin{aligned} F(\overline{u}) &= \sum_{i=1}^{m} u_i^{\mathscr{S}_1} \cdot D_i^{\mathscr{S}_1} = \left(D_1^{\mathscr{S}_1} \cdots D_m^{\mathscr{S}_1}\right) \begin{pmatrix} u_1^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m} D_i^{\mathscr{S}_1} \cdot \overline{e}_i\right) \cdot \overline{u}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Concluzia rezultă din (4.47) pe baza unicităţii reprezentării ca produs scalar a covectorului F. $\square$

Exerciţiul 4.21. *(Produsul scalar dintre produsul vectorial şi factorii săi)* Produsul vectorial le este ortogonal factorilor săi,

$$\overline{b}_i \cdot \prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k = 0, \qquad i \in \overline{1, m-1}.$$

[23] În cazul $m = 3$, se întâlneşte şi denumirea *triplu produs scalar* [20, pag. 10].

[24] Vezi [5, pag. 70].

[25] Vezi [5, pag. 92].

[26] Se utilizează şi denumirile de *complement* ori *complementar algebric* al elementului $u_i^{\mathscr{S}_1}$ [12, pag. 133].

Soluţia exerciţiului 4.21. Remarcăm faptul că determinantul din (4.56) este nul dacă ultima linie a sa este o combinaţie liniară a celorlalte linii [12, pag. 132]. Astfel,

$$\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_{m-1}\right\}\subseteq \mathrm{Ker}\, F.$$

De asemeni, dacă vectorii $(\overline{b}_k)_{k\in\overline{1,m-1}}$ sunt liniar dependenţi peste $\mathbb{R}$, atunci $\mathrm{Ker}\, F = E$. □

Exerciţiul 4.22. *(Liniar independenţa factorilor dintr-un produs vectorial)* Vectorii din setul $\{\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_{m-1}\}$ sunt liniar independenţi peste $\mathbb{R}$ dacă şi numai dacă

$$\prod_{k=1}^{m-1}\overline{b}_k \neq 0_E.$$

Soluţia exerciţiului 4.22. Liniar dependenţa acestor vectori este echivalentă cu faptul că măcar una dintre primele $m-1$ linii ale determinantului (4.57) poate fi reprezentată ca o combinaţie liniară a celorlalte $m-2$ linii — dintre primele $m-1$ linii cu intrări scalare —. Combinaţia liniară se păstrează în toţi minorii folosiţi la calculul numerelor $\left(D_i^{\mathscr{S}_1}\right)_{i\in\overline{1,m}}$. Deci, dacă produsul vectorial este nenul, atunci factorii acestuia sunt liniar independenţi.

Dacă factorii sunt liniar independenţi, atunci putem adapta demonstraţia Lemei 1.1 pentru a stabili că produsul vectorial este nenul. Vezi şi [12, pag. 139, Corolarul 2.4]. □

Exerciţiul 4.23. *(Produsul mixt dintre produsul vectorial şi factorii săi)* Are loc identitatea

$$\left(\overline{b}_1,\overline{b}_2,\cdots,\overline{b}_{m-1},\prod_{k=1}^{m-1}\overline{b}_k\right)=\left\|\prod_{k=1}^{m-1}\overline{b}_k\right\|_2^2.$$

Soluţia exerciţiului 4.23. Via (4.58), avem

$$F\left(\prod_{k=1}^{m-1}\overline{b}_k\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(D_i^{\mathscr{S}_1}\right)^2=\left(\prod_{k=1}^{m-1}\overline{b}_k\right)^2,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exerciţiul 4.24. *(Baza reciprocă via produsul vectorial şi produsul mixt)* Dacă $m\geq 3$, atunci vectorii $(\overline{a}_i)_{i\in\overline{1,m}}$, introduşi în (4.53), au următoarele expresii[27]

---

[27] Putem folosi, ca notaţie, *pălăria* $\widehat{\star}$ pentru a desemna factorul lipsă:

$$\overline{a}_i=(-1)^{m-i}\cdot\frac{\overline{f}_1\times\overline{f}_2\times\cdots\times\overline{f}_{i-1}\times\widehat{\overline{f}_i}\times\overline{f}_{i+1}\times\overline{f}_{i+2}\times\cdots\times\overline{f}_m}{\left(\overline{f}_1,\cdots,\overline{f}_m\right)},\quad i\in\overline{1,m}.$$

$$\begin{cases} \overline{a}_1 = (-1)^{m-1} \cdot \frac{\overline{f}_2 \times \overline{f}_3 \times \cdots \times \overline{f}_m}{(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m)}, \\ \overline{a}_i = (-1)^{m-i} \cdot \frac{\overline{f}_1 \times \overline{f}_2 \times \cdots \times \overline{f}_{i-1} \times \overline{f}_{i+1} \times \overline{f}_{i+2} \times \cdots \times \overline{f}_m}{(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m)}, \quad i \in \overline{2, m-1}, \\ \overline{a}_m = \frac{\overline{f}_1 \times \overline{f}_2 \times \cdots \times \overline{f}_{m-1}}{(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m)}. \end{cases} \tag{4.59}$$

Soluţia exerciţiului 4.24. Fac următoarea afirmaţie: *fiind daţi vectorii* $(\overline{f}_i)_{i \in \overline{1,m}}$ *din (4.55), care alcătuiesc o bază a spaţiului liniar E, există cel mult o familie* $(\overline{a}_i)_{i \in \overline{1,m}}$ *cu proprietatea că* $\overline{a}_k \cdot \overline{f}_i = \delta_{ki}$ *pentru orice i, k.*

Într-adevăr, în caz contrar ar exista seturile de vectori $(\overline{b}_i)_{i \in \overline{1,m}}$, $(\overline{c}_i)_{i \in \overline{1,m}}$, unde $\overline{c}_i = \overline{a}_i - \overline{b}_i = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}^{\mathscr{S}_1} \cdot \overline{e}_j$, pentru care

$$\overline{b}_k \cdot \overline{f}_i = \delta_{ki}, \qquad \overline{c}_k \cdot \overline{f}_i = 0, \qquad 1 \leq i, k \leq m,$$

iar vectorii $\overline{c}_i$ nu ar fi toţi nuli. Atunci, sistemul algebric — conform (4.46) —

$$P^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ar admite soluţii nenule[28], de forma $\begin{pmatrix} c_{i1}^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots \\ c_{im}^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}$, ceea ce ar contrazice nesingularitatea matricei P. Afirmaţia este probată.

Mai departe, să remarcăm că

$$(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m) = \det P, \tag{4.60}$$

respectiv

$$\begin{aligned} &(\overline{f}_1 \times \overline{f}_2 \times \cdots \times \overline{f}_{i-1} \times \overline{f}_{i+1} \times \overline{f}_{i+2} \times \cdots \times \overline{f}_m) \cdot \overline{w} \\ &= (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \cdots, \overline{f}_{i-1}, \overline{f}_{i+1}, \overline{f}_{i+2}, \cdots, \overline{f}_m, \overline{w}) \\ &= (-1)^{m-i} \cdot (\overline{f}_1, \overline{f}_2, \cdots, \overline{f}_{i-1}, \overline{w}, \overline{f}_{i+1}, \cdots, \overline{f}_m), \qquad \overline{w} \in E. \end{aligned} \tag{4.61}$$

Pentru a proba partea a doua a dublei egalităţi anterioare, transformăm primul produs mixt în cel de-al doilea cu ajutorul a $m - i$ permutări de linii.

În sfârşit, via (4.60), (4.61), vectorii din partea dreaptă a egalităţilor (4.59) — notaţi $\overline{b}_i$, unde $1 \leq i \leq m$ — verifică relaţiile $\overline{b}_k \cdot \overline{f}_i = \delta_{ki}$ pentru orice i, k, ceea ce încheie demonstraţia. □

---

[28] Cu alte cuvinte, ar exista vectori nenuli care să îi fie ortogonali unei baze a spaţiului E [12, pag. 329, Propoziţia 2.10 (ii)].

Exerciţiul 4.25. *(Baza reciprocă a bazei $\mathscr{S}_3$)* Vectorii bazei $\mathscr{S}_2$ admit reprezentările — $m \geq 3$ —

$$\begin{cases} \overline{f}_1 = (-1)^{m-1} \cdot \frac{\overline{a}_2 \times \overline{a}_3 \times \cdots \times \overline{a}_m}{(\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m)}, \\ \overline{f}_i = (-1)^{m-i} \cdot \frac{\overline{a}_1 \times \overline{a}_2 \times \cdots \times \overline{a}_{i-1} \times \overline{a}_{i+1} \times \overline{a}_{i+2} \times \cdots \times \overline{a}_m}{(\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m)}, \quad i \in \overline{2, m-1}, \\ \overline{f}_m = \frac{\overline{a}_1 \times \overline{a}_2 \times \cdots \times \overline{a}_{m-1}}{(\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m)}. \end{cases} \tag{4.62}$$

Soluţia exerciţiului 4.25. Notăm cu $\overline{b}_i$, unde $1 \leq i \leq m$, vectorii din partea dreaptă a egalităţilor (4.62). Atunci, deducem că

$$\overline{c}_k = \overline{f}_k - \overline{b}_k, \qquad \overline{c}_k \cdot \overline{a}_i = 0, \qquad 1 \leq i, k \leq m.$$

Aplicăm raţionamentul de la exerciţiul 4.24: vectorii $(\overline{c}_k)_{k \in \overline{1,m}}$, fiindu-i ortogonali bazei $\mathscr{S}_3$, sunt obligatoriu nuli. □

Exerciţiul 4.26. *(Produsul mixt în baza $\mathscr{S}_2$)* Este valabilă identitatea

$$\left(\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{m-1}, \overline{u}\right) = \det P \cdot \begin{vmatrix} b_{11}^{\mathscr{S}_2} & b_{12}^{\mathscr{S}_2} & \cdots & b_{1m}^{\mathscr{S}_2} \\ b_{21}^{\mathscr{S}_2} & b_{22}^{\mathscr{S}_2} & \cdots & b_{2m}^{\mathscr{S}_2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{(m-1)1}^{\mathscr{S}_2} & b_{(m-1)2}^{\mathscr{S}_2} & \cdots & b_{(m-1)m}^{\mathscr{S}_2} \\ u_1^{\mathscr{S}_2} & u_2^{\mathscr{S}_2} & \cdots & u_m^{\mathscr{S}_2} \end{vmatrix}.$$

Soluţia exerciţiului 4.26. Utilizăm egalităţile (4.45). □

Exerciţiul 4.27. *(Produsul mixt ca determinant J. Gram)* Are loc egalitatea

$$\left(\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{m-1}, \overline{u}\right) = \frac{1}{\left(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m\right)} \cdot \begin{vmatrix} \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_m \\ \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_m \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_m \\ \overline{u} \cdot \overline{f}_1 & \overline{u} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{u} \cdot \overline{f}_m \end{vmatrix}. \tag{4.63}$$

În particular, — *[12, pag. 352, Exerciţiul 3 a)]* —

$$\left(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m\right)^2 = \begin{vmatrix} \overline{f}_1 \cdot \overline{f}_1 & \overline{f}_1 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{f}_1 \cdot \overline{f}_m \\ \overline{f}_2 \cdot \overline{f}_1 & \overline{f}_2 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{f}_2 \cdot \overline{f}_m \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \overline{f}_m \cdot \overline{f}_1 & \overline{f}_m \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{f}_m \cdot \overline{f}_m \end{vmatrix}. \tag{4.64}$$

Soluţia exerciţiului 4.27. Remarcăm că

$$\begin{pmatrix} b_{11}^{\mathscr{S}_1} & b_{12}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & b_{1m}^{\mathscr{S}_1} \\ b_{21}^{\mathscr{S}_1} & b_{22}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & b_{2m}^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{(m-1)1}^{\mathscr{S}_1} & b_{(m-1)2}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & b_{(m-1)m}^{\mathscr{S}_1} \\ u_1^{\mathscr{S}_1} & u_2^{\mathscr{S}_1} & \cdots & u_m^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{11}^{\mathscr{S}_1} & f_{12}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & f_{1m}^{\mathscr{S}_1} \\ f_{21}^{\mathscr{S}_1} & f_{22}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & f_{2m}^{\mathscr{S}_1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ f_{m1}^{\mathscr{S}_1} & f_{m2}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & f_{mm}^{\mathscr{S}_1} \end{pmatrix}^t$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_m \\ \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_m \\ \overline{u} \cdot \overline{f}_1 & \overline{u} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{u} \cdot \overline{f}_m \end{pmatrix},$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exerciţiul 4.28. *(Produsul vectorial via produsul scalar şi produsul mixt)* Avem relaţia

$$\prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k = \frac{1}{(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m)} \cdot \begin{vmatrix} \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_m \\ \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_m \\ \overline{f}_1 & \overline{f}_2 & \cdots & \overline{f}_m \end{vmatrix}, \tag{4.65}$$

cu convenţia ca *determinantul să fie dezvoltat după ultima linie*.

Soluţia exerciţiului 4.28. Reorganizăm determinantul din (4.63) sub forma

$$\begin{vmatrix} \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_m \\ \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_m \\ \overline{u} \cdot \overline{f}_1 & \overline{u} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{u} \cdot \overline{f}_m \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_m \\ \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_m \\ \left(\sum_{j=1}^{m} u_j^{\mathscr{S}_1} \cdot f_{1j}^{\mathscr{S}_1}\right) & \left(\sum_{j=1}^{m} u_j^{\mathscr{S}_1} \cdot f_{2j}^{\mathscr{S}_1}\right) & \cdots & \left(\sum_{j=1}^{m} u_j^{\mathscr{S}_1} \cdot f_{mj}^{\mathscr{S}_1}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} u_j^{\mathscr{S}_1} \cdot \begin{vmatrix} \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_m \\ \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_m \\ f_{1j}^{\mathscr{S}_1} & f_{2j}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & f_{mj}^{\mathscr{S}_1} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{m} \begin{vmatrix} \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_m \\ \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_m \\ f_{1j}^{\mathscr{S}_1} & f_{2j}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & f_{mj}^{\mathscr{S}_1} \end{vmatrix} \cdot \overline{e}_j \right) \cdot \overline{u},$$

de unde

$$F(\overline{u}) = \left(\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{m-1}, \overline{u}\right) = \left(\sum_{j=1}^{m} \mathscr{BF}_j^{\mathscr{S}_1} \cdot \overline{e}_j \right) \cdot \overline{u}, \qquad \overline{u} \in E, \tag{4.66}$$

pentru

$$\mathscr{BF}_j^{\mathscr{S}_1} = \frac{\begin{vmatrix} \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_1 \cdot \overline{f}_m \\ \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_2 \cdot \overline{f}_m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_1 & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_2 & \cdots & \overline{b}_{m-1} \cdot \overline{f}_m \\ f_{1j}^{\mathscr{S}_1} & f_{2j}^{\mathscr{S}_1} & \cdots & f_{mj}^{\mathscr{S}_1} \end{vmatrix}}{\left(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m\right)}, \qquad j \in \overline{1,m}.$$

Concluzia rezultă din (4.66) pe baza unicităţii reprezentării ca produs scalar a covectorului F. $\square$

Exerciţiul 4.29. *(Dublul produs vectorial*[29]*, J. Lagrange, H. Grassmann)* Fie $m = 3$. Atunci, are loc identitatea

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \times \overline{c} = (\overline{a} \cdot \overline{c})\,\overline{b} - \left(\overline{b} \cdot \overline{c}\right)\overline{a}, \qquad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in E. \tag{4.67}$$

De asemeni[30],

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \times \overline{c} = -\overline{c} \times \widehat{\overline{d}} \times \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) = \begin{vmatrix} \overline{c} \cdot \overline{a} & \overline{c} \cdot \overline{b} \\ \widehat{\overline{d} \cdot \overline{a}} & \widehat{\overline{d} \cdot \overline{b}} \\ \overline{a} & \overline{b} \end{vmatrix}, \qquad \overline{d} \in E.$$

[29] Vezi [11, pag. 33]. Se întâlneşte şi denumirea *triplu produs vectorial* [20, pag. 12] pentru cantitatea $\overline{a} \times \left(\overline{b} \times \overline{c}\right)$.

[30] Reorganizarea egalităţii (4.67) ne permite generalizarea sa. Vezi exerciţiul 4.37.

Soluţia exerciţiului 4.29. Vectori liniar dependenţi. Dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{a} = \lambda \cdot \overline{b}$, atunci

$$\begin{aligned}\overline{a} \times \overline{b} = 0_E &= \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \times \overline{c} \\ &= \lambda \cdot \left[\left(\overline{b} \cdot \overline{c}\right) \overline{b} - \left(\overline{b} \cdot \overline{c}\right) \overline{b}\right] = \left[\left(\lambda \overline{b}\right) \cdot \overline{c}\right] \overline{b} - \left(\overline{b} \cdot \overline{c}\right) \left(\lambda \overline{b}\right) \\ &= (\overline{a} \cdot \overline{c}) \overline{b} - \left(\overline{b} \cdot \overline{c}\right) \overline{a}.\end{aligned}$$

Dacă $\overline{c} = \lambda \cdot \overline{a}$, atunci este suficient să probăm egalitatea

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \times \overline{a} = \left(\overline{a}^2\right) \overline{b} - \left(\overline{b} \cdot \overline{a}\right) \overline{a}. \tag{4.68}$$

Începem prin a observa că — vezi exerciţiul 4.23 —

$$\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{a} \times \overline{b}\right) = \left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\|_2^2, \qquad \overline{a}, \overline{b} \in E.$$

Expresia (4.65) ne conduce la relaţia — conform exerciţiului 4.22, impunem ca $\overline{a} \times \overline{b} \neq 0_E$ —

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \times \overline{a} = \frac{1}{\left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\|_2^2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\|_2^2 \\ \overline{a}^2 & \overline{a} \cdot \overline{b} & 0 \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{a} \times \overline{b} \end{vmatrix}.$$

Ajugem la (4.68) dezvoltând determinantul după ultima linie.

Vectori liniar independenţi.[31] Dacă $\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) \neq 0$, atunci identitatea (4.65) implică

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \times \overline{c} = \frac{1}{\left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right)} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & \left(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}\right) \\ \overline{c} \cdot \overline{a} & \overline{c} \cdot \overline{b} & \overline{c}^2 \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{c} \end{vmatrix},$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Exerciţiul 4.30. *(Dublul produs vectorial, formula A. Cauchy–J. Binet)* Fie $m = 3$. Atunci, este valabilă expresia

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \left(\overline{c} \times \overline{d}\right) = \begin{vmatrix} \overline{a} \cdot \overline{c} & \overline{a} \cdot \overline{d} \\ \overline{b} \cdot \overline{c} & \overline{b} \cdot \overline{d} \end{vmatrix}, \qquad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \in E. \tag{4.69}$$

În particular, are loc *identitatea lui J. Lagrange*, şi anume

$$\left\|\overline{a} \times \overline{b}\right\|_2^2 = \begin{vmatrix} \overline{a}^2 & \overline{a} \cdot \overline{b} \\ \overline{b} \cdot \overline{a} & \overline{b}^2 \end{vmatrix} = \overline{a}^2 \cdot \overline{b}^2 - \left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right)^2. \tag{4.70}$$

---

[31] Altă soluţie a acestui caz este oferită de exerciţiul 4.37: scriem produsul $\overline{c} \times \left(\overline{a} \times \overline{b}\right)$ în baza $\left\{\overline{a}, \overline{b}, \overline{a} \times \overline{b}\right\}$.

Soluţia exerciţiului 4.30. Vectori liniar dependenţi. Dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overline{c} = \lambda \cdot \overline{d}$, atunci $\overline{c} \times \overline{d} = 0_E$ şi

$$\begin{aligned}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{c}\times\overline{d}\right) &= 0\\ &= \lambda\cdot\begin{vmatrix}\overline{a}\cdot\overline{d} & \overline{a}\cdot\overline{d}\\ \overline{b}\cdot\overline{d} & \overline{b}\cdot\overline{d}\end{vmatrix}\\ &= \begin{vmatrix}\overline{a}\cdot\left(\lambda\cdot\overline{d}\right) & \overline{a}\cdot\overline{d}\\ \overline{b}\cdot\left(\lambda\cdot\overline{d}\right) & \overline{b}\cdot\overline{d}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Vectori liniar independenţi. Dacă $\overline{c} \times \overline{d} \neq 0_E$, atunci — via relaţia (4.63) — avem

$$\begin{aligned}\left(\overline{a},\overline{b},\overline{c}\times\overline{d}\right) &= \left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\cdot\left(\overline{c}\times\overline{d}\right)\\ &= \frac{1}{\left(\overline{c},\overline{d},\overline{c}\times\overline{d}\right)}\cdot\begin{vmatrix}\overline{a}\cdot\overline{c} & \overline{a}\cdot\overline{d} & \overline{a}\cdot\left(\overline{c}\times\overline{d}\right)\\ \overline{b}\cdot\overline{c} & \overline{b}\cdot\overline{d} & \overline{b}\cdot\left(\overline{c}\times\overline{d}\right)\\ 0 & 0 & \left(\overline{c}\times\overline{d}\right)^2\end{vmatrix}.\end{aligned}\tag{4.71}$$

Ajugem la (4.69) dezvoltând determinantul din (4.71) după ultima linie. □

Exerciţiul 4.31. Fie $m = 3$. În contextul exerciţiilor 4.16, 4.18, matricea G^{-1} este simetrică şi admite reprezentările

$$G^{-1} = \frac{1}{\left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3\right)^2}$$

$$\times\begin{pmatrix}\left(\overline{f}_2\times\overline{f}_3,\overline{f}_2,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{f}_2\times\overline{f}_3,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_2\times\overline{f}_3\right)\\ \left(\overline{f}_3\times\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{f}_3\times\overline{f}_1,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3\times\overline{f}_1\right)\\ \left(\overline{f}_1\times\overline{f}_2,\overline{f}_2,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{f}_1\times\overline{f}_2,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_1\times\overline{f}_2\right)\end{pmatrix}\tag{4.72}$$

$$= \frac{1}{\left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3\right)}\cdot\begin{pmatrix}\left(\overline{a}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{a}_2,\overline{f}_2,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{a}_3,\overline{f}_2,\overline{f}_3\right)\\ \left(\overline{f}_1,\overline{a}_1,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{a}_2,\overline{f}_3\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{a}_3,\overline{f}_3\right)\\ \left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{a}_1\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{a}_2\right) & \left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{a}_3\right)\end{pmatrix}.\tag{4.73}$$

Soluţia exerciţiului 4.31. Formula (4.72). Inversa matricei $G = \left(g_{ij}\right)_{i,\,j\in\overline{1,3}}$ are expresia

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G}\cdot\begin{pmatrix}G^{11} & G^{21} & G^{31}\\ G^{12} & G^{22} & G^{32}\\ G^{13} & G^{23} & G^{33}\end{pmatrix},$$

unde G^{ji} reprezintă cofactorul elementului g_{ij} [12, pag. 136, Propoziţia 1.4]. De asemeni, pe baza formulei (4.64), $\det G = \left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3\right)^2$.

Prin calcul direct,

$$
\begin{aligned}
G^{11} &= \overline{f}_2^2\overline{f}_3^2 - \left(\overline{f}_2 \cdot \overline{f}_3\right)^2 \\
\text{(conform (4.70))} \quad &= \left\|\overline{f}_2 \times \overline{f}_3\right\|_2^2 \\
&= \left(\overline{f}_2 \times \overline{f}_3, \overline{f}_2, \overline{f}_3\right).
\end{aligned}
$$

În mod analog, stabilim valorile intrărilor G^{22}, G^{33}.

Apoi,

$$
\begin{aligned}
G^{12} &= -\begin{vmatrix} \overline{f}_1 \cdot \overline{f}_2 & \overline{f}_1 \cdot \overline{f}_3 \\ \overline{f}_3 \cdot \overline{f}_2 & \overline{f}_3^2 \end{vmatrix} \\
\text{(conform (4.69))} \quad &= -\left(\overline{f}_1 \times \overline{f}_3\right) \cdot \left(\overline{f}_2 \times \overline{f}_3\right) \\
&= \left(\overline{f}_1, \overline{f}_2 \times \overline{f}_3, \overline{f}_2\right).
\end{aligned}
$$

În mod analog, stabilim valorile intrărilor G^{ij}, unde $i \neq j$.

Simetria matricei G^{-1}. Avem egalităţile

$$
\begin{aligned}
G^{21} &= \left(\overline{f}_1, \overline{f}_2 \times \overline{f}_3, \overline{f}_3\right) = \left[\overline{f}_1 \times \left(\overline{f}_2 \times \overline{f}_3\right)\right] \cdot \overline{f}_3 \\
&= \left(\overline{f}_1 \cdot \overline{f}_3\right)\left(\overline{f}_2 \cdot \overline{f}_3\right) - \left(\overline{f}_1 \cdot \overline{f}_2\right)\overline{f}_3^2 \\
&= \left[\left(\overline{f}_3 \cdot \overline{f}_2\right)\overline{f}_1 - \left(\overline{f}_1 \cdot \overline{f}_2\right)\overline{f}_3\right] \cdot \overline{f}_3 \\
&= \left[\left(\overline{f}_3 \times \overline{f}_1\right) \times \overline{f}_2\right] \cdot \overline{f}_3 = \left(\overline{f}_3 \times \overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\right) \\
&= G^{12}.
\end{aligned}
$$

În mod analog, testăm faptul că $G^{ij} = G^{ji}$, unde $i \neq j$.

Formula (4.73). Aplicăm exerciţiul 4.24. □

Exerciţiul 4.32. *(Coordonate în baza $\mathscr{S}_2$. Cazul $m = 3$)* Are loc identitatea

$$
\overline{w} = \frac{\left(\overline{w}, \overline{f}_2, \overline{f}_3\right)}{\left(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\right)} \cdot \overline{f}_1 + \frac{\left(\overline{f}_1, \overline{w}, \overline{f}_3\right)}{\left(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\right)} \cdot \overline{f}_2 + \frac{\left(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{w}\right)}{\left(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\right)} \cdot \overline{f}_3, \qquad \overline{w} \in E.
$$

Soluţia exerciţiului 4.32. Fie $(w_i)_{i \in \overline{1,3}}$ coordonatele vectorului $\overline{w}$ în baza[32] $\mathscr{S}_3$. Deducem că — via exerciţiul 4.18 şi reprezentarea (4.73) —

[32] Introdusă la pagina 115.

$$
\begin{aligned}
\overline{w} &= \sum_{i=1}^{3} w_i \cdot \overline{a}_i \\
&= w_1 \cdot \left[\frac{(\overline{a}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_1 + \frac{(\overline{f}_1,\overline{a}_1,\overline{f}_3)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_2 + \frac{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{a}_1)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_3 \right] \\
&+ w_2 \cdot \left[\frac{(\overline{a}_2,\overline{f}_2,\overline{f}_3)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_1 + \frac{(\overline{f}_1,\overline{a}_2,\overline{f}_3)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_2 + \frac{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{a}_2)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_3 \right] \\
&+ w_3 \cdot \left[\frac{(\overline{a}_3,\overline{f}_2,\overline{f}_3)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_1 + \frac{(\overline{f}_1,\overline{a}_3,\overline{f}_3)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_2 + \frac{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{a}_3)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_3 \right] \\
&= \frac{\left(\sum_{i=1}^{3} w_i \cdot \overline{a}_i, \overline{f}_2, \overline{f}_3 \right)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_1 + \frac{\left(\overline{f}_1, \sum_{i=1}^{3} w_i \cdot \overline{a}_i, \overline{f}_3 \right)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_2 + \frac{\left(\overline{f}_1, \overline{f}_2, \sum_{i=1}^{3} w_i \cdot \overline{a}_i \right)}{(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\overline{f}_3)} \cdot \overline{f}_3,
\end{aligned}
$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exerciţiul 4.33. *(Coordonate în bazele $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{S}_3$)* Sunt valabile egalităţile

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{m} (\overline{w} \cdot \overline{a}_i) \cdot \overline{f}_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\overline{w} \cdot \overline{f}_i\right) \cdot \overline{a}_i, \qquad \overline{w} \in E.$$

Soluţia exerciţiului 4.33. Fie $(W_i)_{i\in\overline{1,m}}$ şi $(w_i)_{i\in\overline{1,m}}$ coordonatele vectorului $\overline{w}$ în bazele $\mathscr{S}_2$, respectiv $\mathscr{S}_3$. Pentru a calcula aceste numere, le aplicăm produsul scalar relaţiilor

$$\overline{w} = \sum_{i=1}^{m} W_i \cdot \overline{f}_i = \sum_{i=1}^{m} w_i \cdot \overline{a}_i$$

şi ţinem seama de restricţia de biortogonalitate (4.55). □

Exerciţiul 4.34. Fie $\overline{w} \in E$. În contextul exerciţiului 4.33, avem formulele — $m \geq 3$ —

$$
\begin{cases}
\overline{w} \cdot \overline{a}_1 = \frac{(\overline{w},\overline{f}_2,\overline{f}_3,\cdots,\overline{f}_m)}{(\overline{f}_1,\cdots,\overline{f}_m)}, \\
\overline{w} \cdot \overline{a}_i = \frac{(\overline{f}_1,\cdots,\overline{f}_{i-1},\overline{w},\overline{f}_{i+1},\cdots,\overline{f}_m)}{(\overline{f}_1,\cdots,\overline{f}_m)}, \\
\overline{w} \cdot \overline{a}_m = \frac{(\overline{f}_1,\cdots,\overline{f}_{m-1},\overline{w})}{(\overline{f}_1,\cdots,\overline{f}_m)},
\end{cases}
$$

respectiv

$$
\begin{cases}
\overline{w} \cdot \overline{f}_1 = \frac{(\overline{w},\overline{a}_2,\overline{a}_3,\cdots,\overline{a}_m)}{(\overline{a}_1,\cdots,\overline{a}_m)}, \\
\overline{w} \cdot \overline{f}_i = \frac{(\overline{a}_1,\cdots,\overline{a}_{i-1},\overline{w},\overline{a}_{i+1},\cdots,\overline{a}_m)}{(\overline{a}_1,\cdots,\overline{a}_m)}, \\
\overline{w} \cdot \overline{f}_m = \frac{(\overline{a}_1,\cdots,\overline{a}_{m-1},\overline{w})}{(\overline{a}_1,\cdots,\overline{a}_m)},
\end{cases}
$$

unde $i \in \overline{2, m-1}$.

Soluţia exerciţiului 4.34. Folosim estimarea (4.61). $\square$

Exerciţiul 4.35. *(Baza reciprocă într-un hiperplan)* Dacă vectorii $\left(\overline{b}_i\right)_{i\in\overline{1,m-1}}$, unde $m \geq 3$, sunt liniar independenţi peste corpul $\mathbb{R}$, atunci
i) setul $\left\{\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{m-1}, \prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k\right\}$ alcătuieşte o bază a spaţiului E.
ii) Vectorii $\left(\overline{B}_i\right)_{i\in\overline{1,m-1}}$, cu formula — *[3, pag. 6]* —

$$\overline{B}_i = (-1)^{m-i} \cdot \frac{\overline{b}_1 \times \cdots \times \overline{b}_{i-1} \times \widehat{\overline{b}_i} \times \overline{b}_{i+1} \times \cdots \times \overline{b}_{m-1} \times \left(\prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k\right)}{\left\|\prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k\right\|_2^2}, \quad (4.74)$$

unde $1 \leq i \leq m-1$, se găsesc în hiperplanul $\mathscr{H} = \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left\{\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{m-1}\right\}$.
iii) Au loc restricţiile de biortogonalitate

$$\overline{B}_i \cdot \overline{b}_k = \delta_{ik}, \qquad 1 \leq i, k \leq m-1. \quad (4.75)$$

iv) Setul $\left\{\overline{B}_1, \cdots, \overline{B}_{m-1}\right\}$, dat de (4.74), constituie singura familie de vectori din $\mathscr{H}$ care îndeplineşte restricţia de biortogonalitate (4.75).

Soluţia exerciţiului 4.35. Partea i). Ţinând seama de exerciţiul 4.22, introducem vectorul $\overline{b} = \prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k \neq 0_E$.

Formula (4.60) implică, via exerciţiul 4.23, faptul că determinantul matricei de schimbare de bază — trecerea de la $\mathscr{S}_1$ la setul de vectori din enunţ — are valoarea

$$\left\|\prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k\right\|_2^2 > 0.$$

Partea iii). Folosim estimările (4.61).

Partea ii).[33] Fie subspaţiul liniar $M = \mathbb{R}\overline{b}$ al spaţiului E. Introducem subspaţiul liniar $M^{\perp} = \left\{\overline{u} \in E \,|\, \overline{u} \cdot \overline{b} = 0\right\}$. Atunci — [8, pag. 129, Theorem] —,

$$E = M \oplus M^{\perp} \quad (4.76)$$

şi $\dim_{\mathbb{R}} M^{\perp} = m - \dim_{\mathbb{R}} M = m-1$.

Pentru a stabili egalitatea (4.76), să remarcăm că orice vector $\overline{u} \in E$ poate fi descompus astfel[34]:

---

[33] Pentru altă abordare, vezi exerciţiul 4.37.

[34] Reprezentarea este *unică* deoarece $M \cap M^{\perp} = \{0_E\}$. Într-adevăr, dacă ar exista vectorii $\overline{p} \in M$ şi $\overline{q} \in M^{\perp}$ astfel încât $\overline{p} = \overline{q}$, atunci ar avea loc egalităţile $0 = \overline{p} \cdot \overline{q} = \|\overline{p}\|_2^2$, de unde $\overline{p} = 0_E$.

$$\overline{u} = \left(\overline{u} - \frac{\overline{u}\cdot\overline{b}}{\|b\|_2^2}\cdot\overline{b}\right) + \frac{\overline{u}\cdot\overline{b}}{\|b\|_2^2}\cdot\overline{b}$$
$$= \overline{v}+\overline{w}, \qquad \overline{v}\in M^{\perp}, \overline{w} = \lambda\cdot\overline{b}\in M, \lambda\in\mathbb{R}.$$

Mai departe, exerciţiul 4.21 ne conduce la

$$\overline{b}_i\cdot\overline{b} = \overline{B}_i\cdot\overline{b} = 0, \qquad i\in\overline{1,m-1},$$

de unde deducem că *setul* $\left\{\overline{b}_1,\cdots,\overline{b}_{m-1}\right\}$ *alcătuieşte o bază a spaţiului* $M^{\perp}$, respectiv $\left(\overline{B}_i\right)_{i\in\overline{1,m-1}}\subset M^{\perp}$. Aici, $\mathscr{H} = M^{\perp}$.

Afirm că *setul* $\left\{\overline{B}_1,\cdots,\overline{B}_{m-1}\right\}$ *alcătuieşte o bază a spaţiului* $M^{\perp}$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că vectorii din set sunt liniar independenţi peste corpul $\mathbb{R}$ [8, pag. 11, Theorem]. Dacă, prin absurd, ar exista numerele reale $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,m-1}}$, nu toate nule, astfel încât

$$\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i\cdot\overline{B}_i = 0_E,$$

atunci, conform (4.75), am ajunge la

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{m-1}\alpha_i\cdot\overline{B}_i\right)\cdot\overline{b}_k = \alpha_k\cdot\left(\overline{B}_k\cdot\overline{b}_k\right) = \alpha_k, \qquad k\in\overline{1,m},$$

adică la o contradicţie. Afirmaţia a fost probată.

Partea iv). Adaptăm tehnica de la soluţia exerciţiului 4.24. Astfel, dacă vectorii $(\overline{c}_i)_{i\in\overline{1,m-1}}$, $\left(\overline{d}_i\right)_{i\in\overline{1,m-1}}$ desemnează baze ale subspaţiului $\mathscr{H}$ cu proprietatea că

$$\overline{c}_i\cdot\overline{b}_k = \overline{d}_i\cdot\overline{b}_k = \delta_{ik}, \qquad 1\le i,k\le m-1,$$

atunci seturile

$$\left\{\overline{c}_1,\cdots,\overline{c}_{m-1},\frac{\overline{b}}{\|\overline{b}\|_2^2}\right\}, \qquad \left\{\overline{d}_1,\cdots,\overline{d}_{m-1},\frac{\overline{b}}{\|\overline{b}\|_2^2}\right\}$$

sunt baze ale spaţiului E care verifică restricţia de biortogonalitate în raport cu baza de la *partea i)*. □

Exerciţiul 4.36. *(Orientarea bazelor reciproce)* În contextul exerciţiului 4.35,
i) bazele $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{S}_3$ sunt la fel orientate[35] în spaţiul liniar E.
ii) Avem identitatea

[35] Vezi [5, pag. 82].

$$\prod_{i=1}^{m-1} \overline{B}_i = \frac{\prod_{i=1}^{m-1} \overline{b}_i}{\left\| \prod_{i=1}^{m-1} \overline{b}_i \right\|_2^2}. \tag{4.77}$$

iii)[36] Dacă familiile $\mathscr{B}_1 = \left(\overline{b}_i\right)_{i \in \overline{1,m-1}}$ şi $\mathscr{B}_2 = \left(\overline{B}_i\right)_{i \in \overline{1,m-1}}$ sunt baze reciproce în hiperplanul $\mathscr{H}$, atunci seturile de vectori

$$\left\{ \overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{m-1}, \prod_{i=1}^{m-1} \overline{b}_i \right\}, \qquad \left\{ \overline{B}_1, \cdots, \overline{B}_{m-1}, \prod_{i=1}^{m-1} \overline{B}_i \right\}$$

sunt baze reciproce în spaţiul liniar E.
iv) Este valabilă relaţia

$$(\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m) = \frac{1}{(\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m)}.$$

Soluţia exerciţiului 4.36. Partea i). Matricea de schimbare de bază, $G = (P^t \cdot P)^{-1}$, are determinantul pozitiv.

Partea ii). Deducem că — via (4.74), respectiv (4.65) —

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{m-1} \overline{B}_i = \frac{(-1)^{m-(m-1)}}{\left\| \prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k \right\|_2^2} \cdot \overline{B}_1 \times \overline{B}_2 \times \cdots \times \overline{B}_{m-2} \\ \times \left[\overline{b}_1 \times \cdots \times \overline{b}_{m-2} \times \left(\prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k \right) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{-1}{\left\| \prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k \right\|_2^4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\left(\overline{b}_1, \cdots, \overline{b}_{m-2}, \overline{b}_{m-1}, \prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k \right) & 0 \\ \overline{b}_1 & \overline{b}_2 & \cdots & \overline{b}_{m-3} & \overline{b}_{m-2} & \overline{b}_{m-1} & \prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k \end{vmatrix}.$$

Partea iii). În virtutea relaţiei (4.77), obţinem că

$$\left(\prod_{i=1}^{m-1} \overline{B}_i \right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{m-1} \overline{b}_j \right) = 1. \tag{4.78}$$

---

[36] În particular, formula (4.74) rezultă din (4.59).

Conform exerciţiului 4.35, *partea iv)*, vectorii din familia $\mathscr{B}_2$ au reprezentarea (4.74). Concluzia rezultă din (4.75), (4.78).

Partea iv). Pe baza (4.60), (4.54), obţinem că

$$(\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m) = \det\left[\left(P^{-1}\right)^t\right] = \frac{1}{\det P},$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exerciţiul 4.37. *(Produsul vectorial multiplu: produse vectoriale de produse vectoriale)* Fiind daţi vectorii $\mathscr{U} = (\overline{u}_i)_{i\in\overline{1,m-1}}$, $\mathscr{V} = (\overline{v}_i)_{i\in\overline{1,m-1}} \subset E$, introducem matricea produselor scalare — $m \geq 3$ —

$$G^{\mathscr{U}\mathscr{V}} = \begin{pmatrix} \overline{u}_1\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_{m-1} \\ \overline{u}_2\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_{m-1} \end{pmatrix} = \left(G^{\mathscr{U}\mathscr{V}}_{ij}\right)_{i,j\in\overline{1,m-1}}$$

şi notăm cu $D^{\mathscr{U}\mathscr{V}}_{ij}$ minorul corespunzător elementului $G^{\mathscr{U}\mathscr{V}}_{ij}$, unde $i, j \in \overline{1,m-1}$. Atunci,

i) dacă setul $\mathscr{V}$ este liniar dependent peste corpul $\mathbb{R}$, au loc identităţile

$$\sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k D^{\mathscr{U}\mathscr{V}}_{ik}\cdot\overline{v}_k = 0_E, \qquad 1 \leq i \leq m-1, \tag{4.79}$$

pentru orice $\mathscr{U} \subset E$.

ii) Este valabilă dubla egalitate

$$\begin{aligned} &\overline{u}_1 \times \cdots \times \overline{u}_{i-1} \times \widehat{\overline{u}_i} \times \overline{u}_{i+1} \times \cdots \times \overline{u}_{m-1} \times \left(\prod_{j=1}^{m-1} \overline{v}_j\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{m+k} D^{\mathscr{U}\mathscr{V}}_{ik}\cdot\overline{v}_k = -\begin{vmatrix} \overline{u}_1\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_{m-1} \\ \overline{u}_2\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_{m-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_1} & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_2} & \cdots & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_{m-1}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_{m-1} \\ \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_{m-1} \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4.80}$$

pentru orice $i \in \overline{1,m-1}$, cu convenţia ca *determinantul să fie dezvoltat după ultima linie*.

Soluţia exerciţiului 4.37. Remarcăm că demonstraţia părţii a doua a egalităţii (4.80) se reduce la dezvoltarea determinantului din dreapta.

Partea i). Există $p \in \overline{1,m-1}$ şi numerele $(\lambda_r)_{r\in I} \subset \mathbb{R}$, unde $I = \overline{1,m-1} \setminus \{p\}$, astfel încât

$$\overline{v}_p = \sum_{r\in I} \lambda_r \cdot \overline{v}_r.$$

Înmulţim cu $(-1)^m$ membrul stâng al identităţilor (4.79). Rezultatul se reorganizează — folosind cea de-a doua egalitate (4.80) — drept

$$-\begin{vmatrix}
\overline{u}_1\cdot\overline{v}_1 & \cdots & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_{p-1} & \overline{u}_1\cdot\left(\overline{v}_p - \sum\limits_{r\in I}\lambda_r\overline{v}_r\right) & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_{p+1} & \cdots & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_{m-1} \\
\overline{u}_2\cdot\overline{v}_1 & \cdots & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_{p-1} & \overline{u}_1\cdot\left(\overline{v}_p - \sum\limits_{r\in I}\lambda_r\overline{v}_r\right) & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_{p+1} & \cdots & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_{m-1} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_1} & \cdots & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_{p-1}} & \widehat{\overline{u}_i\cdot\left(\overline{v}_p - \sum\limits_{r\in I}\lambda_r\overline{v}_r\right)} & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_{p+1}} & \cdots & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_{m-1}} \\
\vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
\overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_1 & \cdots & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_{p-1} & \overline{u}_{m-1}\cdot\left(\overline{v}_p - \sum\limits_{r\in I}\lambda_r\overline{v}_r\right) & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_{p+1} & \cdots & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_{m-1} \\
\overline{v}_1 & \cdots & \overline{v}_{p-1} & \overline{v}_p - \sum\limits_{r\in I}\lambda_r\overline{v}_r & \overline{v}_{p+1} & \cdots & \overline{v}_{m-1}
\end{vmatrix}.$$

Partea ii). Dacă vectorii din setul $\mathscr{V}$ sunt liniar dependenţi peste corpul $\mathbb{R}$, atunci, via exerciţiul 4.22, produsul lor vectorial este nul. Dubla egalitate (4.80) rezultă, în acest caz, din *partea i)*. Este suficient, aşadar, să stabilim egalitatea din enunţ atunci când *vectorii din $\mathscr{V}$ sunt liniar independenţi*.

Pe baza exerciţiilor 4.35, *partea i)*, şi 4.23, respectiv a reprezentării (4.65), deducem că membrul stâng al dublei relaţii de demonstrat este egal cu

$$\frac{1}{\left\|\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j\right\|_2^2}\cdot\begin{vmatrix} \overline{u}_1\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_{m-1} & \overline{u}_1\cdot\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j \\ \overline{u}_2\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_{m-1} & \overline{u}_2\cdot\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_1} & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_2} & \cdots & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_{m-1}} & \widehat{\overline{u}_i\cdot\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_{m-1} & \overline{u}_{m-1}\cdot\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \left\|\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j\right\|_2^2 \\ \overline{v}_1 & \overline{v}_2 & \cdots & \overline{v}_{m-1} & \prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j \end{vmatrix}. \tag{4.81}$$

Dezvoltând determinantul (4.81) după ultima linie, obţinem

$$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m+k}}{\left\|\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j\right\|_2^2}\cdot\begin{vmatrix} \overline{u}_1\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \widehat{\overline{u}_1\cdot\overline{v}_k} & \cdots & \overline{u}_1\cdot\overline{v}_{m-1} & \overline{u}_1\cdot\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j \\ \overline{u}_2\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \widehat{\overline{u}_1\cdot\overline{v}_k} & \cdots & \overline{u}_2\cdot\overline{v}_{m-1} & \overline{u}_2\cdot\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j \\ \vdots & \vdots & \cdots & \hat{\vdots} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_1} & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_2} & \cdots & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_k} & \cdots & \widehat{\overline{u}_i\cdot\overline{v}_{m-1}} & \widehat{\overline{u}_i\cdot\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \hat{\vdots} & \cdots & \vdots & \vdots \\ \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_1 & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_2 & \cdots & \widehat{\overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_k} & \cdots & \overline{u}_{m-1}\cdot\overline{v}_{m-1} & \overline{u}_{m-1}\cdot\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j \\ 0 & 0 & \cdots & \widehat{0} & \cdots & 0 & \left\|\prod_{j=1}^{m-1}\overline{v}_j\right\|_2^2 \end{vmatrix}\cdot\overline{v}_k.$$

Mai departe, determinanţii din sumă se dezvoltă după ultima linie. $\square$

Exerciţiul 4.38. *(Produsul vectorial multiplu: produs scalar de produse vectoriale)* În contextul exerciţiului 4.37, avem egalitatea

$$\left(\prod_{i=1}^{m-1} \overline{u}_i\right) \cdot \left(\prod_{j=1}^{m-1} \overline{v}_j\right) = \det G^{\mathscr{U}\mathscr{V}}.$$

Soluţia exerciţiului 4.38. La fel ca anterior, este suficient să stabilim egalitatea din enunţ atunci când *vectorii din $\mathscr{V}$ sunt liniar independenţi*.

Membrul stâng al egalităţii de demonstrat este egal cu

$$\left(\overline{u}_1, \cdots, \overline{u}_{m-1}, \prod_{j=1}^{m-1} \overline{v}_j\right)$$

$$= \frac{1}{\left\|\prod_{j=1}^{m-1} \overline{v}_j\right\|_2^2} \cdot \begin{vmatrix} \overline{u}_1 \cdot \overline{v}_1 & \overline{u}_1 \cdot \overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_1 \cdot \overline{v}_{m-1} & \overline{u}_1 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \overline{v}_j \\ \overline{u}_2 \cdot \overline{v}_1 & \overline{u}_2 \cdot \overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_2 \cdot \overline{v}_{m-1} & \overline{u}_2 \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \overline{v}_j \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \overline{u}_i \cdot \overline{v}_1 & \overline{u}_i \cdot \overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_i \cdot \overline{v}_{m-1} & \overline{u}_i \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \overline{v}_j \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \overline{u}_{m-1} \cdot \overline{v}_1 & \overline{u}_{m-1} \cdot \overline{v}_2 & \cdots & \overline{u}_{m-1} \cdot \overline{v}_{m-1} & \overline{u}_{m-1} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} \overline{v}_j \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \left\|\prod_{j=1}^{m-1} \overline{v}_j\right\|_2^2 \end{vmatrix}.$$

Determinantul se dezvoltă după ultima linie. $\square$

Exerciţiul 4.39. *(Identitatea lui C. Jacobi*[37]*)*
i) (Cazul $m = 3$) Este valabilă identitatea

$$\left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \times \overline{c} + \left(\overline{b} \times \overline{c}\right) \times \overline{a} + \left(\overline{c} \times \overline{a}\right) \times \overline{b} = 0_E, \qquad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in E. \tag{4.82}$$

Fie $m \geq 3$ şi setul $\mathscr{F} = \left(\overline{f}_i\right)_{i \in \overline{1,m}} \subset E$. Atunci,
ii) introducând mărimile[38]

$$\varepsilon_{ijk} = \operatorname{sign}\left[(i-j) \cdot (j-k) \cdot (k-i)\right], \qquad i, j, k \in \overline{1,m},$$

au loc relaţiile

[37] Vezi [20, pag. 14, Problem 1.2.8].

[38] Numerele ε_{ijk} desemnează, în cazul $m = 3$, *simbolul T. Levi-Civita* [20, pag. 15]. Se utilizează şi denumirea de *simbol de permutare* [14, pag. 9].

$$\varepsilon_{ijk} = \operatorname{sign}(k-j)$$

dacă numărul i este sau cel mai mic sau cel mai mare dintre elementele mulţimii $\{i,j,k\}$, respectiv

$$\varepsilon_{ijk} = \operatorname{sign}(j-k)$$

în caz contrar.
iii) Vectorii $\mathscr{U} = \left(\overline{u}_{ijk}\right)_{\substack{i<j,\\ i,j,k\in\overline{1,m}}}$, cu formula

$$\overline{u}_{ijk} = \overline{f}_1 \times \cdots \times \overline{f}_{i-1} \times \widehat{\overline{f}_i} \times \overline{f}_{i+1} \times \cdots \times \overline{f}_{j-1} \times \widehat{\overline{f}_j} \times \overline{f}_{j+1} \times \cdots \times \overline{f}_m$$

$$\times \left(\overline{f}_1 \times \cdots \times \overline{f}_{k-1} \times \widehat{\overline{f}_k} \times \overline{f}_{k+1} \times \cdots \times \overline{f}_m\right), \qquad i<j, \quad i,j,k\in\overline{1,m},$$

satisfac identitatea

$$\sum_{1\le i<j\le m} \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_{ijk}\cdot \overline{u}_{ijk} = 0_E.$$

Soluţia exerciţiului 4.39. Partea i). Prima soluţie. Exprimăm termenii sumei din membrul stâng al expresiei (4.82) cu ajutorul dublului produs vectorial (4.67).

A doua soluţie. Să presupunem că termenul $\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c}$ este nenul. Atunci, via exerciţiul 4.22, setul $\left\{\overline{a},\overline{b}\right\}\subset E$ este liniar independent peste corpul $\mathbb{R}$. Exerciţiul 4.21 ne conduce la relaţiile — vezi (4.76) —

$$M = \mathbb{R}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right), \qquad M^{\perp} = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\overline{a},\overline{b}\right\}$$

şi

$$\begin{aligned}\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c} &\in M^{\perp}\\ &\subseteq \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right\}.\end{aligned} \tag{4.83}$$

Estimarea (4.83) implică

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\times\overline{c} + \left(\overline{b}\times\overline{c}\right)\times\overline{a} + \left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\times\overline{b}\\ &\in N = \operatorname{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right\}\subseteq E.\end{aligned}$$

Această relaţie rămâne valabilă şi atunci când setul $\left\{\overline{a},\overline{b},\overline{c}\right\}\subset E$ este liniar dependent peste corpul $\mathbb{R}$.

Remarcăm că, pentru a dovedi că $\overline{S} = 0_E$, este suficient să probăm afirmaţia următoare: *vectorul $\overline{S}$ îi este ortogonal unei familii de generatori a spaţiului $\mathbb{R}$-liniar N.*

Au loc identităţile

$$\begin{aligned}\overline{S}\cdot\overline{a} &= \left(\overline{a}\times\overline{b},\overline{c},\overline{a}\right)+\left(\overline{c}\times\overline{a},\overline{b},\overline{a}\right)\\ &= \left(\overline{c},\overline{a},\overline{a}\times\overline{b}\right)+\left(\overline{b},\overline{a},\overline{c}\times\overline{a}\right)\\ &= \left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)+\left(\overline{b}\times\overline{a}\right)\cdot\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\\ &= \left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\cdot\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)+\left[-\left(\overline{a}\times\overline{b}\right)\right]\cdot\left(\overline{c}\times\overline{a}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Analog, $\overline{S}\cdot\overline{b}=\overline{S}\cdot\overline{c}=0$.

Partea iii). Folosim tehnica celei de-a doua soluţii de la *partea i)*. Astfel,

$$\overline{S}=\sum_{1\le i<j\le m}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_{ijk}\cdot\overline{u}_{ijk}\in N=\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}\left\{\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\overline{f}_m\right\}\subseteq E.$$

Fie $p\in\overline{1,m}$. Vom estima, în cele ce urmează, numerele $\overline{S}\cdot\overline{f}_p$.

Cazul $p=1$. Deducem că

$$\begin{aligned}&\overline{S}\cdot\overline{f}_1\\ &=\left[\sum_{j=2}^{m}\sum_{k\in\overline{2,m}\setminus\{j\}}\varepsilon_{1jk}\cdot\left(\overline{u}_{1jk}\cdot\overline{f}_1\right)\right]+\left[\sum_{2\le i<j\le m}\sum_{k\in\overline{1,m}\setminus\{i,j\}}\varepsilon_{ijk}\cdot\left(\overline{u}_{ijk}\cdot\overline{f}_1\right)\right]\\ &=\left[\sum_{j=2}^{m}\sum_{k\in\overline{2,m}\setminus\{j\}}\varepsilon_{1jk}\cdot(-1)^{m-1}\cdot\left(\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\widehat{\overline{f}_j},\cdots,\overline{f}_m,\prod_{\beta\in\overline{1,m}\setminus\{k\}}\overline{f}_\beta\right)\right]\\ &+\left[\sum_{2\le i<j\le m}\sum_{k\in\overline{1,m}\setminus\{i,j\}}\varepsilon_{ijk}\cdot(-1)^{m-1}\right.\\ &\left.\times\left(\overline{f}_1,\overline{f}_1,\overline{f}_2,\cdots,\widehat{\overline{f}_i},\cdots,\widehat{\overline{f}_j},\cdots,\overline{f}_m,\prod_{\beta\in\overline{1,m}\setminus\{k\}}\overline{f}_\beta\right)\right] \qquad (4.84)\\ &=\left[(-1)^{m-1}\cdot\sum_{\substack{j,\,k\,\in\,\overline{2,m}\\ j\neq k}}\mathrm{sign}(k-j)\cdot\left(\prod_{\alpha\in\overline{1,m}\setminus\{j\}}\overline{f}_\alpha\right)\cdot\left(\prod_{\beta\in\overline{1,m}\setminus\{k\}}\overline{f}_\beta\right)\right]+0\\ &=(-1)^{m-1}\cdot\sum_{2\le j<k\le m}\left(-\mathscr{P}\mathscr{S}_{jk}+\mathscr{P}\mathscr{S}_{jk}\right) \qquad (4.85)\\ &=0,\end{aligned}$$

unde $\mathscr{P}\mathscr{S}_{jk}=\left(\prod_{\alpha\in\overline{1,m}\setminus\{j\}}\overline{f}_\alpha\right)\cdot\left(\prod_{\beta\in\overline{1,m}\setminus\{k\}}\overline{f}_\beta\right)$.

Cazul $p=m$. În mod analog,

$$\overline{S}\cdot\overline{f}_m = \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{k\in\overline{1,m-1}\setminus\{i\}} \varepsilon_{imk}\cdot\left(\overline{u}_{imk}\cdot\overline{f}_m\right)$$
$$= -\sum_{\substack{i,\,k\,\in\,\overline{1,m-1}\\ i\neq k}} [-\mathrm{sign}(k-i)]\cdot\left(\prod_{\alpha\in\overline{1,m}\setminus\{i\}}\overline{f}_\alpha\right)\cdot\left(\prod_{\beta\in\overline{1,m}\setminus\{k\}}\overline{f}_\beta\right)$$
$$= \sum_{1\le i<k\le m}\left(-\mathscr{P}\mathscr{S}_{ik}+\mathscr{P}\mathscr{S}_{ik}\right)$$
$$= 0.$$

Cazul $2\le p\le m-1$. Avem relaţiile[39]

$$\overline{S}\cdot\overline{f}_p$$
$$= \sum_{1\le i<j\le m}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_{ijk}\cdot\left(\overline{u}_{ijk}\cdot\overline{f}_p\right)$$
$$= \left[\sum_{1\le i<j<p}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_{ijk}\cdot\left(\overline{u}_{ijk}\cdot\overline{f}_p\right)+\sum_{i<p<j}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_{ijk}\cdot\left(\overline{u}_{ijk}\cdot\overline{f}_p\right)\right.$$
$$\left.+\sum_{p<i<j\le m}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_{ijk}\cdot\left(\overline{u}_{ijk}\cdot\overline{f}_p\right)\right]$$
$$+\left[\sum_{1\le i<(j=)\,p}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_{ipk}\cdot\left(\overline{u}_{ipk}\cdot\overline{f}_p\right)\right]+\left[\sum_{(i=)\,p<j\le m}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_{pjk}\cdot\left(\overline{u}_{pjk}\cdot\overline{f}_p\right)\right]$$
$$= (\,0\quad\text{— via metoda din (4.84) —}\,)$$
$$+\left\{\sum_{1\le i<p}\left[\left(\sum_{k\in\overline{1,i}}+\sum_{k\in\overline{i,p}}\right)+\sum_{k\in\overline{p,m}}\right]\varepsilon_{ipk}\cdot\left(\overline{u}_{ipk}\cdot\overline{f}_p\right]\right\}$$
$$+\left\{\sum_{p<j\le m}\left[\sum_{k\in\overline{1,p}}+\left(\sum_{k\in\overline{p,j}}+\sum_{k\in\overline{j,m}}\right)\right]\varepsilon_{pjk}\cdot\left(\overline{u}_{pjk}\cdot\overline{f}_p\right)\right\}$$
$$= \left\{\sum_{1\le i<p}\left[(\,0\quad\text{— via metoda din (4.85) —}\,)+\sum_{k\in\overline{p,m}}\right]\varepsilon_{ipk}\cdot\left(\overline{u}_{ipk}\cdot\overline{f}_p\right)\right\}$$
$$+\left\{\sum_{p<j\le m}\left[\sum_{k\in\overline{1,p}}+(\,0\quad\text{— via metoda din (4.85) —}\,)\right]\varepsilon_{pjk}\cdot\left(\overline{u}_{pjk}\cdot\overline{f}_p\right)\right\}.$$

Aşadar,

---

[39] Ca de obicei, *sumele cu* 0 *termeni sunt nule*.

$$
\begin{aligned}
&\overline{S} \cdot \overline{f}_p \\
&= \sum_{1 \le i < p} \sum_{p < k \le m} \varepsilon_{ipk} \cdot \left(\overline{u}_{ipk} \cdot \overline{f}_p\right) + \sum_{p < j \le m} \sum_{1 \le k < p} \varepsilon_{pjk} \cdot \left(\overline{u}_{pjk} \cdot \overline{f}_p\right) \\
&= \left(\sum_{1 \le i < p} \sum_{p < k \le m} \overline{u}_{ipk} \cdot \overline{f}_p \right) + \left(\sum_{p < j \le m} \sum_{1 \le k < p} \overline{u}_{pjk} \cdot \overline{f}_p \right) \\
&= \left[\sum_{1 \le i < p} \sum_{p < k \le m} (-1)^{m-p+1} \cdot \left(\prod_{\alpha \in \overline{1,m} \setminus \{i\}} \overline{f}_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \overline{1,m} \setminus \{k\}} \overline{f}_\beta \right) \right] \\
&+ \left[\sum_{p < j \le m} \sum_{1 \le k < p} (-1)^{m-p} \cdot \left(\prod_{\alpha \in \overline{1,m} \setminus \{j\}} \overline{f}_\alpha \right) \cdot \left(\prod_{\beta \in \overline{1,m} \setminus \{k\}} \overline{f}_\beta \right) \right] \\
&= (-1)^{m-p} \cdot \sum_{1 \le v < p} \sum_{p < w \le m} \left(-\mathscr{P}\mathscr{S}_{vw} + \mathscr{P}\mathscr{S}_{vw} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Exerciţiul 4.40. Fie $m \ge 3$ şi $\overline{u} \in E \setminus \{0_E\}$. Atunci, există vectorii $\left(\overline{b}_i\right)_{i \in \overline{1,m-1}} \subset E$ cu proprietatea că

$$\overline{u} = \prod_{k=1}^{m-1} \overline{b}_k. \tag{4.86}$$

Vectorii pot fi aleşi într-o infinitate de moduri.

Soluţia exerciţiului 4.40. Construim baza $\mathscr{S}_2$ a spaţiului E astfel încât $\overline{f}_1 = \overline{u}$ [8, pag. 11, Theorem]. Atunci, via exerciţiul 4.25, optăm pentru

$$\overline{b}_1 = \frac{(-1)^{m-1}}{(\overline{a}_1, \cdots, \overline{a}_m)} \cdot \overline{a}_2, \qquad \overline{b}_j = \overline{a}_{j+1}, \qquad j \in \overline{2, m-1}.$$

La partea a doua, să observăm că are loc egalitatea

$$\overline{b}_1 \times \overline{b}_2 \times \overline{b}_3 \times \cdots \times \overline{b}_{m-1} = \overline{b}_1 \times \left(\lambda \cdot \overline{b}_1 + \overline{b}_2\right) \times \overline{b}_3 \times \cdots \times \overline{b}_{m-1}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

ceea ce încheie demonstraţia. $\square$

Exerciţiul 4.41. Fie $m \ge 3$ şi $\overline{u} \in E$. Dacă

$$(\overline{u}, \overline{v}_1, \overline{v}_2, \cdots, \overline{v}_{m-1}) = 0$$

pentru orice vectori $(\overline{v}_i)_{i \in \overline{1,m-1}} \subset E$, atunci $\overline{u} = 0_E$.

Soluţia exerciţiului 4.41. Presupunem că, prin absurd, $\overline{u} \ne 0_E$. Atunci, conform exerciţiului 4.40, există vectorii $\left(\overline{b}_i\right)_{i \in \overline{1,m-1}}$ din (4.86).

Luând $\overline{v}_i = \overline{b}_i$, unde $1 \le i \le m-1$, ajungem la — via exerciţiul 4.23 —

$$0=(\overline{u},\overline{v}_1,\overline{v}_2,\cdots,\overline{v}_{m-1})=(-1)^{m-1}\left(\prod_{k=1}^{m-1}\overline{b}_k\right)\cdot\overline{u}=(-1)^{m-1}\left\|\prod_{k=1}^{m-1}\overline{b}_k\right\|_2^2\neq 0,$$

ceea ce este, evident, o contradicţie. $\square$

Introducem *produsul tensorial* — în raport cu baza $\mathscr{S}_1$ — al vectorilor $\overline{u}, \overline{v}\in E$ cu formula — vezi [5, pag. 60] —

$$\overline{u}\otimes\overline{v}=\overline{u}\otimes_{\mathscr{S}_1}\overline{v}=\begin{pmatrix}u_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots\\ u_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1^{\mathscr{S}_1} & \ldots & v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_m(\mathbb{R}). \tag{4.87}$$

Exerciţiul 4.42. *(Produsul tensorial în baza $\mathscr{S}_2$)* Este valabilă expresia

$$\overline{u}\otimes\overline{v}=P\begin{pmatrix}u_1^{\mathscr{S}_2}\\ \vdots\\ u_m^{\mathscr{S}_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_2^{\mathscr{S}_2} & \ldots & v_m^{\mathscr{S}_2}\end{pmatrix}P^t.$$

Soluţia exerciţiului 4.42. Utilizăm relaţiile (4.45). $\square$

Exerciţiul 4.43. Fie $A, B\in\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ şi $\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{x}\in E$. Au loc egalităţile:
i) $(\overline{u}\otimes\overline{v})^t=\overline{v}\otimes\overline{u}$.
ii) $(\overline{u}\otimes\overline{v})\,\overline{w}=(\overline{v}\cdot\overline{w})\,\overline{u}$.
iii) $(\overline{u}\otimes\overline{v})\,(\overline{w}\otimes\overline{x})=(\overline{v}\cdot\overline{w})\,(\overline{u}\otimes\overline{x})$.
iv) $\overline{u}\cdot[(\overline{v}\otimes\overline{v})\,\overline{w}]=\overline{w}\cdot[(\overline{v}\otimes\overline{v})\,\overline{u}]=(\overline{u}\cdot\overline{v})\,(\overline{w}\cdot\overline{v})$.
v) $(A\overline{u})\otimes(B\overline{v})=A\,(\overline{u}\otimes\overline{v})\,B^t$.
vi) $[(\overline{u}\otimes\overline{u})\,\overline{v}]\otimes[(\overline{u}\otimes\overline{u})\,\overline{v}]=(\overline{u}\cdot\overline{v})^2\,(\overline{u}\otimes\overline{u})$.

Soluţia exerciţiului 4.43. Partea i). Folosim formula (4.87).
Partea ii). Conform (4.48), avem

$$\begin{aligned}(\overline{u}\otimes\overline{v})\,\overline{w}&=\begin{pmatrix}\overline{e}_1&\cdots&\overline{e}_m\end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix}u_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots\\ u_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\cdot\left[\begin{pmatrix}v_1^{\mathscr{S}_1}&\ldots&v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots\\ w_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\right]\right\}\\ &=(\overline{v}\cdot\overline{w})\left[\begin{pmatrix}\overline{e}_1&\cdots&\overline{e}_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots\\ u_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\right].\end{aligned}$$

Partea iii). Din nou, întrebuinţăm asociativitatea înmulţirii matricelor. Astfel,

$$(\overline{u}\otimes\overline{v})\,(\overline{w}\otimes\overline{x})=\begin{pmatrix}u_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots\\ u_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}v_1^{\mathscr{S}_1}&\ldots&v_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1^{\mathscr{S}_1}\\ \vdots\\ w_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1^{\mathscr{S}_1}&\cdots&x_m^{\mathscr{S}_1}\end{pmatrix}.$$

Partea iv). Prima egalitate rezultă din (4.50), ţinând seama de faptul că matricea $\overline{v}\otimes\overline{v}$ este simetrică — via *partea i)* —. Pentru cea de-a doua egalitate folosim *partea ii)*.

Partea v). Prin calcul direct, pe baza definiţiilor (4.87), (4.48).

Partea vi). Aplicăm *partea ii)*. $\square$

Exerciţiul 4.44. Fie bazele reciproce $\mathscr{S}_2$, $\mathscr{S}_3$ ale spaţiului liniar E. Atunci,
i) matricele

$$A=\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_i\otimes\overline{a}_i,\qquad B=\sum_{i=1}^{m}\overline{f}_i\otimes\overline{f}_i$$

sunt simetrice şi strict pozitiv-definite.
ii) ([3, pag. 7]) Sunt valabile descompunerile — *rezoluţia unităţii* —

$$I_m=\sum_{i=1}^{m}\overline{f}_i\otimes\overline{a}_i=\sum_{i=1}^{m}\overline{a}_i\otimes\overline{f}_i.$$

iii) ([3, pag. 12]) $B=A^{-1}$.
iv) Avem relaţiile[40]

$$\left(\overline{f}_i\otimes\overline{a}_i\right)^2=\overline{f}_i\otimes\overline{a}_i,\qquad i\in\overline{1,m},$$

respectiv

$$\left(\overline{f}_j\otimes\overline{a}_j\right)\left(\overline{f}_k\otimes\overline{a}_k\right)=O_m,\qquad 1\le j\neq k\le m.$$

v) Vectorii celor două baze admit reprezentările

$$\overline{a}_i=A\overline{f}_i,\qquad \overline{f}_i=B\overline{a}_i,\qquad i\in\overline{1,m}.$$

Soluţia exerciţiului 4.44. Partea i). Simetria matricelor A, B rezultă din exerciţiul 4.43, *partea i)*. Fiind dat vectorul nenul $\overline{u}\in E$, avem — via acelaşi exerciţiu, *partea iv)* —

$$\overline{u}\cdot A\overline{u}=\sum_{i=1}^{m}\overline{u}\cdot\left[\left(\overline{a}_i\otimes\overline{a}_i\right)\overline{u}\right]=\sum_{i=1}^{m}\left(\overline{u}\cdot\overline{a}_i\right)^2.\tag{4.88}$$

Cum $\overline{u}\neq 0_E$, coordonatele sale în baza $\mathscr{S}_2$ — vezi exerciţiul 4.33 — nu pot fi toate nule, deci $\overline{u}\cdot A\overline{u}>0$.

Partea ii). Observăm că, pe baza exerciţiului 4.25, este suficient[41] să stabilim prima dintre egalităţi.

---

[40] Operatorii $T_i\in L(E,E)$, reprezentaţi în baza $\mathscr{S}_1$ de matricele $\mathbb{T}_i=\overline{f}_i\otimes\overline{a}_i$, sunt *idempotenţi* — proiectori [8, pag. 73, Theorem 1] — şi are loc egalitatea $E=\mathrm{Im}\ T_1\oplus\cdots\oplus\mathrm{Im}\ T_m$.

[41] Altă justificare a celei de-a doua egalităţi: îi aplicăm operaţia de transpunere primeia dintre egalităţi, conform exerciţiului 4.43, *partea i)*.

Fie $\overline{v} \in E$. Atunci, — apelând, din nou, la exerciţiul 4.33 —

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{f}_i \otimes \overline{a}_i - I_m\right) \overline{v} = \sum_{i=1}^{m} (\overline{a}_i \cdot \overline{v}) \overline{f}_i - \overline{v}$$
$$= \overline{v} - \overline{v} = 0_E.$$

Vectorul $\overline{v}$ fiind arbitrar, demonstraţia se încheie căci O_m *este singura matrice pentru care* $O_m\overline{v} = 0_E$ *indiferent de* $\overline{v}$.

Partea iii). Deducem că — exerciţiul 4.43, *partea iii)*, şi (4.55) —

$$AB = \sum_{1\leq i,\, j\leq m} (\overline{a}_i \otimes \overline{a}_i) \left(\overline{f}_j \otimes \overline{f}_j\right) = \sum_{1\leq i,\, j\leq m} \left(\overline{a}_i \cdot \overline{f}_j\right) \left(\overline{a}_i \otimes \overline{f}_j\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m} \overline{a}_k \otimes \overline{f}_k = I_m,$$

respectiv — matricele A, B sunt simetrice —

$$I_m = (I_m)^t = (AB)^t = BA.$$

Partea iv). Folosim exerciţiul 4.43, *partea iii)*, şi restricţia de biortogonalitate (4.55).

Partea v). La prima egalitate, — via *partea i)* —,

$$A\overline{f}_i = \sum_{k=1}^{m} (\overline{a}_k \otimes \overline{a}_k) \overline{f}_i = \sum_{k=1}^{m} \left(\overline{a}_k \cdot \overline{f}_i\right) \overline{a}_k = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ki}\overline{a}_k$$
$$= \overline{a}_i, \qquad i \in \overline{1,m}.$$

La cea de-a doua egalitate, — vezi partea *iii)* —,

$$B\overline{a}_i = A^{-1}\left(A\overline{f}_i\right) = \left(A^{-1}A\right)\overline{f}_i$$
$$= \overline{f}_i,$$

unde $1 \leq i \leq m$. □

Exerciţiul 4.45. Fie $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ o matrice simetrică şi strict pozitiv-definită. Dacă[42]

$$\overline{f}_i \cdot A\overline{f}_j = \delta_{ij}, \qquad i,\, j \in \overline{1,m}, \tag{4.89}$$

atunci

i) setul $\left\{\overline{f}_1, \cdots, \overline{f}_m\right\} \subset E$ este liniar independent peste corpul $\mathbb{R}$.

ii) Sunt valabile identităţile

[42] Existenţa vectorilor $\left(\overline{f}_i\right)_{i\in\overline{1,m}} \subset E$ este asigurată de *teorema lui J. Lagrange* [12, pag. 319, Teorema 1.6]. Vezi şi exerciţiul 4.46.

$$\begin{cases} A = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(A\overline{f}_k\right) \otimes \left(A\overline{f}_k\right), \\ I_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \left(A\overline{f}_k\right) \otimes \overline{f}_k = \sum\limits_{k=1}^{m} \overline{f}_k \otimes \left(A\overline{f}_k\right), \\ A^{-1} = \sum\limits_{k=1}^{m} \overline{f}_k \otimes \overline{f}_k. \end{cases}$$

Soluţia exerciţiului 4.45. Partea i). Dacă ar exista numerele $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,m}} \subset \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \overline{f}_j = 0_E,$$

atunci

$$\begin{aligned} 0 = \overline{f}_i \cdot A0_E = \overline{f}_i \cdot A\left(\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \overline{f}_j\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \cdot \left(\overline{f}_i \cdot A\overline{f}_j\right) \\ = \sum_{j=1}^{m} \delta_{ij}\alpha_j, \qquad 1 \le i \le m, \end{aligned}$$

de unde va rezulta că toate numerele $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,m}}$ ar fi nule.

Partea ii). Conform (4.89), setul

$$\left\{A\overline{f}_1, \cdots, A\overline{f}_m\right\}$$

verifică restricţia de biortogonalitate în raport cu baza $\mathscr{S}_2$ a spaţiului liniar E, deci coincide cu $\mathscr{S}_3$. Concluziile exerciţiului de faţă vor rezulta din exerciţiul 4.44.

Pe de altă parte, adaptând tehnicile de la exerciţiile anterioare, putem realiza demonstraţii independente ale cerinţelor din enunţ. Astfel, pentru $\overline{u} \in E$, avem

$$\overline{u} = \sum_{i=1}^{m} \left(\overline{u} \cdot A\overline{f}_i\right) \overline{f}_i = \sum_{j=1}^{m} \left(\overline{u} \cdot \overline{f}_j\right) \left(A\overline{f}_j\right).$$

Apoi, — în virtutea relaţiei (4.50) —

$$\begin{aligned} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(A\overline{f}_k\right) \otimes \left(A\overline{f}_k\right) - A\right] \overline{u} &= \sum_{k=1}^{m} \left[\left(A\overline{f}_k\right) \cdot \overline{u}\right] \left(A\overline{f}_k\right) - A\overline{u} \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left(\overline{f}_k \cdot A\overline{u}\right) \left(A\overline{f}_k\right) - A\overline{u} \\ &= A\overline{u} - A\overline{u} = 0_E, \end{aligned}$$

respectiv

$$\left[\sum_{k=1}^{m}\left(A\overline{f}_k\right)\otimes\overline{f}_k-I_m\right]\overline{u}=\sum_{k=1}^{m}\left(\overline{f}_k\cdot\overline{u}\right)\left(A\overline{f}_k\right)-I_m\overline{u}$$
$$=\overline{u}-\overline{u}=0_E.$$

Mai departe,

$$\left(A\sum_{k=1}^{m}\overline{f}_k\otimes\overline{f}_k-I_m\right)\overline{u}=\sum_{k=1}^{m}\left(\overline{f}_k\cdot\overline{u}\right)\left(A\overline{f}_k\right)-I_m\overline{u}$$
$$=\overline{u}-\overline{u}=0_E$$

şi

$$\left[\left(\sum_{k=1}^{m}\overline{f}_k\otimes\overline{f}_k\right)A-I_m\right]\overline{u}=\sum_{k=1}^{m}\left(\overline{f}_k\cdot A\overline{u}\right)\overline{f}_k-I_m\overline{u}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}\left[\left(A\overline{f}_k\right)\cdot\overline{u}\right]\overline{f}_k-\overline{u}$$
$$=\overline{u}-\overline{u}=0_E,$$

ceea ce încheie demonstraţia. □

Exerciţiul 4.46. Fie $A\in\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ o matrice simetrică şi strict pozitiv-definită. Dacă $(\lambda_i)_{i\in\overline{1,m}}$ sunt valorile proprii, nu neapărat distincte, ale matricei iar $(\overline{u}_i)_{i\in\overline{1,m}}$, unde[43] $\overline{u}_i\cdot\overline{u}_j=\delta_{ij}$ pentru orice $i,\ j\in\overline{1,m}$, sunt eigenvectorii corespunzători, atunci au loc egalităţile

$$\begin{cases}A=\sum\limits_{k=1}^{m}\lambda_k\cdot\left(\overline{u}_k\otimes\overline{u}_k\right),\\ I_m=\sum\limits_{k=1}^{m}\overline{u}_k\otimes\overline{u}_k,\\ A^{-1}=\sum\limits_{k=1}^{m}\frac{1}{\lambda_k}\cdot\left(\overline{u}_k\otimes\overline{u}_k\right),\end{cases}$$

respectiv[44]

$$\overline{u}\cdot A\overline{v}=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\cdot\left(\overline{u}\cdot\overline{u}_k\right)\left(\overline{v}\cdot\overline{u}_k\right),\qquad \overline{u},\overline{v}\in E.$$

În contextul exerciţiului 4.44, *partea v)*, este valabilă[45] egalitatea

---

[43] Vectorii proprii corespunzând valorilor proprii distincte sunt ortogonali, conform exerciţiului 4.15, *partea iii)*. Eigenvectorii corespunzând aceleiaşi valori proprii pot fi ortonormaţi folosind *procedeul J. Gram–E. Schmidt* [12, pag. 352, exerciţiul 2].

[44] Numerele $(\overline{u}\cdot\overline{u}_r)_{r\in\overline{1,m}}\subset\mathbb{R}$, din dezvoltarea $\overline{u}=\sum\limits_{r=1}^{m}(\overline{u}\cdot\overline{u}_r)\overline{u}_r$, se mai numesc şi *coeficienţi J. Fourier* ai vectorului $\overline{u}\in E$ în raport cu baza $(\overline{u}_r)_{r\in\overline{1,m}}$ [16, pag. 79].

[45] Baza reciprocă a unei baze ortonormate [8, pag. 122] coincide cu aceasta.

$$\overline{a}_i = I_m \overline{u}_i = \overline{u}_i, \qquad 1 \le i \le m.$$

Soluţia exerciţiului 4.46. Ţinând seama de exerciţiul 4.15, *partea ii)*, introducem vectorii $\overline{f}_i = \frac{\overline{u}_i}{\sqrt{\lambda_i}}$. Atunci, $A\overline{f}_i = \sqrt{\lambda_i} \cdot \overline{u}_i$, respectiv $\overline{f}_i \cdot A\overline{f}_j = \delta_{ij}$, unde $i, j \in \overline{1,m}$. Aplicăm exerciţiul 4.45. $\square$

Referinţe Bibliografice

1. Amann, H.: Ordinary differential equations, An introduction to nonlinear analysis. Walter de Gruyter, Berlin (1990)
2. Barbu, V.: Ecuaţii diferenţiale. Editura Junimea, Iaşi (1985)
3. Boulanger, Ph., Hayes, M.: Bivectors and waves in mechanics and optics. Chapman & Hall, London (1993)
4. Dinculeanu, N.: Integrarea pe spaţii local compacte. Editura Academiei R.P.R., Bucureşti (1965)
5. Frankel, T.: The geometry of physics, An introduction, Second edition. Cambridge University Press, Cambridge (2006)
6. Gaşpar, D.: Analiză funcţională. Editura Facla, Timişoara (1981)
7. Halanay, A.: Introducere în teoria calitativă a ecuaţiilor diferenţiale. Editura Tehnică, Bucureşti (1956)
8. Halmos, P.R.: Finite-dimensional vector spaces. Springer-Verlag, New York (1987)
9. Hille, E.: Analytic function theory, Volume I. Chelsea Publishing Comp., New York (1982)
10. Hirsch, M.W., Smale, S.: Differential equations, dynamical systems, and linear algebra. Academic Press, New York (1974)
11. Iacob, C.: Mecanică teoretică, Ediţia a II-a. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1980)
12. Ion, I.D., Radu, N.: Algebra. Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti (1970)
13. Kato, T.: Perturbation theory for linear operators. Springer-Verlag, Berlin (1995)
14. Kay, D.C.: Theory and problems of tensor calculus. McGraw-Hill, New York (1988)
15. Perko, L.: Differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag, New York (1996)
16. Rudin, W.: Analiză reală şi complexă, Ediţia a treia. Editura Theta, Bucureşti (1999)
17. Schouten, J.A.: Tensor analysis for physicists. Clarendon Press, Oxford (1951)
18. Shilov, G.E.: Linear algebra. Dover Publications, Inc., New York (1977)
19. Şilov, G.E.: Analiză matematică, Spaţii finit-dimensionale. Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti (1983)
20. Wong, C.W.: Introduction to mathematical physics, Methods & concepts, Second edition. Oxford University Press, Oxford (2013)

Index